

تعليم الرياضيات للمرحلة الثانوية

أساليب ووحدة إثرائية

تأليف

Alfred S. Posamentier
Dean, School of Education

Jey Stepelman
Supervisor of Mathematics



راجع

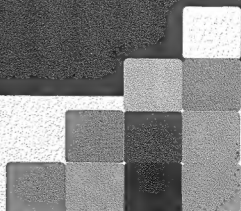
د. صالح عوض عرم

استاذ تربويات الرياضيات المشارك

ترجمة

حسن مظفر الرزو

مدير مركز بحوث المعلوماتية



تعليم الرياضيات للمرحلة الثانوية
أساليب ووحدات إثرائية

هذه ترجمة عربية مصرح بها لكتاب

Teaching Secondary Mathematics

Techniques and Enrichment Units

تأليف

Jey Stepelman

*Supervisor of Mathematics Department
(retired)*

Goerge Washington High School

New York, New York

Alfred S. Posamentier

*Dean, School of Education
Professor of Mathematics Education
The City College*

*The City University of New York
New York, New York*

Sixth Edition

2002



Upper Saddle River, New Jersey
Columbus, Ohio



تعليم الرياضيات للمرحلة الثانوية أساليب ووحدات إثرائية

تأليف

Jey Stepelman
*Supervisor of Mathematics
Department (retired)
Goerge Washington High School
New York, New York*

Alfred S. Posamentier
*Dean, School of Education
Professor of Mathematics Education
The City College
The City University of New York
New York, New York*

راجعه

د . صالح عوض عزم
أستاذ تربويات الرياضيات المشارك
جامعة عجمان للعلوم والتكنولوجيا
دولة الإمارات العربية المتحدة

ترجمة

حسن مظفر الرزو
مدير مركز بحوث المعلوماتية
خبير في المكتب العلمي الاستشاري
كلية الحدباء الجامعة - العراق

الناشر

دار الكتاب الجامعي

العين

2004 م

جميع الحقوق محفوظة

جميع حق الملكية الأدبية والفنية محفوظة لدار الكتاب الجامعي - العين. ويحظر طبع أو تصوير أو ترجمة أو إعادة تنضيد الكتاب كاملاً أو مجزأً أو تسجيله على أشرطة كاسيت أو إدخاله على الكمبيوتر أو برمجته على سطوانات ضوئية إلا بموافقة الناشر خطياً.

Copyright©
All rights reserved

الطبعة الأولى

1424هـ - 2004م

دار الكتاب الجامعي

عضو اتحاد الناشرين العرب

عضو المجلس العربي للموهوبين والمتفوقين

العين - الإمارات العربية المتحدة

ص.ب. 16983 - هاتف : 00971-3-7554845

فاكس : 00971-3-7542102

E-mail : bookhous@emirates.net.ae

مقدمة Preface

فصلاً كاملاً لمناقشة هذا الموضوع.

وقد عالجنا موضوع حلّ المسائل عبر جملة من الطرق تتدرج من الأسس التدريسية إلى جوانب إعادة الابتكار والتحفيز التي تكمن وراءها.

إن العقبة الأساسية تكمن في ظاهرة التغير السريع الذي يعاني منه عالم التقنية المعاصرة. وهناك مشكلتان، الأولى: هي أن هذا الكتاب لن تكون له فرصة محتملة للطباعة قريباً ما لم تكن هناك تغييرات واعدة في التقنية السائدة. في الوقت نفسه، هناك الكثير من المدارس في الولايات المتحدة التي هي أقل حظاً من غيرها، والتي لا تمتلك التقنيات التي تم وصفها في هذا الكتاب، والتي يفترض أن تكون جاهزة للاستخدام من قبل المعلم. لقد حاولنا توجيه القضايا، والمواقف بحيث تغطي متطلبات معظم مدارس هذه الأيام. يتحمل معلمو الرياضيات مسؤوليات ومهام خارج سياقات التدريس المعتادة، وينبغي عليهم أن يركزوا اهتماماتهم بمسألة إثراء عملية تدريس الطلبة الموهوبين والمتميزين، وكذلك الذين يقترون إلى هذه المواهب الاستثنائية، كما يجب عليهم أن يوفرُوا لطلبتهم مناهج لأنشطة إضافية تعمق اهتماماتهم بمادة الرياضيات، وتزيد من وشائج الارتباط بمفرداتها.

أنهينا الجزء الأول من الكتاب بمناقشة المهام المهنية لمعلمي الرياضيات.

وبذلنا جهداً واعياً بعدم إخبار المعلم كيف يتعامل مع جميع المواقف التي تصادفه، وبإزاء ذلك، حاولنا (قدر الإمكان) توفير خيارات متنوعة تتنوع للمعلمين إمكانية اتخاذ حكم مهني حول أدائهم التعليمي.

وعليه لا توجد طريقة تعليم تصلح لجميع المعلمين، فالاختلاف والتباين في شخصية المعلمين ينشأ عنها اختلاف ملموس في طرائق التدريس، وما يكون صالحاً لمعلم ما، لن يكون صالحاً لمعلم آخر.

يمدّ القسم الثاني من الكتاب معلمي الرياضيات بمجموعة من الوحدات الإثرائية تناسب جميع مناهج التدريس في المدارس الثانوية.

هل يعتبر تعليم الرياضيات فناً أم علماً؟

إذا كان فناً فإن الأشخاص الذين يمتلكون مواهب فريدة فقط سيكونون مدرّسين ناجحين لمادة الرياضيات. فالقن يعتمد بصورة ملموسة على ملكة الإبداع، ويمكن تعلّم جزء محدود من مفرداته. أما البقية فتبقى مرتبهة ببزوغ إشراقات الحدس أو البديهة.

أما إذا كان تعليم الرياضيات علماً، فإن كل من يمتلك القدرة على تعلّم تدريس الرياضيات (بصرف النظر عن الموهبة) ينبغي أن يكون قادراً على أداء هذه المهمة.

إننا نعتبر تعليم الرياضيات فناً وعلماً في آن واحد، فكل منا بحاجة إلى قدر معلوم من الاستعداد الفطري للتعلّم بنجاح.

إن هذا الاستعداد (مع استثناءات محدودة) بحاجة إلى أن يدعم بقدر متنوع من مبادئ اجتماعية، ونفسية، وفلسفية، وقدرة علي الحكم على الأشياء بصورة صائبة وسلمية.

لقد وفرنا (من خلال هذا الكتاب) لعلم الرياضيات، أو من يأمل أن يكون كذلك في المستقبل، مجموعة كبيرة من الأفكار التي تغطي جميع جوانب الخبرة بهذا الميدان، وأفكار أخرى نعتقد بأنها ستكون مفيدة وتوفر دعماً للجميع. وأمددنا مادة الكتاب (في كثير من الحالات) باقتراحات وإحساءات عميقة قد اُخترت بعبارة مقترّس - رياضي.

من أجل هذا نستطيع (بأي حال من الأحوال) أن نؤهل هذا الكتاب لأن يكون حاولياً على " كل شيء تريد معرفته عن تعليم الرياضيات ولا تعرف من الذي تسأله عن هذه المهمة".

يناقش القسم الأول من الكتاب طرائق تعليم الرياضيات، مع الأخذ بنظر الاعتبار جميع المسؤوليات على عاتق صاحب هذه المهنة. بدأنا باستعراض لتاريخ تربويات الرياضيات لكي تتوافر لدى مدرّس الرياضيات (في هذه الأيام) فكرة واضحة عن كيفية نشوء وتطور تعليم الرياضيات.

وبعد وصف مبادئ تخطيط مادة الدرس، ناقشنا جوانب التعليم التي تعتمد في التدريس الفعّال. ونظراً لكون الجانب الأكثر أهمية في تدريس الرياضيات يعتمد على قابلية الطالب في حلّ المسائل داخل غرفة التدريس وخارجها، فقد خصصنا

اليديوية سوف يحمل معه تأثيرات ملموسة على تعليم الرياضيات المستقبل. بيد أنه لا زالت ثمة سحابة شكوك تلف كثير من المناطق في الولايات المتحدة الأمريكية حول طبيعة الاتجاهات المحتملة في تربويات الرياضيات. من أجل هذا حاولنا البحث بحذر عن طريقة مستحدثة لتعليم الرياضيات، ترتكز إلى أفكار وطرائق قابلة للاختبار مع مرور الأيام.

حوى الكتاب بين دفتيه مورداً متكاملًا يستطيع القارئ أن ينهل منه ما يريد حول كيفية تعليم الرياضيات، مع مجموعة من المواد الإثرائية، والتي يمكن تبنيها بسهولة في صفوف المراحل المختلفة، لتعميق الفائدة المرجوة من تعليم المادة، ولتشجيع الطلبة على دراسة مادة الرياضيات بشغف وحماس.

أعد هذا الكتاب لصنفين من جمهور القراء: المعلمون ما قبل الخدمة في تعليم الرياضيات في المدارس الثانوية، ومعلمو الرياضيات الذين يسعون إلى تحسين مهاراتهم التعليمية، وتعميق مواردهم المعرفية من خلال طريق منهجي محكم.

كذلك سيكون الكتاب مورداً إضافياً لمعلمي الرياضيات الذين يريدون امتلاك مصدرًا مفصلاً جاهزاً يشخص أمامهم باستمرار، مما يوفر لهم فرصة مناسبة لمراجعة أدائهم التعليمي، والرجوع إلى القسم الثاني من الكتاب للكشف عن أفكار تزيد برامجهم التدريسية عمقا وثراءً.

وقد عمدنا إلى عرض أهداف كل وحدة، مع تزويد وسيلة للتقييم الأولي، ثم أحققناها بوصف متعمق للموضوع بحيث يستطيع القارئ (الذي لا يمتلك معرفة كافية حول الموضوع) تعلم الموضوع بسهولة ويسر.

ثم عدنا فأرفقنا بأسلوب العرض هذا، جملة من الاقتراحات لتدريس هذه المفردة الدراسية لصفوف المدارس الثانوية.

ولتوفير مناخ مناسب لتحديد مستوى تعلم مفردة دراسية محددة (بشكل متمكن) زوّد الكتاب بوسائل تساعد على تقييم لاحق للنشاط التعليمي، يضاف إلى ذلك وجود فهرس هداية كل قسم لغرض تمكين المعلمين من اختيار وحدات الموضوع الدراسي، ومستوى المرحلة الدراسية.

وقد اعتمدت مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية التي وضعها المجلس الوطني لعلمي الرياضيات 2000 (The National Council of Teachers of Mathematics 2000) بوصفها أساساً مرجعياً لجميع الموضوعات التي عولجت خلال الكتاب، ولا تتوفر لدينا معرفة أكيدة حول ما سنؤول إليه خصائص وطبيعة تعلم الرياضيات في المستقبل. وتحدد "المعايير" حالياً صورة أولية عن طبيعة جدول الأعمال المحتملة لهذا الموضوع. إلا أنه بات واضحاً لدينا أن التقدم الملحوظ في التقنيات السائدة خلال عصرنا الراهن، والتي يصاحبها انخفاض ملموس بكلف الحواسيب، والآلات الحاسبة

شكر وعرفان Acknowledgement

لـ Theodore Roosevelt (مدينة نيويورك)، والذي ساهم بتقديم تعليقات عميقة على الدوام، وكذلك بواسطة Arlene Zimney وكلية المديرية التنفيذية السابقة للمناهج والتدريس بمدرسة مدينة نيويورك العامة.

كذلك نريد شكر الذين ساعدوا بمراجعة طبعات الكتاب المختلفة على تعليقاتهم السديدة والحكيمة: Nancy Alexander، جامعة لويزيانا التقنية، Alice Artzt، كلية كوينز في كوني، Joanne Rossi Becker، ولاية سان جوس، Miriam E. Connellan، جامعة ماركيتي، Jay Graening، جامعة أركنساس، Jane Ann McLaughlin، كلية نيوجيرسي، James Mason، جامعة مقاطعة كاليفورنيا، San Bernadino، Regina Panasuk، جامعة ماستشيتوس، Lowell، David Pugalle، جامعة الولاية لسهل ساجينوا، William Frances Stroup، جامعة ولاية كارولينا الشمالية، Max M. Waters، الجامعة الصغيرة لولاية كارولينا الشمالية، Max Sobel، كلية الولاية مونتكلي. كذلك نحن ممنون لمراجعة خبراء تعليم الرياضيات لمدة الكتاب وتقديم مقترحاتهم السديدة. ونشكر المساعدة الفاعلة التي تقدمت بها معلمة الرياضيات والحاسوب بمدرسة برونكس الثانوية للمعلم Deborah J. Stepelman وبالخصوص مساهمتها في إعداد أجزاء من النسخة الأولى للكتاب، وكذلك نخص Barbara Rockhow، بتقسيم الرياضيات بمدرسة برونكس الثانوية للعلوم لمشاركتها معنا بمعرفتها العميقة وخبرتها الرصينة بالمواد اليدوية.

ولا يسعنا إلا أن نشكر الموافقة التي منحنا إياها المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات، وللأستاذ Arthur A. Hiatt على تصوير أجزاء كبيرة من "أنشطة لائحة الحاسبة" والتي ظهرت في كتاب (Arithmetic Teacher, No.6, (February 1987) 38 - 42. كذلك نحن ممنون جداً للمحررين اللتين علمتا معنا: Linda Montgomery، Mary Irvin، على قيامهما بإسداء خدمات إسناد لا تقدر، وإتاحة الفرصة أمامنا للعمل في بيئة خالية من الضغوط والقلق.

بوزامينتين. ألفريد س
جاي ستيف

إن كتاباً يأمل بتحقيق الأهداف آتفة الذكر، لهو بحاجة ماسة إلى موارد من مصادر خبرات واسعة ومتنوعة. ولضمان حسن ملامته لمتطلبات جمهور القراء، وكوادر التعليم عمدنا إلى إشراك مجموعة كبيرة من معلمي الرياضيات في المدارس الثانوية بعملية إعداد الوحدات الإثرائية، والتي قمنا بنشرها لدى منشورات (Croft NEI Waterford, Connecticut).

إننا نتقدم ببالغ شكرنا وعرفاننا لجميل كل معلمي الرياضيات:

Renee E. Baxter, Peter Catranides, Beatrice F. Cohen, Stevens Colello, Joyce A. Dato, James DeMetro, Benito Gomez, Adele Hayda, Cynthia Horvath, Howard Kale, Gladys Kornfield, Arlene Kuperberg, Susan Loeb, David Martienz, Robert Parisi, Patricia Pearson, Steven Pottash, Soraida Rivera, Amelia O. Rogers, Howard Sardis, Verna Segara, Max Sharf, Malcolm Singer, Joseph Skitstone, Jon Sontz, Daniel Stolnitz, Richard A. Vitulli, Stanely Weinstien, Barbara Winters, Betty York .

ويستحق البروفيسور Evan Maletsky شكراً وامتناناً خاصاً لمشاركته في قسم الوحدات الإثرائية.

كذلك نرغب بشكر البروفيسور Alfred Weiss، والذي كان فيما مضى في كلية المدينة بجامعة مدينة نيويورك والذي ساهم في "المعالجة النفسية لحل المسائل" بالإضافة إلى الجزء الذي يخص "الإبداع في حل المسائل" بالفصل الرابع.

وقد تلقينا مشاركة خيرة للفصل الخامس بواسطة الدكتور Stephen E. Morseh، الأستاذ المشارك في تربيته الرياضيات في كلية المدينة بجامعة مدينة نيويورك. وقد عرض خبير حل المسائل المشهور Steven Conrad، والرائد في النقاشات الرياضية الوطنية والمحلية، ومعلم الرياضيات السابق في مدرسة Roslyn العالية (ولاية نيويورك) جملة من التعليقات المهمة حول الفصل الرابع بموضوع حل المسائل. وشكرنا الخاص أيضاً إلى الدكتور William Farber من كلية المدينة على مساعدته التي لا تقدر في الفصل الأول.

إن القراءة التي يسودها طابع التلق والحرص الشديد لخطوط كل طبعة من طبعات الكتاب كانت على يد Jacob Cohen، المساعد الأول لمثول الرياضيات في المدرسة الثانوية

مقدمة المترجم

١

عندما عرض عليّ الأخوة الكرام في دار الكتاب الجامعي مشروع ترجمة هذا الكتاب، أرجأت موضوع الموافقة على المشاركة بترجمته حتى أنظر ملياً في تفاصيل محتوياته. وقد تصورت في بادئ الأمر (بعد إلقاء نظرة سريعة على محتويات الكتاب) كتاباً تقليدياً يعالج موضوعات رياضية تختص بـ مدرسي الرياضيات الذين يمارسون هذه المهنة السامية، وآخرين لما تتوفر لهم بعد فرصة مباشرة مهام عملية تدريس الرياضيات الثانوية.

وبعد أن طويت أوراق رحلتي العلمية إلى جامعة الإمارات العربية المتحدة، وقفلت راجعاً إلى بلدي، انتهزت فرصة وجودي في الباهرة التي تخر عباب أمواج الخليج المتلاطمة لكي أطلع في كتاب الرياضيات الذي شاطرتني الرحلة البحرية إلى العراق!. وكـم كانت دهشتي كبيرة عندما بدأت بقراءة عبارات المؤلف، وهو من كبار الخبراء التربويين في العالم بموضوع العلوم الرياضية، وطرائق تدريسها، فوجدتها عبارات دقيقة، وبلغة، تنحو نحو تأصيل أسس تدريس الرياضيات وفق منهجية علمية وتربوية محكمة.

وقد ازدادت وشائج الصلة بيني وبين الكتاب بمرور الأيام، وبرزت أمامي كثير من الأمور التي ينبغي اعتمادها عند قيامنا بإرشاد طلبتنا داخل المؤسسة الجامعية لكي ننشئ جيلاً يقود العملية التربوية لترسيخ العلوم الرياضية في مدارسنا، وجامعاتنا على حد سواء لأنها مادة التقدم العلمي، والأساس المتين الذي ترتكز إليه جميع العلوم الصرفة والتطبيقية.

وأخيراً بدأت بالعمل على قسم الوحدات الإثرائية التي لا أبالغ في تأكيد أهميتها بالنسبة لجميع الاختصاصات، فزعم أننا قد تلقينا في دراساتنا العليا أعلى منهج دراسي مخصص لمادة الرياضيات في القطاعات الهندسية قاطبة، فقد وجدت في الوحدات الإثرائية الكثير من المعلومات القيمة التي ستد الفئات الخالية بمعرفتي الرياضية.

إذن نلخص القول بأن هذا الكتاب فريد في مادته العلمية، وامتداد دائرة معالجاته الموضوعية إلى أكثر من ميدان، بحيث يمكن أن تعد مرجعاً لا يستغني عنه الذي يخطو الخطوة الأولى باتجاه هذا المضمار، والمتخصص الذي يمكن أن ينهل من الخبرة السميكة التي يمتلكها مؤلفه.

ولكي أخفف من وطأة العبارات العلمية الجافة حاولت أن استخدم عبارة سهلة، وبلغة عربية تحاول الموازنة بين جفاف العبارة العلمية الرصينة، وسلاسة العبارة الأدبية التي تجعل النفوس تميل إليها، وتألّفها، متجنباً الإسراف في هذا الأمر بحيث تخرج الدلالة عن دائرة ما أراده المؤلف .

وأخيراً أود الإشارة إلى أن قاموس الاصطلاحات العلمية الموحدة الذي أصدرته المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم، قد شاركني في رحلتي الخصبة عند ترجمة الكتاب، فنهلت من تراجم الاصطلاحات الواردة فيه لكي تكون ترجمتي للكتاب قريبة من ثوابت الترجمة إلى اللغة العربية المعتمدة في جل الأقطار العربية، ولإزالة مواطن الالتباس في الاستخدامات الفنية للاصطلاح الرياضي.

أسأل الله تعالى أن أكون قد قاربت الصواب بعملتي على ترجمة هذا الكتاب المهم، وأرجو أن يغفر لي القراء من طلبة جامعات، وأساتذة متخصصين زلاتي التي قلما يخلو منها أي عمل لابن آدم مهما حاول الالتزام بالدقة والموضوعية.

كذلك أشكر الأخت المهندسة سوسن كمال عبدالحاميد لما بذلته من مجهود مضيئ و متميز في تنسيق وإخراج هذا الكتاب.

المترجم

حسن مظهر الرزوي

كلية الحداثة الجامعية – الموصل

العراق

Contents فهرس

115	استخدام النماذج الرياضية والتشكيلية	5	مقدمة
121	توسيع مفاهيم مألوفة	7	شكر وعرفان
127	استخدام آلة حاسبة - رسومية	9	مقدمة المترجم
128	الكتابة في درس الرياضيات	14	طرائق تعلم الرياضيات في المرحلة الثانوية
128	سجلات الطالب		
129	سجلات يومية الطالب		
129	العرض التفصيلي	18	1- تحديات التعليم
131	معايير تقويم نماذج كتابات الطالب	18	طلبة اليوم، الرياضيات، واحتياجات المجتمع
131	فوائد أنشطة الكتابة في درس الرياضيات	21	الأزمة في تربية الرياضيات
		22	الحلول المحتملة لمشكلة شحة المعلم
		26	الأهداف والتحديات لمعلمي الرياضيات الثانوية هذه الأيام
		32	المعايير: اثنا عشر عاملاً من النمو
		34	التطوير المهني: مصدر المعلم
		35	مصادر المعلمين
			مناظرة الرياضيات
	4- نور حل المسألة		
143	حل المسائل : رؤية نفسية		
148	مقدمة إلى استراتيجيات حل المسألة		
156	الاستراتيجيات العشر لحل المسألة		
168	استبصار مسائل رياضية		
169	استبصار في حل المسألة		
	5- استخدام التقنية لتعزيز تدريس الرياضيات		
183	الآلات الحاسبة	40	2- التخطيط طويل المدى وقصير المدى
183	الآلات الحاسبة كمساعد في حل المسألة	43	التخطيط طويل المدى
183	أمثلة على أنشطة الآلة الحاسبة	44	التخطيط قصير المدى
191	محلل المعادلات باستخدام المصفوفات	48	خطة الدرس اليومية
192	تطبيقات حساب التفاضل والتكامل	48	التمتع القريب في مكونات الدرس
194	الحواسيب	51	أهداف الأداء
198	استخدام برنامج The Geometer's Sketchpad	51	ما هو التعلم التعاوني؟
212	برنامج The Geometer's Sketchpad والوحدات الإثرائية	51	كيفية تكوين وتشكيل مجموعات تعليمية صغيرة
		54	دور المعلم في إدارة تعلم المجموعة الصغيرة
		54	كيفية دمج تعلم المجموعة الصغيرة بدرس الرياضيات
		56	عينة دروس
		64	عينة دروس معيارية
	6- التقييم المتعدد وتحديد العلامات المدرسية		
219	استخدام مهام تقييم الأداء		
219	استخدام التعليقات بالخطوط الحمراء لتقدير عمل الطالب	84	3- تعليم دروساً أكثر فاعلية
232	إعداد اختبار صفي	84	التقانات المحفزة
247	إدارة الاختبار	85	ما هو الحافز
250	تحديد العلامة المدرسية لاختبار	93	تحفيز الطلبة : الأساليب الثمانية
251	تفسير نتائج الاختبار	93	مسألة الصف
251	اختبارات الاختيارات المتعددة	95	تسمية سمات مسألة الصف
252	مسؤوليات الطالب	98	بعض الاعتبارات الوقائية لتحسين المسألة للصيغة للمسألة الصعبة
253	المسؤوليات الأيوبية	103	عشرة أنواع من الأسئلة ينبغي تجنبها
253	تحديد درجة الفصل الدراسي	106	مسألة الصف وسيلة لتوليد تفكير راق
253	ظلمات تحديد العلامات المدرسية	107	استراتيجيات لتعليم دروس أكثر تأثيراً
		108	استخدام المخططات الشجرية أو المقترعات
		109	استخدام أسلوب طي الورقة أو قصها
		115	الصورة تكافئ ألف كلمة
			تمييز الأنماط
260	7- إثراء تدريس الرياضيات		
270	إثراء تدريس الرياضيات بواسطة الأسلوب التاريخي		
	تقانات الإثراء لجميع المستويات		

386	28- رياضيات عن دراجة	272	الطالب الموهوب
389	29- الرياضيات والموسيقى	275	استخدام الآلات الحاسبة في إثراء التدريس
392	30- الرياضيات في الطبيعة	278	نماذج وأعمال يدوية تغني التدريس
395	31- مسألة يوم الميلاد		
397	32- هيكل نظام الأعداد		
399	33- جولات في أسس الأعداد	290	نادي الرياضيات
402	34- زيادة الريح	290	فرق الرياضيات
404	35- علاقات الانعكاس، والتماثل، والانتقال	293	مباريات الرياضيات
407	36- تجاوز منطقة يتعذر بلوغها	293	مشاريع الرياضيات
409	37- الزاوية التي يتعذر بلوغها	295	معرض الرياضيات
411	38- إنشاءات مثلث	297	التعاون مع الجامعة
413	39- معيار الإنشاء	297	مجلة الرياضيات بالمدرسة
416	40- إنشاء أطوال جذرية	298	برنامج الجمعية العمومية بالرياضيات
417	41- إنشاء خمسين	299	برنامج الضيوف المتحدثين
419	42- تحري مغالطات المثلث متساوي الساقين	299	رحلات الصف ذات الفائدة الرياضية
421	43- نقطة متساوية الزوايا	300	برنامج تعليم الأقربان
423	44- النقطة الأقصر مسافة بمثلث	300	الحاسوب
426	45- عودة إلى المثلث متساوي الساقين	301	لوحة البيانات والبلاغات
429	46- الخصائص الانعكاسية للمستوى		
431	47- إيجاد طول "سفيان" بمثلث		
434	48- تحدي مدحش		
435	49- عمل اكتشافات في الرياضيات	320	1- إنشاء مربعات سحرية بنسق فردي
437	50- مرصعات الضيفساء	322	2- إنشاء مربعات سحرية بنسق زوجي
439	51- تقديم نظرية فيثاغورث	325	3- مدخل إلى العد الحرفي Alphabetic
442	52- عودة إلى التقسيم الثلاثي للزوايا	327	4- حاسبة لعبة الداما
445	53- البرهنة على تلاقي المستقيمات في نقطة واحدة	330	5- لعبة Nim
447	54- مربعات	332	6- برج هانوي
449	55- برهنة استقامة النقاط	334	7- أي يوم كان من الأسبوع؟
451	56- قياس الزاوية بواسطة دائرة	340	8- الأعداد المشغلة Palindromic
453	57- التقسيم الثلاثي للدائرة	343	9- العدد الأسر تسعة
456	58- نظرية بطليموس	345	10- الخصائص الفريدة للعدد
458	59- إنشاء %	348	11- إثراء بواسطة آلة حاسبة يدوية
461	60- الأربيلوس Arbelos	351	12- الضرب للمثلث
463	61- دائرة بتسعة نقاط	353	13- التغييرات على موضوع الضرب
465	62- مستقيم أويلر Euler	356	14- علم الحساب في مصر القديمة
467	63- مستقيم سيمسون Simson	359	15- قضبان نابيير
469	64- مسألة القراصة	360	16- وحدة تسير
472	65- دوائر متساوية	361	17- حجوم وزوائد متعاقبة
474	66- الدوائر الماسة الداخلية والمثلث القائم الزاوية	363	18- العوامل الأولية والمركبة للعدد الصحيح
477	67- المستطيل الذهبي	365	19- نظام العد الأولي
480	68- المثلث الذهبي	368	20- امتدادات المراتب العشرية المتكررة
482	69- مغالطات هندسية	370	21- مزايا المراتب العشرية المتكررة الثمانية
485	70- متعدد السطوح المنتظم	372	22- أنماط في الرياضيات
487	71- مقدمة إلى الطوبولوجيا	374	23- الأعداد الكبيرة جداً
489	72- زوايا على ساعة	377	24- رياضيات التأمين على الحياة
491	73- إيجاد المعدل (المتوسط) التوافقي	379	25- تحليلات هندسية
494	74- غلطات بلهاء	382	26- تقنية كلاين Klein
		384	27- مسألة الخارطة ذات الألوان الأربعة

وحدات إثرائية لصفوف المدارس الثانوية

قائمة تفصيلية-مقاطعة للوحدات الإثرائية

320	1- إنشاء مربعات سحرية بنسق فردي
322	2- إنشاء مربعات سحرية بنسق زوجي
325	3- مدخل إلى العد الحرفي Alphabetic
327	4- حاسبة لعبة الداما
330	5- لعبة Nim
332	6- برج هانوي
334	7- أي يوم كان من الأسبوع؟
340	8- الأعداد المشغلة Palindromic
343	9- العدد الأسر تسعة
345	10- الخصائص الفريدة للعدد
348	11- إثراء بواسطة آلة حاسبة يدوية
351	12- الضرب للمثلث
353	13- التغييرات على موضوع الضرب
356	14- علم الحساب في مصر القديمة
359	15- قضبان نابيير
360	16- وحدة تسير
361	17- حجوم وزوائد متعاقبة
363	18- العوامل الأولية والمركبة للعدد الصحيح
365	19- نظام العد الأولي
368	20- امتدادات المراتب العشرية المتكررة
370	21- مزايا المراتب العشرية المتكررة الثمانية
372	22- أنماط في الرياضيات
374	23- الأعداد الكبيرة جداً
377	24- رياضيات التأمين على الحياة
379	25- تحليلات هندسية
382	26- تقنية كلاين Klein
384	27- مسألة الخارطة ذات الألوان الأربعة

- 75- عودة إلى مسائل المراتب العشرية
76- المتطابقات الجبرية
77- طريقة للتحليل العاظمي ثلاثية الحدود بصيغة ax^2+bx+c
78- حل المعادلات التريمية
79- الخوارزمية الاقليدية
80- الأعداد الأولية
81- مغالطات جبرية
82- اشتقاق المجموع بواسطة المصفوفات
83- ثلاثيات فيثاغورية
84- قابلية القسمة
85- متتابعة فايبوناتشي Fibonacci
86- معادلات دايوفانتين
87- الكسور المستمرة ومعادلات دايوفانتين
88- تبسيط صيغ تتضمن اللانهاية
89- توسيع الكسور المستمرة لأعداد غير القياسية
90- تنابع فاري
91- غلاف القطع المكافئ
92- تطبيق التوافق على قابلية القسمة
93- حل المسائل-استراتيجية معاكسة
94- المراتب العشرية والكسور في أساسات أخرى
95- الأعداد المثلثة Polygonal
96- الشبكات
97- التقسيم الثلاثي للزاوية - ممكن أم غير ممكن؟
98- مقارنة المتوسطات
99- هرم باسكال
100- نظرية كثيرة الحدود
101- حل جبري لمعادلات تكعيبية
102- حل معادلات تكعيبية
- 103- حساب مجاميع السلاسل المنتهية
104- صيغة عامة لمجموع سلسلة بصيغة $\sum_{r=1}^n r^r$
105- آلة حساب للقطع المكافئ
106- إنشاء قطع ناقصة
107- إنشاء القطع المكافئ
108- استخدامات منحنيات المستوى الأعلى لتقسيم زاوية ثلاثياً
109- إنشاء أقلية دائرية لمساري النحنين: دوري فوقي وتحتي
110- التتابع التوافقي
111- التحويلات والمصفوفات
112- طريقة الفروقات
113- تطبيق الاحتمالات على كرة القاعدة
114- مقدمة إلى التحويلات الهندسية
115- الدائرة والقلب
116- تطبيقات العدد المركب (المقدي)
117- الحساب الهندي
118- برهنة أن الأعداد غير نسبية
119- كيفية استخدام الصحائف الممتدة بالحاسوب في توليد حلول لمسائل رياضية محددة
120- عوالم الهندسة الثلاثة
121- خليط π
122- التكرار الرسومي
123- Feigenbaum
124- مثلث سيربينسكي Sierpinski
125- الفركتال Fractals
الملحق A: تعاريف إضافية
الملحق B: تخصيص (إعطاء) الواجب البيتي
- 496
498
500
502
504
506
509
511
514
516
519
522
524
526
528
531
533
535
538
542
543
547
549
551
553
555
557
560

طرائق تعليم الرياضيات في المرحلة الثانوية

Methods of Teaching Secondary Mathematics



The Challenge Of Teaching

كثرت المطالب، والتحديات، والمسؤوليات الملقة على عاتق معلمي الرياضيات بالمدارس الثانوية، في وقتنا الحاضر، وتعددت أشكالها. ولم تعد قائمة المهارات التي تتطلبها مهنة معلم الرياضيات مقتصرة على تفاصيل مفردات اختصاصه، بل أصبح من الضروري الاستجابة إلى جملة الاحتياجات التي تتطلبها الخصائص دائمة التغير للمجتمع التقني المعاصر.

إن تعليم الرياضيات الثانوية، هي فعالية علمية تتداخل مع عنصر الثقافة بما يضمن تحقيق تقدم وتتطور ملموس في البيئة التعليمية بالشكل الذي يحقق احتياجات المجتمع. ومن ثم فإن نمو الثقافة، وبالخصوص التأثيرات العميقة التي حملتها تطبيقات الحاسوب، تصاحبها تطورات الحاصلة في كل من الرياضيات البحتة والتطبيقية ستساهم في زيادة في مساحة المعرفة الرياضية وعمق جذورها بوصفها علما مستقلا بذاته. لقد نجم عن البيئة المجتمعية المعاصرة جعله من التأثيرات التي ساهمت في تغيير خصائص أساليب تعليم الرياضيات المدرسية، وأصبح من الواجب على هذه التأثيرات أن تنعكس إلى قدرات إضافية تمنح للطلبة وتمهينهم للمشاركة في فعاليات عالم الغد وأنشطته المختلفة.

في ضوء هذه الرؤية الجديدة والأهداف التي تتوخاها بوثيقة المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات "المبادئ والمعايير الخاصة بالرياضيات المدرسية"، ينبغي أن تتوافر لجميع الطلبة فرصة تعلم، وإدراك، وتطبيق المبادئ، والأسس، والمهارات داخل المؤسسة التعليمية وخارجها. فضلا عن ذلك فإن الوثيقة تدعم الأطر - الدراسية الرياضية التي تركز إلى توظيف وتشجيع بيئة تعلم فعالة، حيث تتوفر للطلبة فرصة تطوير ملكتهم الذاتية في ميدان التفكير الرياضي، وتمهين القدرات الرياضية - المنطقية.

الأزمة في تربويات الرياضيات

Crisis In Math Education

طلبة اليوم (TIMSS) (TIMSS) Today's Students

يسود إجماع وطني على أن طرائق تعليم الرياضيات، في هذه الأيام، عقيمة وغير ذات كفاءة في إيصال المعلومات إلى الطلبة. وقد ألقى الضوء على هذه الطرائق التقليدية بواسطة النتائج التي استحصلت من التقييم الوطني للتطور التربوي National Assessment of Education of progress (NAEP) والدراسة المالية - الثالثة للرياضيات والعلوم Third International Mathematics Science Study (TIMSS) أظهر هذان التقييمان للمناهج الرياضية التقليدية التي اقترحت بالولايات المتحدة وجود عدد كبير من طلبة المدارس العليا الذين لا يمتلكون القدرة على إجراء عمليات حسابية بسيطة، وبالتالي لا يستطيعون التنافس على المستوى العالمي في هذا المضمار الحيوي. وأكد هذان التقريران وجود عجز ملحوظ في تعليم وتعلم الرياضيات بالولايات المتحدة، ونبه على انكاس تأثيراته السلبية على مستقبل بلدا.

ولغرض مواجهة هذا العجز، ينبغي تبني تغييرات منظمة ذات تأثير ملموس على كل من عمليتي تعليم وتعلم الرياضيات، على أن تكون هذه التغييرات شاملة وتركز على كفايات تطوير القدرة الرياضية لدى الطلبة والمعلمين.

إن جعل الرياضيات ذات معنى وتمتلك دوراً تطبيقياً بالصفة للطلبة - يستلزم إعادة تأسيس جميع الجوانب الخاصة: بتدريس الرياضيات، ومواد المناهج، والبيئة التعليمية، ومهام المعلمين، وطرائق تقييم الفهم الرياضي للطلبة.

افتقار الطلبة إلى الأسس الرياضية

يلاحظ وجود مشكلة متنامية تتعلق بتدني مستويات الإنجازات الرياضية لدى الطلبة الأمريكيين. ووفقاً للتقرير الصادر عن لجنة التقييم الوطني للتطور التربوي (NAEP) والذي عمد إلى مراقبة نتائج الاختبارات التي أجريت على حوالي 150 ألف طالب تتراوح أعمارهم بين 9، 13، 17، فإن نصف الذين وصلت أعمارهم إلى 17 عاماً فقط كانوا قادرين على حل المسائل الرياضية بنجاح حسب مستوى الدرس المتوسطة. فضلاً عن ذلك فإن التقرير الذي أعد بواسطة خدمات الاختبار التربوي Educational Testing Services (ETS, 1986) وبمعاون (بطاقة تقرير الرياضيات) أظهر أن حوالي 1.5 مليوناً من الطلبة المتدنيين والمتقدمين في المدارس الوطنية العليا كانوا غير قادرين افتراضياً على إجراء العمليات الرياضية البسيطة،

طلبة اليوم، الرياضيات، واحتياجات المجتمع Today's Student, Mathematics & Society Need

ينبغي لطلبة المدارس، في هذه الأيام، التهيؤ للعيش في مجتمع بحاجة إلى فهم عميق واهتمام بالغ بالمعلوم الرياضية. إن من الصعوبة بمكان، وإن لم يكن مستحيلاً. إدارة الواقع الذي يحيط بنا بدون حد قبول من معرفة، ومهارات، وتطبيقات رياضية. فلم يعد كافياً إتقان عملية احتساب مفردات قائمة التسوق. أو التأكد من موازنة الحساب الصرفي، حيث برزغت الحاجة الملحة لدى المجتمع إلى المزيد من طلبة الرياضيات الثانوية، الذين يمتلكون القدرة على تطبيق مهاراتهم الرياضية لحل المشكلات التي ترحب بها الأرض الواقع التي يعيشون عليها.

فعلى سبيل المثال، يمكن إقامة ارتباط بين مبادئ الاحتمالات والإحصاء مع الواقع العلمي، الذي يتطلب من الأشخاص جمع، وتسجيل، وتفسير وتحليل، والاتصال لعرض مجاميع البيانات التي تتطلبها عملية صنع القرار الذي يدير دفة حياتهم اليومية. أن تفسير دلالة الرسم البياني بوصفها جزءاً من متطلبات التشخيص الطبي، يمتلك تأثيراً ملموساً على اتخاذ القرار الطبي الذي يرتبط بصحة الإنسان ووجوده.

كذلك فإن المبادئ الأساسية لعملية العد والجبر تساعد على تيسير اتخاذ القرارات المالية الشخصية على أرض صلبة وواقعية. إنما استخدام التصميم الرياضي فيمد تقنيات الحاسوب بقاعدة علمية رصينة، تتضمن استمرار أنشطة البحث والتطوير بميدان عتاد الحاسوب Computer Hardware وبرمجياته Software والتطورات المستقبلية في دائرة شبكة الانترنت وخدمات الاتصال. أصبحت المهن والمناصب السائدة بميدان تقنيات الحاسوب والأعمال، والعلوم والهندسة تتطلب معرفة رياضية أكثر عمقا وشمولاً مما كانت تطلبه بالماضي. وفي ضوء ما قاله السناتور John Glenn، رائد الفضاء السابق، فإن الرياضيات والعلوم بتوفر المعرفة العلمية التي ستكون يحتاجها الجيل الجديد من المخترعين، والمبتكرين، والعاملين، في كل بلدان الأرض، إذا أرادوا حل الإشكاليات غير المنظورة، ورواية الأحلام التي ستحدد مستقبل الولايات المتحدة الأمريكية^(*).

(*) Before It's too late: A Report to the nation on mathematics and since teaching for the 21st Century (US department of Education, 2000, page 4)

الثاني عشر كانت في عام 2000 أكثر مما هي عليه عام 1990، بالرغم من زيادة الفجوة بين الطلبة البيض واللونين، والأسيان والبرتغال Hispanic حيث بقيت دون تغيير منذ عام 1990 (NCES, 2000).

تمييز خصائص المدارس ذات الإنجاز المنخفض والمرتفع Distinguish Characteristics of High & Low Achieving Schools

هناك جملة من الأسباب التي تكمن وراءها الإنجازات المرتفعة أو المنخفضة للمدارس المختلفة. فهل أن دائرة هذه الأسباب تعود إلى افتقار الطلبة إلى القدرة؟ أم إلى افتقار المعلمين إلى المحتوى المعرفي أو المهارات التعليمية المؤثرة؟ أم أنها نتيجة لأخطاء أولياء الأمور وطبيعة بيئة المنزل؟

يظهر في الجدول الآتي، والاستخلص من تقرير TIMSS، وصف لمجموعة من المتغيرات المعتمدة Dependent Variables والتي تصلح كمؤشرات أو خصائص للمدارس ذات الإنجاز المرتفع أو المنخفض.

استعرضت نشرة المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM News Bulletin, Volume 37, Issue 9, May/June 2001) مؤشرات دراسة TIMSS لمقارنة ومقابلة مستويات الإنجاز لعدة مدارس، ومدارس المقاطعات، لاستكشاف مجموع نقاط الإنجازات المتحققة لأفضل مدارس الولايات المتحدة.

وفرت هذه التحريات مؤشرات إيجابية قد ينجم عن تكاتفها وتكاملها حصول تحسن ملحوظ لإنجازات طلبة الولايات بميدان الرياضيات.

أكدت -كذلك- نتائج دراسة TIMSS بأن إنجاز الطالب ترتبط بشدة بمهارة معلم الرياضيات، ونوعية تعليم الرياضيات. بالرغم من أن عددا لا بأس به من طلبة الصف الثامن (في الولايات المتحدة) يتولى تعليمهم معلمون يمتلكون شهادات علمية في التربية أو اختصاصات أخرى - غير رياضية-.

وهذا يعني بأنه ينبغي أن يمتلك معلم مادة الرياضيات إجازة في الرياضيات أو في تربويات الرياضيات. أن تحسين نوعية تعليم الرياضيات في المدارس الثانوية الأمريكية سيستمر بوصفه تحدياً أساسياً لتقديم المزيد من التغيير المنظم بتعليم الرياضيات. إن زيادة ميزان دفعوات المعلمين، وتعديلات متطلبات منح الشهادات، وصلل برامج التدريب ما قبل - الخدمة وفي أثناء الخدمة، والتطوير المهني تعد العوامل الأكثر أهمية للارتقاء بإصلاح إعداد معلم الرياضيات.

ويفتقرون إلى المهارات الأساسية التي تتطلبها الحياة اليومية، لكثير من الوظائف المعاصرة، ومتطلبات الكفاءة الوظيفية، والتجارة، وشغل المواقع الوظيفية، والمهن.

برز تباين كبير في الرياضيات التي يتلقاها الطلبة بالمدارس على عموم رقعة الولايات المتحدة، وأظهرت المقارنات العالية بأن مستويات الإنجاز الرياضي للطلبة الأمريكيين تقع (بصورة ملموسة) خلف البلدان التي تنافسنا بالميزان الاقتصادي.

يضاف إلى ذلك وجود فجوة إنجائية واسعة بين الطلبة من مختلف الثقافات والمستويات الاجتماعية - الاقتصادية المتباينة للمجتمع. (Third International Mathematics & Science Study, 1999). وفقاً لمؤشر تقرير (TIMSS) - والذي عني بدراسة ومقارنة الإنجازات الرياضية لطلبة الصف الثامن في ثلاثة عشر ولاية أمريكية فيما بينها، وثمانية وثلاثين بلداً اشتركت بهذه الدراسة الدولية- فإن الطلبة الذين يقصدون المدارس في المقاطعات الداخلية للمدن من الأسر التي تمتاز بدخلها المحدود، والأقليات، استطاعوا الحصول على مواد وموارد رياضية أكثر من الطلبة في المقاطعات غير المدنية Non-Urban. ويظهر هذا الاختلاف أن الطلبة غير المستفيدين لم يتول تعليمهم معلمو رياضيات مهرة ومؤهلون، وإن محتوى الرياضيات التي تم تدريسها كانت - بصورة عامة- دون المستويات القياسية. كذلك فإن أبنية المدارس كانت غير ملائمة وتفتقر إلى البيئة التربوية التي تثمر (بصورة عامة) عن إنجازات إيجابية ملموسة. وبالإضافة إلى ذلك، فإن هؤلاء الطلبة شاركوا بشكل ضئيل في البرامج التي وضعت للطلبة الموهوبين، وأخذوا، بشكل ملموس عدداً أقل من المساقات الرياضية المميزة مما أخذها طلبة الصفوف المتوسطة.

تؤدي هذه العوامل إلى زيادة غيابات الطلبة، والتي ينجم عنها افتقار الطلبة إلى إمكانية تحقيق إنجازات إيجابية. وتتفاقم الأزمة نتيجة للشحة المتزايدة بالمعلمين المؤهلين لتدريس الرياضيات ووجود نقصان ملحوظ للموارد الخاصة والتفديرية المطلوبة لدعم الأنشطة الأكاديمية - المنهجية الإضافية، والبرامج التربوية المساعدة للأقليات، والبرامج التي تدعم مشاركة أولياء الأمور.

إن نتائج المسوحات التي قام بها المركز الوطني للإحصائيات (National Center For Educational Statistics (NCES) والمركز الوطني لتقييم التقدم التربوي، أظهرت وجود بعض التقدم لدى طلبة الولايات المتحدة. وإن مجموع النقاط لطلبة الولايات المتحدة بدرجات الصفين الرابع والثامن أظهرت تقدماً مستمرا خلال السنين العشر الماضية، أما مجموع النقاط للصف

تمييز خصائص المدارس ذات الإنجاز المرتفع و المنخفض

خلفية المنزل	تتألف هذه الفئة من متغيرات دالة على الموارد المادية ومعرفة القراءة والكتابة، في المنزل. وتحوي هذه الفئة على خمسة متغيرات هي:
	<ul style="list-style-type: none"> ■ عدد الكتب الموجودة في المنزل. ■ وجود مصادر تساعد على الدراسة (قاموس، منضدة دراسة، حاسوب) ■ ممتلكات المنزل. ■ مستوى المشاركة التربوية للأبوين. ■ عدد ساعات العمل بالمنزل.
ارتباط المنزل بالدرسة	تتضمن المتغيرات التي تتأثر بعوامل كل من المنزل والمدرسة، مثل طموحات الطالب وضغوط الابوين والأقربان للإنجاز.
حجم المدرسة وموقعها	تؤثر هذه المتغيرات على مستوى المدرسة، وتتضمن درجة الصفة المدنية Urbanicity للمدرسة وحجم المدرسة، والصفوف.
المنهج الاجتماعي للمدرسة	يتألف المنهج الاجتماعي للمدرسة من العوامل التي تفضي إلى بيئة تعليمية، آمنة، ومنظمة، ومثمرة. ويتضمن، أيضاً، مشاكل انضباط المدرسة، والتي تشمل المشاكل الإدارية كانتهاك رمز الرداء المدرسي، وأكثر الانحرافات السلوكية خطورة.
موقف الطلبة تجاه العلوم أو الرياضيات	تتألف هذه الفئة من عوامل مواقف الطلبة، والتي تشمل المواقف إزاء العلوم والرياضيات، والاعتقاد بفاعلية العلوم ونجاحاتها.
الأنشطة التدريسية في حصة العلوم أو الرياضيات	وتتضمن المتغيرات إلى تصف مظاهر غرفة التدريس، مثل تواتر التجارب في العلوم، ومعدل تكرار تفحص المعلم للواجب البيتي في الرياضيات.

شحة المعلمين The Teacher Shortage

تعاني النظم المدرسية في الولايات المتحدة من عجز كبير في معلمي المدارس الثانوية، وبالأخص في ميداني الرياضيات والعلوم. إن دنو الكثير من الكوادر التدريسية إلى سن التقاعد، والتقليص الرسمي لحجم الصفوف، والأعداد المفرطة للمهاجرين، وأولاد العائلات التي يكثر عدد أطفالها Baby Boomers، قد أورتت المدارس الأمريكية حاجة ماسة إلى عدد كبير من المدرسين الجدد خلال العقد القادم. لغرض تعميق فهمنا بأبعاد هذا المازق، ينبغي الأخذ بعين الاعتبار الأسباب التاريخية والسياسية التي تكمن وراء معاناة القطاع المدرسي لهذا الشعب من شحة المدرسين. خلال الكساد الاقتصادي لعقد الثلاثينيات، اجتنب العلماء المتميزون إلى مهنة التعليم إضافة إلى كونها إحدى المهن القليلة التي فتحت أبوابها للإثنيات والأقليات قبل صدور قانون الحقوق المدنية لعام 1964.

إن هذا الموجات المبكرة من المهنيين التي غزت نظم المدارس خلال بدايات الستينات لحين بزوغ أزمة وطنية جديدة، هي حرب فيتنام، نجم عنها أيضاً توجه كوادر متقدمة إلى مهنة التعليم بمدارس المتطوعين hand – to – staff وفي مجالات حساسة مثل الرياضيات والعلوم.

ازدادت مهنة عمل العنصر النسائي في غضون عام 1968، بصورة ملحوظة، مع تزويدهم بخيارات تطويرهم باتجاه مهنة التعليم، والتي أضحت خيارهم المهني بعد حين. وكذلك الحال بالنسبة للأقليات التي عمدت إلى اختيار التعليم مهنة لها، والتي استقطبت بشكل نشط إلى قطاع التجارة والأعمال. إن من الواضح إن شحة المعلمين أصبحت في هذه الأيام، أزمة كبيرة، بوصفها نتيجة لعدم قدرة مهنة التعليم على التفافس المتوازن مع جذب القطاع الخاص ببريقه الأخاذ. وفي الواقع، تتراوح الحاجة إلى المعلمين خلال العقد القادم بين 2-2.5 مليون (بمعدل يزيد على 200.000 معلم سنوياً) وفق ما ورد بالدراسة التي أعدتها الوكالة الوطنية للتعليم ومستقبل أمريكا National Commission on Teaching and America's Future (NCTAF). إن حوالي نصف هذا العدد من المعلمين سيكونون أقراناً تم إعدادهم لهذه المهنة، بينما ستأتي البقية من مرتجعات الذخيرة الطارئة من المعلمين، بالمقابل فإنه لا توجد أمانة على إمكانية عودة الذين تركوا هذه المهنة إلى العمل ثانية بهذا الميدان. وفي معظم الحالات فإن هؤلاء الأفراد يرون بأن أجورهم الحالية، وبيئة العمل، وفرص التطور هي أكثر قبولاً مقارنة مع أقرانهم الذين مكثوا في دائرة مهنة التعليم.

الذي ربما يمد أكثر الاحتياجات حدة في تعليم الرياضيات. مثال ذلك أن نتائج التحري الميداني لحوالي 1200 متقدم للوظيفة (تم قبولها ضمن هذا البرنامج خلال الستين الماضيتين) يمكن استخدامها لتحديد أي من هؤلاء المرشحين يمتلك بعض الاهتمام، أو الميل، أو الخبرة في الرياضيات. إن متابعة اختبار الكفاءة سيوفر مناخاً مناسباً لاختيار معلمي الرياضيات المحتملين للمدارس المتوسطة.

يمكن أن يعطى هؤلاء المرشحون سلسلة من المساقات الدراسية في مادة الرياضيات لاستكمال خلفيتهم العلمية وأحكام بناء مقومات المعرفة التي تكمن وراء مفاهيم الرياضيات لمناهج تدريس المدارس المتوسطة.

إن ربط البرنامج مع الأصول المناسبة لعلم التدريس Pedagogy، وطرائق تدريس الرياضيات سينتج عنه تحويل الزمالات إلى معلمي رياضيات متدربين تدريباً جيداً. تقدم حوافز مجزية للمعلمين المؤهلين والذين يمتلكون القدرة على تعلم محتوى المجالات المتخصصة.

تقدم مستويات وظروف عمل تنافسية، وتعيين أشخاص مؤهلين من قطاع الصناعة. فعلى سبيل المثال، يمين برنامج تدريب معلمي الرياضيات - المتوسط Mid - Career Mathematics Teacher Training Program في كلية المدينة في جامعة مدينة نيويورك، ويختار المرشحون من قطاع الهندسة والأعمال ممن يمتلكون خلفية رياضية رصينة، ويرغبون بالدخول إلى ميدان مهنة التعليم. وبإشراف برنامجاً تدريبياً لتأهيلهم ليصبحوا معلمين فاعلين خلال مرحلة الحصول على درجة الماجستير Masters'Degree.

إتاحة الفرصة لبعض المعلمين المتقاعدين الأكفاء لجني مبالغ ضريبية إضافية على مواطنيهم لتعليمهم الجزئي (مثال، 3/5 برنامج)، وتوفير حوافز للمعلمين المؤهلين في موضوعات مهمة لإبقائهم في التعليم في الأماكن الأكثر حاجة.

إقامة برنامج توظيفي مشدد مع توفير حوافز مناسبة مثل علاوات السكن، وتعميم مبالغ كلف الانتقال، وتقدير ومكافأة الأداء الأمثل في تخصصات الكلية الرئيسية في نطاق الحاجة (مثل الرياضيات/العلوم).

إنشاء برنامج جديد لنصح المعلم يتم من خلاله تقديم العون للمعلمين خلال سني العمل الأولى وتذليل العقبات التي تحيط بعملية التعليم.

إعداد نشرة لمهنة المستقبل Career Bulletin Board على

لجأت جملة من مدارس المقاطعات (في محاولة لإيجاد حل ناجح للحاجة المتزايدة) بإشغال مناصب التعليم بواسطة معلمين لا يمتلكون تأهيلاً أو ترخيصاً، أو يقومون بتعليم مقررات دراسية خارج حقل اختصاصهم. وقد ازداد بشكل ملحوظ - عدد الشهادات المؤقتة والترخيص الصادرة إلى معلمين غير مرخصين أو محولين للتعليم في الصفوف خلال السنين الأخيرة، وفي الوقت نفسه فإن حاجة الطلبة إلى مستويات متقدمة من مساقاته الرياضيات في المدارس الثانوية بدأت بازدياد بشكل ملحوظ.

إن شحة المعلمين هي أكثر حدة في المناطق المدنية من البلاد حيث يزداد عدد الطلبة، وهناك حاجة كبيرة لمعلمين وكوادر متخصصة لكي يشغلوا الفراغ الذي تشكونه عدد كبير من المدارس. يضاف إلى ذلك أعراض كثيرة من المعلمين عن التدريس في المدارس المدنية نتيجة لتعدد المشاكل الاجتماعية والتعليمية الموجودة فيها. من أجل هذا تعاني قطاعات المدارس (بعموم الولايات المتحدة) من مشاكل وعقبات كبيرة إزاء توفير مناخ مناسب لاجتذاب التخصصين بالرياضيات إلى مناصب وظيفية بأجور مدنية في أسواق العمل التي تديرها أنشطة التنافس والتقنيات السائدة بالعصر الراهن.

الحلول المحتملة لشحة المعلم Possible Solutions to The Teacher Shortage Problem

بالرغم من عدم توفر حلول شاملة وموضوعة لمسألة شحة المعلم فإن هناك جملة من البرامج المطروحة والاستراتيجيات التي يمكن اعتمادها للتغلب على هذه المشكلة أو احتوائها.

إن الاستراتيجيات والبرامج المدرجة فيما يأتي على رغم كونها مؤقتة ومرحلية إلا أنها يمكن أن تؤدي إلى الوصول لحلول للمشكلة يطول منالها.

توظيف معلمين أجانب لملء الشواغر الحاصلة لحين إيجاد البديل الدائمة، فعلى سبيل المثال إن برنامج معلمي العلوم والرياضيات النمسوي والذي بدأ العمل به في كلية المدينة بجامعة المدينة في نيويورك، والذي هو الآن في سته الرابعة، ويشمل المعلمين الذين يرغبون بالبقاء لفترة أطول تزيد على سنتين أو ثلاث سنوات وقد تم نقل هذا الأسلوب في جملة من المدن الأمريكية وبلدان كثيرة أخرى لتجاوز الشحة الحاصلة في الملاكات الرياضية.

تقديم مشروع مثل برنامج زمالات التعليم لمدينة نيويورك New York City Teaching Fellows Program،

الرياضيات والعلوم حيويان وأن هناك صلة بينها وبين مفردات الحياة اليومية، بالرغم من التعارض الداخلي والخارجي، والضغوط التي قد تؤدي إلى تثبيط هم الطلبة عن الاستمرار في دراسة الرياضيات. إن المعاني الكامنة وراء هذا الأمر، تبدو واضحة، وأن الطرق التي تدرّس بها الرياضيات يجب أن تتغير. وتبرز مسألة مسؤولية المعلم بوصفها عنصراً جوهرياً لتمهيد التغييرات المنظمة بالطريقة التي تكون فيها عملية التدريس مرتبطة بالطلبة. فإذا كان تعلم الرياضيات وتعلمها يهدف إلى جذب الطلبة، فإن المعلمين بحاجة إلى خلق بيئة صافية تشجع التطور الرياضي لجميع الطلبة قاطبة.

العدالة Equity

إن مبدأ العدالة في تربيوات الرياضيات (NCTM, 2000) يدعم الاعتقاد بأن جميع الطلبة قادرين على تعلم مادة الرياضيات. فضلاً عن ذلك، فإن هذا المبدأ يتطلب توقعات كبيرة لجميع متعلمي هذه المادة.

وفي أحوال كثيرة، يعمل المعلمون والمدرّسون إلى أدنى التوقعات للطلبة الذين يعيشون في فقر، والطلبة الذين يصنفون بوصفهم متعلمين للغة الإنكليزية (اللغة الإنكليزية كلغة ثانية)، والطلبة ذوي الاحتياجات الخاصة، والطلقات، وطلبة الأقليات. وبأي حال من الأحوال، فإن التوقعات تزداد وتنمو لصالح هؤلاء الطلبة لتتميز العدالة الرياضية، وتعد توقعات المعلمين العامل الوحيد الأكثر أهمية بمضمار إنجازات الطلبة، ولذا فإنها بحاجة إلى عناية خاصة ومتأنية.

ينبغي أن تبلغ التوقعات المرتفعة لجميع الطلبة بواسطة المعلمين شغوباً ومعنوة، خلال الفصل الدراسي الذي يمتد على طول السنة الأكاديمية. ويستطيع المعلمون تبليغ هذه التوقعات خلال التفاعل والتدريس داخل غرف الدرس، وترجمتها ميدانياً عن طريق التعليقات، والملاحظات، ومشاهدة تقارير واختبارات وامتحانات الطلبة، عندما يتم تعيين سجامهم التعلم التعاوني للطلبة، وعندما يقام حوار مباشر مع الطالب، وعند تفاعلهم مع البالغين في دائرة حياة الطالب.

يمكن أن تحقق التوقعات المرتفعة - جزئياً - من خلال البرامج التربوية التي تحفز الطلبة وتشجعهم على تقدير أفعليهم وفائدة التعلم الرياضي الداعم لتوقعاتهم وفهمهم.

إن التوقعات المرتفعة ضرورية بيد أنها ليست كافية لتحقيق الأهداف للبيئة المدرسية التي أحكمت حدودها والتي تدعم وتشجع العدالة بين جميع الطلبة في تربيوات الرياضيات. ينبغي على كل طالب أن يعيش برنامجاً أو منهجاً تفصيلياً

شبكة الإنترنت لضمان ملائمة حصول المعلمين على العمل المناسب.

تحويل النظم المدرسية للإعلان عن الوظائف المطلوبة في فترة مبكرة من السنة الدراسية للسنة المقبلة. بينما يلاحظ أن معظم القاطعات تنتظر لحين نهاية فصل الربيع أو الصيف لتعيين المعلمين.

الأهداف والتحديات لمعلمي الرياضيات الثانوية هذه الأيام

Goals and Challenges For Secondary Math Teachers Today

جعل الرياضيات سهلة المنال

Making Math Accessible

وفقاً المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات فإن العدالة لمادة التربية هو العنصر الجوهري لهدف رؤية مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية (NCTM, 2000). بالرغم من كون الخيط العام هي الرياضيات، فإن من الواجب على مجتمعنا أن يعي ويكون أكثر حساسية عند معالجة موضوع العدالة الخاص بتعليم الرياضيات.

إن مناهج الرياضيات ينبغي أن تعكس حقيقة عدم تساوي قدرات الطلبة وموابعهم، لأنهم يتعلمون ويتمثلون المعرفة بطرق متعددة، ويمثلون أنماط تعلم متباينة. وقد تم إنشاء عدد كبير من البرامج النموذجية التي تجسد معايير NCTM، وتكييفها، وتعديلها، تمهيداً لتطبيقها في الصفوف الدراسية بعموم الولايات المتحدة.

وبالرغم من الأهمية التي تمتاز بها هذه التغييرات، فليس هناك ضمانات بأن أي من هذه نماذج من المناهج الدراسية ستكون شاملة، أو مدعومة، أو متكاملة بملاقتها مع مدخل منصف لجميع الطلبة.

وبالرغم من التعديلات الجارية على مناهج الرياضيات لتغطية النطاق الشامل للمحتوى والطرائق الرياضية فإنها ليست كافية. ويبقى الطلبة - هذه الأيام - يمينين عن المشاركة المتساوية في العملية التعليمية.

لقد أظهرت وثائق البحوث أن الطلبة لا يتلقون قدرًا كافيًا من انتباه المدرس واهتمامه، ولا يميلون إلى استعراض المواد التي يدرسونها والتي تعد وثيقة الصلة وظيفياً بحياتهم اليومية، كما أنهم لا يتوقعون أو يشجعون على مواصلة رياضيات ذات مستوى أعلى (مجلس التطوير والبحث التربوي، 1990).

من أجل هذا ينبغي تشجيع جميع الطلبة على إدراك أن

وقارئات المراقب ستساعد الطلبة الذين يمانون من ضعف بحاسة الإبصار. وإن برمجيات التمييز/ الإنتاج الصوتي ستوفر للمعلمين القدرة على الارتقاء بالتفكير الرياضي للطلبة، حيث بدونها لا يمكن لهم المشاركة بأفكارهم بالطريقة التقليدية في البيئة الرياضية.

تفيد التقنية بشد اهتمام الطلبة الذين لا تثير طرائق التعليم/ التعلم التقليدية فيهم حافزا على تعميق فهمهم الرياضي، من أجل هذا ينبغي أن تكون سهلة المثال لجميع الطلبة، على أن يوفر المعلمون لطلبتهم فرصا لاستكشاف، وتحري، واكتشاف الأفكار الرياضية المهمة والمشوقة من خلال البيئة التي توفرها التقنية.

القلق الرياضي Math Anxiety

يعاني كثير من الناس في مجتمعنا ذي التقنيات العالية من شعور مقلق، وخوف، عندما يجابه مادة الرياضيات، وسواء عمدنا إلى تصنيف هذه الظاهرة بوصفها تفاد للرياضيات Math avoidance، أو عصاب رياضي Mathphobia، أو ما يعرف بالقلق الرياضي، والذي يعكس واقعا ملموسا للآيين من البشر التي تعاني من هذه الظاهرة وفقا لما ذهب إليه الطبيب شيلا توبياس Sheila Tobias فإن القلق الرياضي هو عبارة عن إخفاق بالجرأة الشخصية في مواجهة الحاجة إلى إجراء حسابات أو تحليل مسألة تتضمن أرقاما، أو هندسة، أو مفاهيم رياضية.

إن هذا القلق هو استجابة مع الزمن تسبب ضغطا مستمرا في غرفة تدريس الرياضيات عندما تعطي الاختبارات باستمرار تحت وطأة الوقت المحدد، أو في المنزل حيث ينشأ التنافس مع الأقران، أو في مكان العمل.

يحمل القلق الرياضي بآثاره إلى الذكور والإناث معا، إلا أن تأثيراته على الإناث تكون اشد وضوحا. وبصورة عامة تعاني الإناث الكثير من الضغوط النفسية عند تنفيذ أمر معتبر، في ثقافتنا (وليس بالضرورة في الثقافات الأخرى)، كوجودهن في "ميدان للرجال". بيد أن التاريخ يبرهن أن الكثير من النساء قد نجحن في الرياضيات وحول أخرى تستند إلى الرياضيات.

ينبغي على المعلمين تمييز بعض السمات، والأعراض، والمؤشرات المرتبطة بقلق الرياضيات التي تظهر على طلبتهم بين الحين والآخر، فلي سبيل المثال يعاني بعض الطلبة من عدم القدرة والقلق إزاء حل المسائل اللفظية Verbal Problems فضلا عن شعور بعض الطلبة بقشعريرة مستمرة بردا شديدا أثناء الاختبارات والامتحانات الموجزة.

للرياضيات يوفر له مناخا مناسبيا لإشباع فضوله، واهتماماته، وتعلمه لهذه المادة، شريطة أن يدعم هذا البرنامج الخبرة التربوية السابقة، والمتانة الأكاديمية، والاهتمامات الحياتية.

يحتاج بعض الطلبة دعما إضافيا لكي يحققوا التوقعات المرتفعة في الرياضيات، فمثلا الطلبة الذين يصنفون كمتعلمين للغة الإنكليزية (ESL) قد يحتاجون إلى مساعدة إضافية لكي يتحقق الهدف الخاص بالمعرفة الرياضية. وقد يحتاج بعض هؤلاء الطلبة إلى نسخة مترجمة من أدوات التقييم لكي يستطيعوا تكيفها مع حاجاتهم، فمثلا، إذا كان يتم درجة معرفتهم الرياضية بالإنكليزية فقط، فلا يمكن تقييم قدراتهم وخبراتهم الرياضية بصورة دقيقة.

بعض الطلبة ذوي القدرات المتواضعة قد يجعلهم بحاجة إلى مزيد من الوقت لإكمال واجباتهم المدرسية، أو يكونوا بحاجة إلى المزيد من وسائل الإيضاح المرئية المثيرة مثل الرسوم البيانية، أو النشرات، أو عروض تصميمية باستخدام جهاز الإسقاط العلوي Overhead projector وهؤلاء الطلبة بحاجة إلى طرائق تعليمية - سمعية - أكثر من حاجتهم إلى مادة مكتوبة أثناء تعلمهم. وتظهر الحاجة إلى موارد إضافية وتكميلية لدعم هؤلاء الطلبة، مثل برامج لمناهج دراسية إضافية، والمزيد من التناصح والتدريب الجماعي، أو تدريب مدرسي إضافي، كذلك فإن الطلبة المتميزين والموهوبين بمادة الرياضيات قد يحتاجون إلى برامج إثرائية أو موارد إضافية تحفهم وتشغلهم.

فمثلا، يوفر نادي الرياضيات لهؤلاء الطلبة وغيرهم من الشرائح الطلابية فرصة مناسبة لاستكشاف المواضيع الرياضية التي لا تناقش داخل الصف الدراسي في الحالات الاعتيادية.

يمكن تحقيق العدالة بالرياضيات، أيضاً، من خلال التوظيف المؤثر للتقنية، فتوفر الآلات الحاسبة والحواسيب لجميع الطلبة فرصة لتحري حشد كبير من المسائل والواقف الرياضية. يضاف إلى ذلك أن البرامج التدريبية - الحاسوبية يمكن أن تصمم لمساعدة الطلبة على صقل وترصين مهاراتهم وتعميق التدريس الرياضي.

يعد التعلم الحاسوبي للتكيف Computer Adaptive Learning كمعدات الاتصال المتخصصة (AAC) من الأدوات ذات الكفاءة في الارتقاء بقبليات الطلبة الذين يمانون من اعتلال بالنطق واللغة. وتساعد معدات الإصغاء للمساعدة Assistive Listening Devices (ALD) الطلبة الذين يمانون من ضعف شديد بالسمع، كذلك فإن تكبير مساحة مراقب (شاشة) الحاسوب، وخدمات الفيديو الوصفية،

Cooperative Learning. إن المشاركة الفعالة للطلاب تثير مكان القدرة لديه على إدراك مفاهيم الرياضيات، ويضاف إلى فوائد التعلم التعاوني تطوير مهارات التفكير والاستنتاج، وزيادة احترام الذات، وتحسين المواقف وحب الفهم باتجاه الأقليات والثقافات الأخرى، وقبول الطلبة الذين ينتمون إلى التبار العام. اثبت نماذج التعلم التعاوني فعاليتها في الصفوف غير المتجانسة Heterogeneous. إن من الضروري الانتباه إلى وجود فروق بين العمل بمجاميع صغيرة، والتعلم التعاوني، فالفكرة الأساسية لأنموذج Model التعلم التعاوني تركز إلى حقيقة أن كل طالب في المجموعة التعاونية عرضة للحاسبة على النتائج النهائية للمجموعة، وأن على الطلبة العمل سوية كفريق واحد لضمان النجاح.

ومع ذلك، فبالرغم من تنظيم مجموعة العمل الصغيرة ليعملوا معاً، فإن كل طالب سيكون عرضة للحاسبة عن ذاته فقط ذكراً كان أم أنثى. ومن ثم فإن أعضاء المجموعة الصغيرة قد يكونون أكثر تعاوناً وتشاوراً فيما بينهم، بيد أنه لا توجد سوى النتائج الفردية في ميزان التقويم مع غياب الأهداف المشتركة.

إن تدريس الرياضيات الذي يستثمر مجموعة متنوعة من التطبيقات، وجملة من العروض يساعد على تطوير نمو الطالب في كل من المجالين الإدراكي Cognitive والوجداني Affective.

بصورة عامة، تركز الرياضيات على تمثيل ونقل الأفكار والعلاقات التي تربط بالأرقام، والمكان، والبيانات. وهناك وفرة من الأنشطة والفعاليات التربوية التي تدعم هذه الفكرة. فعلى سبيل المثال، قد يعمد الطلبة إلى تفسير اهتماماتهم المفاهيمية بصورة رمزية، من ثم يقترحون وصفاً لفظياً لمواقف مشابهة.

قد تتألف الأنشطة الأخرى من اختيار الأنموذج الأمثل لتوضيح علاقة ما، باستخدام الحاسوب (أو الآلة الحاسبة) بطرق فريدة للبحث في مسألة ما، وكتابة مداخل السجلات التعليمية، وإدراج تطبيقات على الحواشي، أو الحدس الشخصي لشرح ملاحظات في الرياضيات.

ينبغي على المعلمين تطويع التدريس بالشكل الذي يجعله مناسباً للتطورات المحتملة في تعلم الطلبة. وبصورة عامة، يكتسب الطلبة فهماً أكثر عمقا بالرياضيات عندما يمنحون الفرصة لتطوير معرفتهم الرياضية من خلال: الخبرة المباشرة، والاستنتاج، وحل المسائل، والاستكشاف، وتبادل الآراء والمعلومات مع الغير. إن هذا النوع من التدريس يشجع تفاعل

ينبغي إعادة التفكير في تبني مفهوم أن الجواب الخاطئ يعد جواباً سيئاً، وأن الجواب الصحيح هو جواب جيد. وتظهر الحاجة إلى التأكيد على العمليات والآليات بدلاً من النتائج. إن التشجيع الصادر عن المعلم، وبيئة التنشئة، والسماح بالاستمرار في السير وفق القدرات الذاتية، سيساعد الطلبة الذين يعانون من القلق الرياضي بالتغلب على وساوسهم وطرده من نواتهم وحياتهم اليومية.

زيادة تماسك الرياضيات

Concretizing Mathematics

يدعم كثير من الباحثين بمجال تربويات الرياضيات (اتحاد منتصف الغرب لتعليم الرياضيات والعلوم Midwest Consortium for Mathematics Science Education) فكرة أن تركيز الاهتمام بموضوع الميكانيك، والإجراء الرياضي يشوش ويكبح التعلم الهادف، وقد يؤدي إلى انتشار مبادئ خاطئة حول قدرة ومحدودية طرائق التعليم الرياضي.

عندما يمنح الطلبة فرصة المشاركة الفاعلة في عملية التعلم، يصبحون أكثر ميلاً لتطوير مرادهم الشخصي من الأفكار والمفاهيم الرياضية، وسيكتسبون - نتيجة لهذا الأمر - شعوراً ذاتياً بامتلاكهم مفاهيم أو مواضيع رياضية، مما يقوي قدرة الطالب.

إن المعلمين الذين سيساهمون في هذه الاستراتيجيات التعليمية سيؤدون وظيفة مسهل Facilitator إضافة إلى دوره كمعلم. إن الفرق الجوهرية بين دور المعلم ودور المسهل يكمن في أن الأول يفرس المعلومات في الطلبة من خلال: الإعلام، والتوضيح، والتحدث، محاولاً جعل المعلومات أكثر وضوحاً (بقدر الإمكان) للطلبة. بالمقابل فإن الثاني يرشد، ويقود، وينصح الطلبة الذين قد يملطون آخر الأمر إلى حدسهم، وبراهينهم، واستنتاجاتهم الذاتية.

لا تقتصر عملية تعليم الرياضيات على البحث عن سبل وضع القواعد، والتعاريف، والطرق الإجرائية كي يستظهرها الطلبة عن ظهر قلب، ولكن تهدف إلى تعهد الطلبة والأخذ بيدهم كمشارك فعال بعملية التعلم. إن بعض الاستراتيجيات التدريسية التي ينصح بها لدعم بيئة التعلم الفعال Active Learning في صف الرياضيات المدرسي، هي استخدام المواد المحسوسة Concrete Materials وتشجيع الطلبة على مناقشة الأفكار الرياضية، وعلى الكتابة التي قد تتضمن تعلم أسلوب إعداد السجلات التعليمية Journal، والمساهمة بتبادل الخبرة والأفكار من خلال مجاميع التعلم التعاوني

المبكرة، فإن الاستخدام المؤثر للمواد المحسوسة قد يلعب دوراً مهماً، كذلك، في مراحل التدريس المدرسي المتوسط والثانوية. يعدد معلمو الرياضيات بالمدارس الثانوية، في معظم الأحيان، إلى نقل المعلومات عبر أنموذج تقليدي مجرد للتدريس دون الأخذ بنظر الاعتبار الخبرة المتأسكة والمترابكة ولغرض تلبية حاجات جميع الطلبة التعليمية والرياضية، يبدو من الضروري على المعلمين أن يكونوا أكثر مرونة، اخذين بنظر الاعتبار وفرة الأساليب التعليمية للطلبة والتي قد تتضمن استخدام المواد التشكيلية.

أظهرت البحوث المستفيضة أن الاستخدام الصحيح والمناسب للتقنية يساعد في التطوير المفاهيمي للطلبة على استيعاب مادة الرياضيات، ومهارات حل المسائل. وعليه فإن الاستخدام المناسب للحواسيب والآلات الحاسبة بات ضرورياً في غرفة تدريس الرياضيات.

وتتوفر جملة من برمجيات الحاسوب، الجديرة بالاهتمام، التي تستثمر الإمكانات المتاحة عليه، فتحاكي بعضهما العالم الواقعي، والتطبيقات والنمذجة الرياضية، فعلى سبيل المثال، فإن برمجيات الحاسوب الديناميكية مثل:

كراسات الرسم الهندسي The Geometric Sketchpad
(Key Curriculum Press)
التخيل الهندسي The Geometric Supposer (Sunburst)
مجموعات التماثل

Maple
Mathematica.

تساعد الطلبة على الإدراك المفاهيمي للتجريد الهندسي، ومفاهيم الجبر عبر توحيد شكلي لما هو في متناول اليد مع ما هو في متناول الفكر. يضاف إلى ذلك أن الآلات الحاسبة العلمية والرسومية تحوي نظم المنطق الجبري (مبنية بداخلها) والتي توفر للطلبة فرصة تقدير الرياضيات من خلال التعلم المرئي Visual learning. بالحقبة، إن كثيراً من أنوات التقييم الرياضي، مثل اختبار الذكاء أو الكفاءة المدرسية Scholastic Aptitude Test (SAT) بحاجة إلى استخدام آلة حاسبة رسومية أو علمية.

ولا زالت التقنيات الحديثة تمر بدراسات وتطويرات متعمقة، باستمرار، وإن حجماً كبيراً منها يمتلك تأثيراً واضحاً على عمليتي تعلم وتعلم الرياضيات، وسوف تستمر بعمل المزيد للأجيال القادمة.

الطالب، والذي يعزز نمو: الإدراك، واحترام الذات، والفترة الرياضية. فضلاً عن ذلك أن هذا النوع من التدريس لا يتطلب بالضرورة ولا يفقد الطلبة بتدوين، أو خزن المواد التي تقع خارج دائرة فهمهم.

إن الاستخدام المؤثر للنماذج والمواقف الواقعية وتوظيف المواد المحسوسة، والتعلم التعاوني، واستكشاف المسائل، والمناقشات داخل غرفة الدرس، سيمكن الطلبة من إدراك وتقدير فائدة وجمال الرياضيات، والذي سيسهم بتطوير ونمو ملكة الإدراك لديهم.

باختصار، أن البيئة التعليمية والتي تمتاز بصلتها الوظيفية - الوثيقة مع المواقف السائدة بالعالم الواقعي ستشجع الطلبة على المسائل الواقعية، والتي تتطلب براعة ودهاء، وتمكس بوضوح استخدام الرياضيات في الحياة اليومية.

دور المواد التي بمقتناول اليد

Materials: إن للمواد التي تقع بمقتناول اليد، أو المواد اليدوية. هي عبارة عن أشياء ملموسة Tangible Objects التي يستطيع الطلبة استكشافها، وتنظيمها وتحريكها، وتجميعها، وتوزيعها، واستخدامها وسيلة للقياس عند إنشاء أنموذج المفاهيم والمسائل الرياضية. فعلى سبيل المثال، إن استخدام التشكيلات الجبرية Algebra Tiles قد يسهم في مساعدة الطلبة على فهم مجموعة متنوعة من المفاهيم الجبرية، والتي تتضمن نظرية فيثاغورث.

إن استخدام اللوحات الأرضية Geoboards قد يوفر للطلبة فرصة استكشاف مجموعة من الأشكال الهندسية -ثنائية الأبعاد 2 Dimensional. والبيئة التربوية التي تدعم استخدام الألعاب التشكيلية Manipulative قد يساعد على تحسين فهم الطالب وإنجازاته المدرسية، شريطة أن يقام ارتباط واضح ووثيق بين المواد المستخدمة والمفاهيم الرياضية المحددة، والإجراءات التي يعمد الطلبة إلى ترميزها.

إن من الضروري على المعلمين مد يد للطلبة لتحقيق الانتقال من دائرة الخبرة المحسوسة إلى دائرة الرموز الرياضية المجردة. إن عملية الانتقال من المحسوس إلى المجرد هي سلسلة متصلة من Continuum من المحسوس أو أنموذج ما هو بمقتناول اليد، إلى شبه المجرد Diagrammatic، إلى شبه المجرد Semiaabstract أو الرموز التي لا تشابه الألعاب التشكيلية الذي تمثله، إلى المجرد الذي قد يوضح صيغة رياضية، أو معادلة أو برهان.

وبالرغم من استخدام المواد التشكيلية في المراحل الدراسية

إلى الصف لثامن، الصف التاسع إلى الصف الثاني عشر، وتحتوي كل منها 12-14 من المعايير.

أدرجت المعايير الخاصة بالرياضيات المدارس الثانوية: حل المسائل، التواصل، والتعليل، والصلات، والأعداد والعلاقات، ونظم الإعداد، ونظرية العدد، والحسابات والتقريب، والأنماط والدوال، والجبر، والإحصاء، والاحتمال، والهندسة، والقياس.

تصف الوثيقة الثانية للمعايير (المعايير المهنية لتعليم الرياضيات (1991)) الطرق التي يستطيع التربويون اعتمادها في عرض الأنشطة الرياضية والتي تتسجم مع روح، ورؤية، ومقاصد معايير المناهج والتقييم. فضلا عن أن هذه المعايير قد صيغت وفقا للمطالب الأساسية التي حددها التربويون، مثل اختيار اختبارات أنشطة رياضية ذات معنى، واستهلال وتشجيع الحوار اللفظي الذي يرتبط بهذه الأنشطة، والمحافظة على بيئة تركز على الطالب باتجاه التعلم.

كذلك تدعم المعايير مبدأ تدريب المعلمين، والتطوير المهني، والتقييم المستمر لطرائق تعليم الرياضيات.

تصف الوثيقة الثالثة للمعايير (تقييم المعايير للرياضيات المدرسية (1995)) فلسفة تقييم الممارسات التي تم تركيزها، والتي ينبغي على تربويين الرياضيات الأخذ بها لدعم التطورات في القدرة الرياضية لجميع الطلبة (NCTM, Making A Living, Making A Life, 1997).

لا تكفي الامتحانات السريعة والاختبارات في عملية تقييم الرياضيات، وتؤكد معايير التقييم، وتدعم، استخدام نماذج تقييم متعددة لتحديد ما يتعلمه الطلبة. فمثلا توجد مجموعة كبيرة من المؤشرات الاختيارية التي تساعد المعلمين على التحقق من قرارات طلبتهم وتقدمهم، وإنجازاتهم. فقد تتضمن أدوات التقييم الطرق التي يتبناها الطلبة في حل مسائل الواجبات المنزلية، المناقشات العائرة بين طالب وآخر، المفكرات الشخصية لتعلم الرياضيات والتي قد تعكس الإنجاز التحريري للطلاب، و شريط الفيديو Video-taping التي توفر للمعلمين فرصة إضافية لتحقيق البصيرة بقرارات الطلبة على التفكير، ومستويات فهمهم.

فضلا عن ذلك، توفر عملية تقييم التحصيل في الرياضيات للطلبة الفرصة لبيان وعرض أفكارهم على الورق. ونتيجة لذلك يستطيع المعلمون كسب القدرة على التعمق بفهم أساليب تعلم الطلبة، وسيكونون قادرين على توفير تقدم الطلبة على أسس أكثر شمولية. تعزز معايير التقييم، أيضا، مبدأ العدالة التربوية Educational Equity، بمعنى آخر، توقعات مرتفعة لجميع الطلبة. لذا ينبغي على المعلمين إدراك أساليب التعلم للطلبة،

المعايير: اثنا عشر عاما من النمو

The Standards: Twelve Years of Growth

المعايير القديمة The Old Standards

في عام 1989، عمد المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM) إلى إصدار ثلاثية من وثائق المعايير (لفرض إحداث تغيير وتقديم في الإصلاح المنظم لتعليم الرياضيات) التي وصفت بإسباب الأهداف العالمية لمناهج الدراسة، والتعليم، والتقييم في الرياضيات المدرسية K-12.

إن هذه الوثائق والمعروفة بمعايير NCTM تتألف مما يلي:

1. معايير منهج وتقييم الرياضيات المدرسية Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989)
2. المعايير المهنية لتعليم الرياضيات Professional Standards for Teaching Mathematics (1991)
3. تقييم المعايير للرياضيات المدرسية Assessment Standards for School Mathematics (1995)

استخدمت هذه الوثائق الثلاثة، منذ قرابة اثني عشر عاماً، بوصفها قوة دافعة وإطار عمل للتطوير اللاحق للجهود الوطنية في المدينة والولاية للارتقاء بالرياضيات المدرسية في الولايات المتحدة. وقدمت هذه الوثيقة، على وجه التخصص، رؤية واضحة عن الكيفية المطلوبة لتعليم الرياضيات وتعلمها، ورسمت الأهداف الخاصة، وساعدت بالتأثير على التغيرات الطارئة في تعليم الرياضيات بالصف المدرسي على عموم الولايات المتحدة. بصورة عامة، لم يرد من المعايير أن تكون دليلاً لطرق إجرائية تعتمد في تعليم الرياضيات، بل كان هدفها الأساس منصبا على تقديم رؤية تتألف من الأهداف التي يمكن في خلالها اختبار: مناهج الرياضيات، وتعليمها، وتقييم ممارساتها. ولقد تم إعداد هذه الوثائق الثلاث، وتحريرها من قبل فريق من الرمين المهنيين بمادة الرياضيات، من بينهم معلمين، واستشاريين، وباحثين، ورياضيين، وأساتذة جامعيين باختصاص الرياضيات وتربويات الرياضيات.

تصف الوثيقة الأولى للمعايير (معايير منهج وتقييم الرياضيات المدرسية (1989)) الموضوعات الأساسية في الرياضيات، والتي ينبغي على الطلبة إدراكها وتطبيقها، يضاف إلى ذلك تؤكد المعايير على أهمية المهارات الموجهة عملياتيا Process-Oriented مثل حل المسائل، ومهارات التعليل، والتواصل في الرياضيات، وإنشاء الصلات.

تم تقسيم هيكلية المعايير إلى أصناف حسب مستويات الراحل، مثل: روضة أطفال إلى الصف الرابع، الصف الخامس

التدريس الرياضي، وإرشاد أنشطة التقدم والتحديث السائدة في: الأطر المنهجية، والتقييمات، ومواد التعليم، ولتشجيع الأفكار واستمرار الحوار بمستوى الوطن والولاية، وبالمستوى المحلي.

بات من الضروري جدا على معلمي الرياضيات الثانوية تطوير منظور شامل لتعليم الرياضيات وتعلمها. فعلى سبيل المثال، ينبغي على مدرسي المدارس الثانوية عدم الاقتصار على مراعاة مجال وتتابع اللقرات المعتمدة في غرفة تدريسهم الحالية، بل ينبغي عليهم الأخذ بنظر الاعتبار الرياضيات التي تم تعليمها سابقا للطلبة في كل من المدارس الابتدائية والمتوسطة، والرياضيات التي سدرسها الطلبة في المراحل والمستويات الدراسية اللاحقة في المدارس الثانوية والتعليم الجامعي.

سوف هذا الأمر للمدرسين إمكانية معالجة الرياضيات (التي يقومون بتعليمها) بمنظور أكثر شمولاً. وفصلاً عن ذلك، سيكتسب المعلمون مستويات متزايدة من الحساسية باتجاه الاحتياجات الرياضية، وأساليب التعلم الخاصة بطلبتهم.

نتيجة لتنظيم "مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية" باستخدام مجال بأربعة مراحل، (ما قبل رياض الأطفال إلى الصف الثاني، والصف الثالث إلى الصف الخامس، والصف السادس إلى الصف الثامن، والصف التاسع إلى الصف الثاني عشر)، وستوفر للمعلمين إمكانية إجراء بحوث - غير رسمية لمواضع الرياضيات بالصفوف الأولية، ويقومون فيما بعد بتنظيم تدريسهم لمواجهة الحاجات الخاصة بطلابهم. ولقد تم إعداد مجموعة واضحة من التوقعات لكل نطاق من الصفوف تعالج كل جزء من محتويات المعايير، وكذلك أهداف العمليات من العلم، أيضاً.

إن المعايير هي عبارة عن أوصاف لما ينبغي لتدريس الرياضيات أن يتيح للطلاب أن يعرفوه ويعملوه، وتصاحب بكل ذي قيمة في مضمار تعلم الرياضيات المدرسية (NCTM, 2000).

تصف المبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية، وتطور نوعين من المعايير: معايير لتعلم موضوعات رياضية محددة، ومعايير عمليات لكل من أصول علم التعليم وطرائق التعليم.

توضح المعايير (من 1 إلى 5) محتوى أهداف الرياضيات للصفوف 6 إلى 12، وتتضمن هذه الأهداف: الأعداد والعمليات، والجبر، والهندسة، والقياسات، وتحليل البيانات والاحتمالات. تعرض المعايير 6 إلى 10 أهداف عمليات تعليم الرياضيات للصفوف 6 إلى 12، وتتضمن هذه الأهداف: حل

ومدى قدراتهم، والبحث عن وسائل لتمييز المشاركة الفاعلة لجميع الطلبة في خبرة تعلم الرياضيات.

يشترط إجراء التقييم لكل طالب متقنًا المتعلمين الخصوصيين، والموهوبين والمتفهمين، بما يوفر لهم الفرصة لبيان فهمهم لموضوع ما بطرق متعددة. وينبغي استخدام نتائج التقييم لتجهيز كل طالب بالفرصة والدعم المناسب لتحقيق المستويات المثلى في النجاح.

وخلال الفترة القصيرة من نشر الوثائق الثلاث، قررت NCTM إلحاق المعايير بسلسلة من الكتيبات التي تعضدها بأمثلة محددة، واقتراحات تفصيلية حول كيفية تطبيق كل معيار من هذه المعايير في غرفة التدريس.

أطلق على هذه السلسلة ((سلسلة إضافية)) Addenda Series. وقد أبرزت مجموعة من مناهج الدراسة المتاحة والنماذج الرياضية لتنظيم المحتوى الرياضي المقترح في معايير المنهج والتقييم. فضلاً عن ذلك توفر السلسلة الإضافية عينة لنهج، ودروس، وأنشطة تساعد على زيادة وثائق المعايير.

هناك اثنا عشر كتاباً في المجموعة الكاملة لسلسلة الإضافية: صممت ستة من هذه الكتيبات للمدارس المتوسطة (الصفوف 5-8)، وخمس كتيبات للمدارس الثانوية.

توفر هذه الكتيبات مصادر ثمينة للمعلم لعرض أنشطة ودروس تناسب طلبة المدارس الثانوية.

المبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية

The Principles and Standards for School Mathematics

عبر جهود متواصلة لمواجهة المطالب المتغيرة للمجتمع التقني، والاستمرار بتقديم تغييرات منظمة في تروبيات الرياضيات، أصدر NCTM "مبادئ ومعايير للرياضيات المدرسية" في نيسان من عام 2000. إن الهدف الأساسي من هذه الوثيقة هو تنقيح، وتكامل، وتعديل، وتحسين الأهداف الأصلية لمعايير NCTM لسنة 1989.

توفر "مبادئ ومعايير للرياضيات المدرسية" مساراً ورؤية متعمقة مع إتاحة الفرصة لمدارس المقاطعات المحلية والمدارس لاتخاذ قرارات مهمة باتجاه قضايا المناهج الدراسية. وتقدم "مبادئ ومعايير للرياضيات المدرسية" مجموعة تفصيلية من الأهداف للرياضيات المصممة لجميع الطلبة (K-12). أعدت الأهداف لغرض تشكيل: مناهج، وتعليم، وجهود التقييم للمستقبل، ولتوفير أدوات ومصادر ثمينة للمعلمين، والمدراء، ولوإصاحي السياسات، لغرض استكشاف وتحسين نوعية برامج

نشرت NCTM سلسلة من الكتيبات بعنوان "سلسلة الإبحار" Navigation Series كملحق للمبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية تشابه هذه السلسلة بأهدافها السلسلة الإضافية وتركز بمعالجة عميقة لجملة من المفاهيم الرياضية، ويعالج كل كتيب من هذه الكتيبات مدى محدد من الصفوف الدراسية (ما قبل رياض الأطفال-2، 3-5، 6-8، 9-12). يلخص الجدول التالي الموضوعات الرئيسية للمبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية الخاص بـ NCTM. يعرض القسم الأول من الجدول معايير المحتوى، ويصف القسم الثاني معايير العمليات.

المسائل، التحليل والبرهان، والتواصل، والارتباطات، والعروض. إن الأهداف والعمليات غير قابلة للتبادل - على وجه الحصر- فيما بينها، بينما ترتبط إحداها بالأخرى ارتباطاً طبيعياً. فعلى سبيل المثال، فهي تحتاج إلى معرفة المحتوى في تحليل البيانات والاحتمالات لفرض إعداد ارتباطات / عروض بين محتوى المجالين. فضلاً عن الصعوبة البالغة التي تعترض صياغة الحدس المنطقي في الهندسة بدون تحليل أو برهان، كذلك يبدو من المستحيل، افتراضياً، رسم تمثيلات مرئية دقيقة دون معرفة بالجبر والدوال.

معايير المحتوى للرياضيات المدرسية

مقياس العدد والعمليات	ينبغي على برامج التدريس ما قبل رياض الأطفال لغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:
	<ul style="list-style-type: none"> فهم الأعداد، وطرق عرضها، والعلاقات القائمة بين الأعداد، والنظم العددية. فهم معنى العمليات وكيف ترتبط فيما بينها. أن يحسب بسهولة ويسر، ويستطيع إعداد تخمينات معقولة.
مقياس الجبر	ينبغي على برنامج التدريس ما قبل رياض الأطفال لغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:
	<ul style="list-style-type: none"> فهم الأشكال، والعلاقات، والدوال. عرض وتحليل المواقف والبنى الرياضية باستخدام الرموز الجبرية. استخدام النماذج الرياضية لعرض وفهم العلاقات الكمية. تحليل التغيير بسياقات مختلفة.
مقياس الهندسة	ينبغي على برنامج التدريس ما قبل رياض الأطفال لغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:
	<ul style="list-style-type: none"> تحليل خصائص ومميزات الأشكال الهندسية ثنائية وثلاثية الأبعاد، وتطوير البراهين الرياضية حول العلاقة الهندسية. تحديد المواقع ووصف العلاقات المكانية باستخدام هندسة الإحداثيات، ونظم وصفية أخرى. تطبيق التحويلات، واستخدام المناظر لتحليل المواقف الرياضية. استخدام التمثيل الصوري، والإدراك المكاني، والنمذجة الهندسية لحل المسائل.
مقياس القياس	ينبغي على برامج التدريس ما قبل رياض الأطفال لغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:
	<ul style="list-style-type: none"> فهم الصفات القابلة للقياس للأشياء، والوحدات، والنظم، وعمليات القياس. تطبيق التقانات المناسبة، والأدوات، والصيغ لوصف القياس.
مصادر تحليل البيانات والاحتمالات	ينبغي على برامج التدريس لمهنة ما قبل رياض الأطفال لغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:
	<ul style="list-style-type: none"> صياغة الأسئلة التي يمكن توجيهها بواسطة البيانات، وجمع، وتنظيم، وعرض البيانات المرتبطة معها للإجابة عنها. اختيار الطرائق الإحصائية المناسبة لتحليل البيانات واستخدامها. تطوير الاستدلالات والتوقعات التي تركز على البيانات وتقويمها. فهم المفاهيم الأساسية للاحتتمالات وتطبيقاتها.

معايير العمليات للرياضيات المدرسية

معايير حل المسألة	<p>ينبغي على برامج التدريس ما قبل رياض الأطفال ولغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ بناء معرفة رياضية جديدة من خلال حل المسألة. ■ حل المسائل التي تظهر في سياقات أخرى. ■ تطبيق وتبني مجموعة من الاستراتيجيات المناسبة لحل المسائل. ■ المراقبة وعكسها على عمليات الحل الرياضي للمسائل.
معايير الحجّة والبرهان	<p>ينبغي على برامج التدريس ما قبل رياض الأطفال ولغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ إدراك أن التعليل والبرهان هما المظهران الأساسيان للرياضيات. ■ إجراء وتحقيق الحدس الرياضي. ■ تطوير وتقويم الاستدلال والبرهان الرياضي. ■ اختيار واستخدام أنواع متعددة من التعليل وطرائق البرهان.
معايير التواصل	<p>ينبغي على برامج التدريس لمرحلة ما قبل رياض الأطفال ولغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ تنظيم وتمييز تفكيرهم الرياضي من خلال التواصل. ■ تواصل فكرهم الرياضي بصورة واضحة ومتربطة مع مدرسيهم، ونظرائهم، والآخرين. ■ تحليل وتقويم التفكير الرياضي واستراتيجيات الفهم. ■ استخدام اللغة الرياضية للتعبير عن الأفكار الرياضية بدقة.
معايير الارتباطات	<p>ينبغي على برامج التدريس ما قبل رياض الأطفال ولغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ تمييز واستخدام الارتباطات بين الأفكار الرياضية. ■ فهم كيفية ترابط الأفكار الرياضية فيما بينها وكيف تبني إحداها على الأخرى، لإنتاج الكل المترابط. ■ تمييز وتطبيق الرياضيات في سياقات تقع خارج الرياضيات.
معايير العرض	<p>ينبغي على برامج التدريس ما قبل رياض الأطفال ولغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ إنشاء واستخدام العروض لتنظيم، وتسجيل، عوامل الآراء الرياضية. ■ اختيار، وتطبيق، وترجمة ما بين العروض لحل المسائل. ■ العروض للمستخدم لنموذجية وتفسير الظواهر الفيزيائية، والاجتماعية والرياضية.

المبادئ للرياضيات المدرسية

العدالة	<ul style="list-style-type: none"> ■ إن التمييز في الرياضيات التربوية يحتاج إلى العدالة: أعلى التوقعات ودعم مركز لجميع الطلبة.
منهاج الدراسة	<ul style="list-style-type: none"> ■ إن منهج الدراسة أكثر من كونه مجموعة من الأنشطة: ينبغي أن يكون مترابطاً، ويركز على أهم الموضوعات الرياضية، وأن يكون قد أحسن توزيع تفرعاته عبر الصفوف الدراسية.
التعليم	<ul style="list-style-type: none"> ■ يتطلب التعليم المؤثر للرياضيات فهم ما ينبغي على الطلبة معرفته، ويحتاجون إلى تعلمه، ثم تحديدهم ودعمهم لتعلمها بشكل جيد.
التعلم	<ul style="list-style-type: none"> ■ ينبغي أن يتوافق تعلم الطلبة مع الفهم والبناء الفاعل لمعرفة جديدة من خلال الخبرة والمعرفة القبلية.
التقييم	<ul style="list-style-type: none"> ■ ينبغي أن يدعم التقييم تعلم الرياضيات الأساسية ويوفر معلومات مفيدة لكل من المعلمين والطلبة.
التقنية	<ul style="list-style-type: none"> ■ إن التقنية ضرورية في عمليتي تعليم الرياضيات وتعلمها، ولها تأثير ملموس على طبيعة الرياضيات التي يتم تدريسها، وتمتدز تعلم الطلبة.

تم تمويل جملة من هذه المشاريع وصُدر عليها بواسطة مؤسسة تمويل العلوم الوطنية (NSF) National Science Foundation والتي نشأت عن جملة من البحوث الشاملة التي أجريت على تعلم الرياضيات وتعلمها في المدارس الثانوية. فضلا عن ذلك، إن مقصد هذه البرامج يركز على اقتراح أنشطة تدعم أساليب التفكير الرياضي التي تنفع الطلبة في مساهم المستقبل، وترتبط بتطبيقات الواقع الميداني الذي سيواجهونه.

إن هذه الموارد الجديدة والمستحدثة قد ارتكزت إلى المبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية الصادرة عن المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM, 2000).

يصف الجدول الآتي عشرة برامج رياضية-تموجية تستخدم في عدد من المدارس المتوسطة والثانوية على طول رقعة الولايات المتحدة.

إنجاز المبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية Implementing The Principles And Standards For School Mathematics: نصت مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية على ما يلي: "إن أحد أهداف هذه الوثيقة هي اقتراح وسيلة لتركيز المناهج"، بيد أن مهمة مواصلة هذا الهدف داخل دائرة الصف الدراسي تشكل تحديا كبيرا. سيتبع إنجاز هذا الهدف مثابرة مستمرة لتحسين مجموعة الأفكار الجديدة، والابتكارات الخاصة بالمناهج الدراسية ووضعها موضع التنفيذ والتي ستجمل من الولايات المتحدة منافسا شديدا للأفضل في العالم بمادة الرياضيات.

حاول عدد من المدارس الثانوية على عموم الولايات المتحدة، استكشاف وتنفيذ عدد كبير من: البرامج الرياضية، ونماذج المناهج الدراسية، ومجموعة متباينة من أدوات التقييم استجابة للتحديات، والحاجات، والمسؤوليات التي تفرضها عمليات تعليم وتعلم الرياضيات في مجتمع يعج بتطورات تقنية.

نماذج منهجية مثالية لرياضيات المدارس الثانوية

المدرسة المتوسطة	الرياضيات المترابطة
<p>منهاج الدراسة للمدرسة المتوسطة للصفوف 6-8 الذي تم تطويره بواسطة مشروع الرياضيات المترابطة (CMP).</p> <ul style="list-style-type: none"> تسمى الرياضيات المترابطة لتطوير المعرفة الرياضية للطلاب والمعلم، والتي تكون ثرية في الترابطات وعميقة بالفهم والمهارات. يمكن اختصار الأهداف بمعيار وحيد: ينبغي على جميع الطلبة أن يكونوا قادرين على التعامل والتواصل ببراعة في الرياضيات. تعريف المهارات على أساس أكثر من كونها براعة في الحسابات والتعامل مع الرموز. تحري الأفكار الرياضية المهمة عبر وحدات منظمة. إتاحة عدة طرق للطلبة في عرض كيفية إدراكهم للرياضيات في الوحدات. 	<p>Connected Mathematics</p>
<p>منهاج الدراسة للمدرسة المتوسطة للصفوف (5-8) الذي تم تطويره بواسطة مشروع الرياضيات السياق (Mic).</p> <ul style="list-style-type: none"> إن الرياضيات في السياق هو منهاج دراسي شامل لرياضيات المدارس المتوسطة للصفوف 5 إلى 8. يؤكد على الطبيعة الفعالة والديناميكية للرياضيات والسبل التي توفرها الرياضيات للطلبة في إدراك العالم الذي يحيط بهم. تتألف من المهام الرياضية وأسئلة تم تصميمها لتحفيز التفكير الرياضي ولتشجيع الحوار بين الطلبة. 	<p>الرياضيات في السياق Mathematics in Context</p>
<p>منهاج الدراسة للمدرسة المتوسطة للصفوف (6-8) الذي تم تطويره بواسطة مشروع الرؤية والتفكير رياضيا:</p> <ul style="list-style-type: none"> إن الفضاء الرياضي هو منهاج دراسي شامل لرياضيات المدارس المتوسطة بسنيتها الثلاثة، والذي يركز على الرياضيات في حدود الخبرة البشرية. 	<p>الفضاء الرياضي: الرؤية والتفكير رياضيا Math Space: Seeing & Thinking Mathematics</p>

<p>• يدعم الطلبة على تعلم الرياضيات عن طريق جعلهم يمارسون الرياضيات، ويستخدمونها ويربطون بين الأفكار الرياضية، وينشئون فهمهم الرياضي الذاتي.</p> <p>• يدعم المعلمون في استخدامهم المواد بمرونة لإشباع احتياجات طلبتهم.</p> <p>• منهج الدراسة للمدرسة المتوسطة للصفوف (6-8)، الذي تم تطويره بواسطة مشروع (STEM Project: Sin :Through Eight Mathematics)</p> <p>• إن الموضوعات الرياضية هي منهج دراسي رياضي متكامل لمدة ثلاث سنوات للطلبة في الصفوف (6-8).</p>	<p>الموضوعات الرياضية Mathematics</p>
<p>• يشغل المنهج الدراسي الطلبة على ممارسة الرياضيات بصيغ مختلفة.</p> <p>• يفترض أن يمتلك الطلبة الفرصة لاستخدام الآلة الحاسبة. Calculator.</p> <p>• منهج الدراسة للمدرسة المتوسطة للصفوف (6-8) الذي تم تطويره بواسطة مشروع رياضيات المدارس المتوسطة من خلال مشروع التطبيقات:</p> <p>• تعرف مسارات الرحالة إلى الجبر والهندسة رسمياً بمشروع رياضيات المدارس المتوسطة من خلال مشروع التطبيقات (MMAP)، وهو عبارة عن منهج دراسي رياضي شامل للمدارس المتوسطة يكامل بين تقنيات الحاسوب مع ارتباطات موضوعية أخرى.</p> <p>• يوفر فرصاً متنوعة للطلبة لأن يتقدموا ويقوموا، بالإضافة إلى توفير فرص أمام الطلبة لتعلم كيفية إعداد التقييم.</p>	<p>مسارات الرحالة إلى الجبر والهندسة Voyager Pathway Algebra & Geometric</p>

المدرسة الثانوية High School

<p>• منهج الدراسة للمدارس الثانوية للمراحل (9-12) الذي تم تطويره بواسطة مشروع Core-Plus Mathematics:</p> <p>• إن الرياضيات المعاصرة في السياق هي برنامج رياضي متكامل لأربع سنوات، يتضمن منهجاً دراسياً جوهرياً لجميع الطلبة لثلاث سنوات، فضلاً عن منهج مرن لأربع سنوات يستمر في إعداد الطلبة للرياضيات الجامعية.</p>	<p>الرياضيات المعاصرة في السياق Contemporary Mathematics in Context</p>
<p>• منهج الدراسة للمدارس الثانوية للصفوف (9-12) الذي تم تطويره بواسطة برنامج الرياضيات التفاعلية (IMP).</p> <p>• إن برنامج الرياضيات التفاعلية (IMP) هو منهج تدريسي متكامل لأربع سنوات يختص بموضوع المسائل، وقد صممت الرياضيات لتحل محل الجبر التقليدي-1، الهندسة والجبر-2 والمثلثات، وسباق ما قبل حساب التفاضل والتكامل CALCULUS (الحصيان).</p> <p>• يوجد الرياضيات التقليدية مع موضوعات إضافية اقترحت بواسطة معايير مناهج الدراسة والتقييم لمجلس (NCTM) مثل: الإحصاء، والاحتمالية، والرياضيات المنقطعة Discrete Mathematics، وجبر المصفوفات Matrix Algebra.</p> <p>• يتطلب استخدام آلة حاسبة-رسمية أثناء الدرس.</p>	<p>برنامج الرياضيات التفاعلية Interactive Mathematic Program</p>

الارتباطات الرياضية MATH Connections

<p>• منهج دراسي لثلاث سنوات لرياضيات المدارس الثانوية</p> <p>• إن الارتباطات الرياضية هي منهج دراسي متكامل للمدارس الثانوية يستغرق ثلاث سنوات، ولجميع الطلبة، وتكمن مهمته في أحداث تطور مفاهيمي لدى المتعلم.</p> <p>• يتم توجيهه في ضوء المفاهيم، بمعنى آخر، تقدم المفاهيم في سياق تطبيقات الواقع المادي، ومشاكله القائمة، ومشاريعه.</p>	<p>منهج دراسي جوهري للرياضيات الثانوية</p>
--	--

■ تم تصميمه لتزويد الطلبة بخبرات تساهم في تنشيط حب الاستطلاع لديهم، وإثارة خيالهم، وتحدي مهاراتهم الشخصية.

■ منهاج دراسي للمدارس الثانوية للصفوف (9-12)، تم تطويره بواسطة مجمع الرياضيات وتطبيقاتها (COMAP).

■ إن المنهج الدراسي "الرياضيات: صياغة عالماً" هو منهاج جوهري متكامل للمدارس الثانوية تركز إلى مقدمة منطقية تقترض أن الطلبة يتعلمون بصورة أفضل عندما يشاركون بصورة فاعلة بالمعلمية.

■ منهاج دراسي للمدارس الثانوية للصفوف (9-12) تم تطويره بواسطة "مبادرة متضمنة لرياضيات وعلوم مونتانا" Systematic Initiative for Montana Mathematics and Science (SIMMS).

■ الرياضيات المتكاملة (SIMMSIM) هي منهاج رياضي متكامل للصفوف (9-12)، يستخدم سياقات العالم الواقعي بمعالجة موضوعية متكاملة، ولجميع الطلبة.

■ يعالج المفردات الرياضية بطريقة مخالفة ترتيبياً للمناهج التقليدية، ويصلون إلى بعض الموضوعات الرياضية التي لا تدرج عادة في مرحلة المدارس الثانوية.

■ يدعو إلى استخدام أشكال تدريبية مختلفة، تتضمن مجاميع عمل فردية وتعاونية، ومناقشات مفتوحة للصف الدراسي، ومشاريع فردية وجماعية.

الرياضيات: صياغة عالماً
Mathematics: Modeling
Our World

الرياضيات المتكاملة
SIMMS Integrated
Mathematics

التطوير المهني: مصدر المعلم

Professional Development: A Teacher's Resource

يعد التطوير المهني من أهم الموارد التي تساعد على الارتقاء: بمهارات التعلم المؤثرة، والتقانات الخاصة بمعلمي الرياضيات. إن تربيوات الرياضيات هو حقل يعاني باستمرار من حالات النمو والتطور، وكما هو الحال في المهنة الطبية، حيث يشارك الأطباء وكوادر التمريض بحلقات دراسية وتدريبية للتواصل مع مبادئ التطوير السائدة في حقل اختصاصهم، فإن على معلمي الرياضيات المحترفين المشاركة في البرامج المستمرة للتطوير المهني لتمكين معرفتهم، وخبراتهم، وقدراتهم بوصفهم معلمين بصفوف المدرسة. يستخدم اصطلاح "التطوير المهني" دائماً بالتبادل مع اصطلاحات أخرى مثل "تدريب المعلمين"، أو "تطوير الكادر التدريسي"، أو "التدريب في أثناء الخدمة".

ينبغي أن يحسن تنظيم هذه الأنشطة، وتحدد توقيتاتها الزمنية باستمرار، وتعد بمثابة بالغة لغرض زيادة، وإثراء، وتحسين: المهارات الرياضية والتعليمية، والمعرفة، وقدرات التربيوين. إن من الضروري ملاحظة أن الهدف الجوهري للتطوير المهني يكمن في تحسين تعلم الطلبة. من ناحية ثانية،

تتضمن موضوعات التطوير المهني الأولى الفقرات الآتية:

- 1- توفر للمربين فرصة تقييم الذات بمعيار النمو المهني.
- 2- تساعد التربيوين على تطبيق المبادئ والمفاهيم الجديدة بعملية التعلم/التعلم في ضوء الاطلاع على التقدم التقني.
- 3- تدعم التربيوين على توسيع آفاقهم الرياضية.
- 4- تساعد التربيوين على تطويرهم الشخصي والمهني.
- 5- تساعد على دعم التربيوين في تطوير المفاهيم والتقانات التي تمتاز بكونها مؤثرة وتمتلك دقة رياضية. وتسهم في: خلق، وتحريض، وشحن قدرات الطلبة على طريق تقدير الرياضيات وتطبيقها ميدانياً.
- 6- الاستمرار بمعايير تميز عالية خلال برامج الرياضيات ومناهج الدراسة القائمة.
- 7- إتاحة فرصة الاستجابة للمشاكل الخاصة بالمناهج الدراسية أو بالتدريس.
- 8- تطبيق طرائق تعليم وممارسات تعلم مستحدثة.

أنواع التطوير المهني

Types of Professional Development

يمكن تقديم مجموعة من أنشطة التطوير المهني لكل من مجاميع المعلمين الصغيرة أو الكبيرة. وتتضمن هذه المجموعة: ورش عمل منفردة، أو سلسلة من ورش العمل التي يتم إدارتها

تناسب أعداد الجامعات الواسعة، وتقدم معالجة مركزة وطويلة الأمد لوضع محدد أو موضوعات متعددة. وتتراوح الفترة التي تعتمد هذه المعاهد بين أسبوع أو أسبوعين أو ثلاثة أسابيع من الأنشطة التي توفر للمشاركين باستمرار طيلة هذه الفترة. تستمر المعاهد خلال الصيف أو خلال عطلة منتصف الشتاء، في ضوء حاجات المدرسة أو المقاطعة.

يمكن تقديم مساقات بعد الجمعة في: تربويات الرياضيات، ومحتوى الرياضيات، وتقنيات التعليم، والإشراف الرياضي، ويتوقف ذلك على الحاجات الخاصة بالمدرسة أو المقاطعة. يمكن توفير هذه المساقات من خلال برنامج تعاوني مع جامعة، يضاف إلى ذلك إمكانية تطويع مساقات ما بعد الدراسة الجامعية لتعكس احتياجات المدرسة أو المقاطعة.

هناك وفرة من فرص التطوير المهني تقترح أمام من خلال منظمات تربويات الرياضيات على المستوى المحلي، أو الولاية، أو الوطني، أو على شكل أنشطة تدريبية للمعلمين تعد في مدارس محلية ومدارس المقاطعة.

يمكن للخطوة التمهيدية الخاصة بالتطوير المهني أن تطوع وتقدم المعلمين والمشرّفين وأولياء الأمور، والكوادر المساعدة شريطة أن تكون متوافقة مع المعايير المحلية، والولاية، والوطنية.

يظهر فيما يأتي مجموعة من النماذج عن المبادرات الإضافية للتطوير المهني:

- الاتفاقيات الوطنية أو المحلية في تربويات الرياضيات.
- ملاحظات المعلمين.
- نصائح المعلمين.
- حلقات دراسية عن تطوير المناهج.
- التفقد الداخلي للمدرسة.
- مراكز مصر المعلم.
- شركات القطاع الخاص.
- برامج التبادل الخارجي.
- الدروس الإيضاحية.
- بحوث الأداء.
- تقويم كتب الدراسة والبرمجيات.
- المساقات في أثناء الخدمة.
- التفرغات Sabbaticals المستخدمة لتعزيز المهني.
- فريق الدعم الدراسي.
- مجاميع عمل الرياضيات.
- تأمل الأقران.

بواسطة خريجي كليات، ومعلمي رياضيات - متدربين، أو استشاريين.

تقدم ورش العمل بإعدادات وأشكال مختلفة، ويمكن تخصيصها بحيث تتلاءم مع الحاجات الخاصة بالمدرسة، أو المقاطعة خلال ساعات الدوام أو خارجها، أو في العطل الأسبوعية، إن طلب ذلك.

تستطيع المدارس أو المقاطعات أن تطلب ورش عمل منفردة والتي تركز على موضوعات محددة أو سلسلة من ورش العمل والتي تعالج موضوعاً شاملاً. قد تعد الورش جزءاً من مؤتمر، أو معهد. أو ملجأ. إن الورش المدة للمعلمين الجدد أو البتدئين، تساعد من يشارك فيها من معلمين جدد على اكتساب خبرات نتمتع بحساسيتهم باتجاه الاحتياجات التربوية والنفسية فضلاً عن حاجة طلبتهم الشاملة للرياضيات.

إن هذه الخبرات سوف تنضج فها أفضل بكمية تفكير طلبة الثانوية والية تعلمهم. ويمكن إعداد ورش العمل لذوي الخبرة من المعلمين لتعميق وزيادة مهاراتهم في تعليم موضوعات متخصصة. فضلاً عن ذلك يمكن تجهيز ورش العمل لمطوري الكوادر والمشرّفين لغرض زيادة الدعم من خلال مفرستهم أو منطلقتهم.

ينبغي أن تركز اهتمامات الورشة على الأنشطة التي تنسجم مع احتياجات الطلبة، والتي تتضمن تعميق المعايير: المحلية. والولاية والوطنية.

تتضمن الأشكال الأخرى للتطوير المهني المؤتمرات، ومراكز تفرغ، والمساقات الجامعية في أثناء الخدمة، والمعاهد. فستطيع المؤتمرات أن توفر للمجاميع الكبيرة دورة مكتملة وإبراز عدد من المتحدثين الأساسيين. قد تتألف المؤتمرات من مجموعة ورش أو محاضرات بارزة لموضوعاتها، والتي تلائم مجاميع أصغر. يضاف إلى ذلك إمكانية مشاركة متحدثين ضيوف، يتضمنون تربويين رياضيين معروفين وطنياً أو عالمياً بعروض تفاعلية Presentation من خلال بث فيديو والذي يصل إلى عدد كبير من المستمعين وطنياً ودولياً.

قد تستغرق أحداث المؤتمر نصف يوم أو يوماً بكامله.

يمكن تجهيز مراكز التفرغ المتخصصة للتطوير المهني لمجاميع كبيرة، و المجاميع الصغيرة التي تتألف من جلسات متعددة. إن مركز التفرغ هو عبارة عن منهج داخلي وثيق الصلة بموضوعات تخص تربويات الرياضيات. وتتراوح وقائع التفرغ - بصورة عامة- بين يومين إلى ثلاثة أيام، وقد تتضمن موضوع/ مؤتمر كل يوم. وتستطيع معاهد التطوير المهني تغيير أنشطة

وتتضمن هذه القمص برامج منح الشهادات للمعلمين قبل الخدمة الوظيفية أو في إثنائها.

تشمل الموارد الجامعية: مكتبة حرم الجامعة التي تستطيع توفير كتب وثيقة الصلة بالتدريس، ومجلات أكاديمية، ومواد سمعية-مرئية وموارد أخرى تختص بميدان التعلم والتعليم. بالمقابل فإن الهيئة التدريسية الجامعية تستطيع تقديم عون علمي وثمار خبرتها في مجالات محددة تثير الاهتمام والبحث، والرياضيات ومساقات عمل تربويات الرياضيات، المؤتمرات، وورش العمل، وحلقات دراسية وبرامج خاصة لهيئة المعلمين التي تركز على ارتباطات الشراكة التعليمية القائمة بين المدرسة والجامعة.

يوجد في كل ولاية قسم للتربية يساهم بتوفير موارد خصبية لمعلمي الرياضيات. وتتضمن الخدمات التي توفرها الولاية: معلومات حول التحصيل الدراسي والمهني للمعلم، وأسماؤه وعناوين المدارس المحلية، وسجلات الاختبار والتقييم، ومنح التراتب/ المقترحات وتطوير المناهج الدراسية.

المنظمات المهنية Professional Organizations
إن إحدى المنظمات الأساسية التي تدعم لمعلمي الرياضيات في جميع مظاهر الرياضيات وتربويات الرياضيات هو المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM). يوفر مجلس (NCTM) مطبوعات لتربويات الرياضيات المهنية، والتي تتضمن: تعليم الرياضيات للأطفال، وتعليم الرياضيات في المدارس المتوسطة، ومعلم الرياضيات، ومجلة البحوث في تربويات الرياضيات، ونشرات إخبارية متعددة لـ NCTM، وكتب سنوية، ووفرة من المطبوعات الأخرى التي تركز على موضوعات مهمة في تربويات الرياضيات.

فضلا عن ذلك تتكفل NCTM بجميع المؤتمرات الوطنية والمحلية التي تعقد خلال العام الدراسي. تعطي هذه المؤتمرات، لمعلمي الرياضيات، فرصة للتدعيم لورش العمل، أو المشاركة على مستوى المنطقة أو الولاية.

يوجد مورد مهم على مستوى المنظمات لمعلمي الرياضيات هو الجمعية الأمريكية للرياضيات Mathematical Association of America (MAA)، والتي تعمل على توجيه رياضيات الاختصاص على مستوى الكلية.

الاعتمادات المالية وأنواع أخرى الدعم Funding and Other Support
هناك عدد لا بأس به من الموارد المنتشرة في القطاع الخاص فضلا عن المنظمات الرياضية والتعليمية فتوجد ووفرة من

■ مصادر التقنية وبرامج التقييم.

■ تقويمات المعلمين.

يستنتج بأن الخطوة التمهيدية للتطوير المهني لمعلمي الرياضيات ينبغي أن تتضمن تشكيل من المحتوى الرياضي من وطرائق التعليم المناسبة، المشاركة الفاعلة للمعلمين، وفهم للمشاكل اليومية، ووثائق التعليم، والمواقف التي تنشأ في غرف الصف، والموازنة بين التطبيقات النظرية والعملية، وبيان واضح للأهداف العامة والخاصة للمشاركين، وفرصة للمعلمين بتوظيف المهارات والطرائق الجديدة في غرف الصف، والاستمرار بالدعم الدائم والأنشطة التكميلية.

المصادر للمعلمين Resources For Teachers

توجد وفرة من الموارد المتاحة التي تساهم بدعم لمعلمي الرياضيات ومساعدتهم على التطور والتحسين على طريق الاحتراف. يمكن الدخول إلى هذه الموارد إما محلها من خلال المدارس أو مدارس المقاطعة أو من خلال مصادر خارجية.

تمتلك المدارس ومدارس المقاطعة إمكانية تدريب المعلمين من خلال مساقات في أثناء الخدمة، ودروس خاصة، مجاميع مناقشة، مؤتمرات، لجان، ورش عمل، وحلقات دراسية، وصادرات تمهيدية أخرى على طريق التطوير المهني.

إن عدداً من هذه المبادرات يمكن تطويرها لتتناسب مع المتطلبات الخاصة بالمعلمين، كذلك تساعد مراكز الموارد المتخصصة للمعلمين/ والرياضيات (والتي تمتلك أحدث مواد المناهج الدراسية)، والكتب المنهجية، وثمانج الفاشرين، ومجلات مهنية، مواد تشكيلية، وموارد سمعية-مرئية مثل الأقراص الليزرية، وبرمجيات حاسوبية، وأشرطة فيديو وأشرطة سمعية، على تحسين وتطوير خبرات المعلمين في الرياضيات وأصول التدريس، وكما يمكن إحراز النصائح، والإرشادات، والاستشارات من خلال مهني المدرسة، مثل رئيس القسم، ومنسق الرياضيات، ومدرب المدرس، أو مرشد الصف.

يوفر هؤلاء الأشخاص اقتراحات مفيدة بخصوص تطبيق مناهج الدراسة، إدارة غرفة التدريس، مهارات التدريس، وإدارة المواد الدراسية. يضاف إلى ذلك قدرتهم على إدارة دقة دروس توضيحية حول موضوعات رياضية محددة، وصياغة تقنيات مختلفة لأنشطة التعلم.

هناك عدد كبير من الموارد الخارجية والتي تتوفر لمعلمي الرياضيات. فمؤسسات التعليم العالي مثل الكليات والجامعات تقدم فهما مختلفة للمعلمين على تعلم الرياضيات وتعليمها،

مناظرة الرياضيات A Mathematics Debate

تدور مناظرة معقدة داخل دائرة المجتمع الرياضي بخصوص كيفية تعلم الرياضيات في مدارسنا. وقد عدد ممثلون من مدارس المقاطعات، والمدارس الخاصة، والجامعات يضاف إليها القطاع الخاص إلى تنظيم: منقديات للحوار، ومجاميع متخصصة، ومناقشات بخصوص تقييم فعالية تروبيات الرياضيات. ويبدو بأن المنظور التقليدي يدعم مبدأ الاتجاهات الإجرائية، والتي تتضمن: الاستظهار عن ظهر قلب Memorization، والتقليب وممارسة القواعد والتعريفات بوصفه طريقاً أمثل لتعليم الرياضيات وتعلمها. بالجهة المقابلة يبرز التيار المعاصر، مثل منظور التيار البنوي Constructivists، والذي يقترح أن على الطلبة استثمار قدراتهم الفطرية لصياغة خوارزمياتهم (Algorithms) في سبيل اكتساب ملكات ذاتية من الموضوعات الرياضية المحددة.

ناقش التربويون الرياضيون هذه الآراء والاهتمامات لسنين طويلة، يضاف إلى ذلك أن هذه المناظرات قد ازدادت تشابكاً وتعقيداً بنتائج الدراسة المالية الثالثة للرياضيات والعلوم Third International Math & Science Study (TIMSS) عندما ظهر بأن التلاميذ الأمريكيين في الصف الثامن كانوا متوسطين، وأن مجاميع تلاميذ الصف الثاني عشر كانت ضعيفة ومقدنية عند مقارنتها بنسب مجاميع الأعمار في بلدان أخرى.

إن المجلس الوطني لعلمي الرياضيات (NCTM) يدعم باستمرار فكرة أن الرياضيات ينبغي تدريسها من خلال بيان وترسيخ الجانب المفاهيمي الذي تركز إليه، بمعنى آخر، أن المعلمين ينبغي عليهم تعلم الرياضيات من أجل تعميق الفهم، وأن يجعلوا الرياضيات أشد ارتباطاً (من حيث وظيفتها) مع حياة الطالب اليومية. على كل حال، فقد واجهت NCTM مقاومة من التربويين الذين يدعون الاتجاه الاتجاهات التقليدية. من ناحية ثانية إن وثيقة معايير 2000 NCTM تعرض رؤية شمولية تتضمن هيكل من الأفكار التي ستساهم في صياغة المنظور المستقبلي لتروبيات الرياضيات في العقود القادمة.

في جميع الأحوال، سواء اعتنقت معايير NCTM أو رفضت، فإن النقاشات والمناظرات المهنية ينبغي أن تستمر، وعلى مجالس المدارس المحلية، والمندتيات الاحترافية، ومجاميع العمل، وفرق تدريس الآباء، أن تستمر بفتح الحوار وتطوير عرف الممارسة الانعكاسية Reflective Practice. إن طرائق التعليم والتعلم لرياضيات المدارس الثانوية هي عملية تغيير مستمر لارتباطها المباشر بالتقدم العلمي وبرز

التقنيات والمؤسسات التجارية التي تدعم المبادرات في ميدان تروبيات الرياضيات.

في الحقيقة، إن كثيراً من هذه النقابات قد أقامت شراكات إقليمية مع المدارس المحلية في المقاطعات، وعدت إلى تزويدهم بالموارد التي يقترون إليها مثل: الدعم المالي من خلال منح تشجيعية، المدارس، والأعمال التجارية، ومشاريع على مستوى المجتمع، ومتحدثين، وقياديين لورش العمل، وبرامج للتبادل والتعلم التعاوني، وبحوث إجرائية، وأخيراً التبرع بالمدات المختلفة.

مصادر المجتمع Community Resource

يمكن العثور على وفرة من الموارد المفيدة في المجتمع المحلي. فعلى سبيل المثال، هناك الكثير من أولياء الأمور الذي يمتلكون مهارات خاصة، ودافعا ذاتيا للقيام بعمل يفيد المجتمع. أو خبرة في حقل محدد بميدان الرياضيات. حيث يستطيع هؤلاء زيارة المدارس وممارسة عملية توجيه للطلبة والمعلمين.

فضلا عن ذلك فإن كثيراً من الناس الذين يمثلون مجتمع الأعمال والتقنية، مثل: المصارف، والتأمين، والمبيعات، وتقنيات الحاسوب، يمتلكون الفرصة المناسبة للمشاركة بوصفهم ناصحين مخلصين وتروبيين مشاركين.

تبرز موارد مجتمعية أخرى مثل: الوكالات الفرعية، المتاحف، الحدائق العامة، المطارات، وشركات الخدمات التي تستطيع توفير: نشرات، وتكفل بأعداد رحلات الطلبة، وإعداد عروض تبين طبيعة استخدام الرياضيات في حياتنا اليومية.

أخيراً، هناك عالم متكامل من الموارد الثمينة التي تتوفر من خلال مؤسسات النشر، حيث يستطيع الناشرون تجهيز كتب مدرسية، ومواد تجارية، وجلسات تدريبية حول الكتب المدرسية التي تم تبنيها حديثاً.

المؤسسات الوقفية Foundations

هناك عدد من المؤسسات الوقفية التي تدعم تروبيات الرياضيات على المستوى الوطني، مثل المؤسسة الوطنية العلمية-الوقفية National Science Foundation (NSF) أو الإدارة الأمريكية للتعليم U. S. Dep. of Education. من ناحية ثانية، توجد وفرة من المؤسسات الوقفية الخاصة التي تدعم المبادرات المحلية، وتتوفر مكتبة متكاملة مكرسة للمؤسسات الوقفية في الولايات المتحدة.

على تسهيل التغيير النظامي- الإيجابي في تربويات الرياضيات، وفي غرف تدريس الرياضيات.

حاجات اجتماعية مختلفة، وعليه فإن تطوير ممارسة الانتكاسية سيوفر عمقا بالبصيرة، ودليلا مرشدا، كما سيساعد

تمارين Exercise

1. أن تصف ثلاثة حلول ممكنة تساعد في مواجهة هذه الظاهرة.
11. عدد، وصف باختصار، خمس خصائص مميزة للمدارس ذات التحققات المنخفضة والمرتفعة.
12. صف كيف يدعم برنامج/منهاج الرياضيات التوقعات المرتفعة لجميع الطلبة.
13. بناء على كونك معلم رياضيات، كيف يمكن أن تواجه مسألة قلق الرياضيات لدى الطالب؟
14. هناك طلبة قد يحتاجون دهما إضافيا بالرياضيات، وبناء على كونك معلم رياضيات، صف كيف ستبني هؤلاء الطلبة، علميا، بحيث يستطيعون الوصول إلى الطاقة الكامنة القصوى لديهم؟
15. صف باختصار، مع تسويق خمسة أصناف من أنشطة التطوير المهني التي تدعم خبرات معلمي الرياضيات بالمدارس الثانوية، وتعمق تقنياتهم داخل غرفة التدريس.
16. ادرج ويادر إلى وصف خمسة موارد من المجتمع التي تستطيع تعميق محتوى منهاج الرياضيات العائد لك.
17. تتضمن المظاهرات في دائرة تعليم الرياضيات منظورين أساسيين: النظرة التقليدية، والتي تدعم مبدأ الاتجاهات الإجرائية، وتتضمن الاستظهار عن ظهر قلب، والتقليب وممارسة القواعد والتعريفات كطريق أمثل لتدريس الرياضيات وتعلمها، والتيار البنوي الذي يتبنى الاعتقاد بأن على الطلبة استثمار قدراتهم الفطرية لصياغة خوارزمياتهم.
- أ. بصفتك معلماً في مدرسة ثانوية، حاول أن تصف اتجاهاتك التعليمية مع تضمين مبرراتك.
- ب. صف بليجاز درسا لمادة الرياضيات توازن من خلاله كلي المنظورين.

1. صف، من خلال منظور مدرسة ثانوية، الفروق الأساسية بين معايير العمليات والمعايير الشاملة في ضوء مخطط NCTM الوارد في معايير ومبادئ رياضيات المدرسة.
2. وضح كيف يؤثر العامل الاجتماعي في تغيير دور رياضيات المدرسة.
3. صف، كيف تستطيع بوصفك معلماً للرياضيات، أن تمكن الطلبة وتجهزم لعالم القد.
4. اختر موضوعا بالرياضيات، ولمرحلة دراسية ما، ويادر بكتابة الخطوط العريضة لمخطط درس يصف معايير NCTM المعملانية والمحتوى.
5. قم بتصميم مخطط درس الرياضيات الذي يدعم بيئة التعلم الفعال
6. إلى ماذا تتطلع في برنامج رياضيات أو منهاج دراسي نموذجي؟
7. صف ثلاث قضايا حرجة تتعرض معلم الرياضيات في هذه الأيام.
8. صف درسا بالرياضيات يوظف التقنية بصورة مناسبة.
9. بناء على ما ورد في الدراسة العالمية الثالثة للرياضيات والعلوم (TIMSS) فإن طلبة الصف الثامن بالولايات المتحدة كانوا متوسطي التحصيل، وإن مجموع نقاط طلبة الصف الثاني عشر كانت متدنية بشكل ملحوظ. فمن خلال ممارستك لهمام معلم رياضيات:
- أ. صف بعض المبررات الممكنة لحصول طلبة الصف الثاني عشر على نقاط متدنية.
- ب. صف بعض الحلول المحتملة التي تساعد على مواجهة هذه الإخفاقات.
10. تعاني الولايات المتحدة من شحة ملحوظة في المعلمين، حاول

مراجع مقترحة SUGGESTED REFERENCES

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Changing School Mathematics. Reston, VA: NCTM, 1981.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). Gender Differences in Achievement, IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS), 2000.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). TIMSS 1999-International Mathematics Report, 1999.

National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century. The Glenn Commission Report. Before It's Too Late. Jessup, MD: Education Publications Center, 2000.

The Ford Foundation. Solving the Main Problem. April, 1999.

ARC Center at COMAP, Inc. New Resources for School Mathematics, Lexington, MA: COMAP, Inc., 2001.

North Central Regional Educational Library. Active, Meaningful Mathematics Learning. A Guidebook, 1991.

Cozzens, Margaret B., Learning From TIMSS-R about U.S. Mathematics Achievement. The Mathematical Association of America (MAA), May/June, 2001.

National Center for Educational Statistics (NCES). Pursuing Excellence: A Study of U. S. Twelfth Grade Mathematics and Science Achievement in International Context. U. S. Department of Education. (TIMSS), 1998.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM, 2000.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM, 1989.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Professional Standards for Teaching Mathematics. Reston, VA: NCTM, 1991.

National Council of Teachers of Mathematics. Learning Mathematics for a New Century: 2000 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Edited by Maurice J. Burke and Frances R. Curcio. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

For more:

The NRC report is at

www.nap.edu/books/0309069955/html. The NCTM Web site is <http://www.nctm.org>.

For an opposing view:

Schmidt, William H., Curtis C. McKnight, Senta A. Raizen. A Splintered Vision: An Investigation of U.S. Science and Mathematics Education, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997. (The Executive Summary of this publication is available at the following website: ustimss.msu.edu/splintrd.htm.)

<http://nces.ed.gov/nationsreportcard/mathematics/results>

التخطيط طويل المدى وتصير المدى

Long - Range and Short - Range

مثلاً يركز الممثل تماماً على النص والموسيقي على قطعة موسيقية، يركز المعلم على خطة الدرس. من أجل هذا تتطلب كل وحدة وكل درس يومي وجود خطة. وسواءً أكانت تقدم مفهوماً جديداً، أو تساعد الطلبة بالتمرين على اختبار مقبل، أو تراجع اختباراً تم حديثاً، أو تمثل وتميز مهارات لن يحتاج ذلك، أو تقسم الصف إلى مجموعات عمل تعاونية متعددة، أو كنت تستخدم أية طريقة تعليم أخرى، فإن من واجبك أن تخطط لأدائك الصفّي. ويتعاقب هذا الأداء على مر التخطيط طويل المدى وتصير المدى. و يتم تطوير كل دورة كاملة تعلمها من خلال سلسلة من خطط الوحدات وتعُد كل خطة للوحدة أكثر لتكون خطط درس يومية. سنقدم في هذا الفصل والفصل الذي يليه، ضروباً من الخطط اليومية وخطط الوحدات المبنية على المعايير. ماذا يعني أن تكون مبنية على المعايير؟ يعني هذا أنه فضلاً عن المفردات الموجودة بطبيعة الحال في خطة الدرس مثل الموضوع و ((افعل الآن)) أو التمرين الصفّي، أو الفعالية التحفيزية، تستخدم خطة الدرس المبنية على المعايير مفاهيم مثل الاستكشافات، والربط، ثم التقويمات.

يجب أن يكون المعلم الناجح (خلال كل درس) قادراً على تبسيط وإيضاح كل ما هو معقد وغامض. كما يجب أن يكون المعلم مصدر إلهام لطلابه فضلاً عن مقدرته على التخطيط، وتنظيم، وخلق أي نوع من الدرس والذي يناسب تطويراً صفراً لطلاب شباب. كما يجب أن تكون نوعيات الأسئلة المطروحة من المعلم قد تم مراعاتها بدقة وأن تكون قد خطط لها سلفاً، وأن تكون مصاغة لاستحصاال المعلومات المرجوة من الطلاب من غير تخويفهم أو مفاجئتهم. وأخيراً، يتضمن التخطيط للدرس عموماً الواجب البيتي، وهي الممارسة المقبولة غالباً عالمياً والتي يعتبرها العديد من المعلمين امتداداً حقيقياً للدرس. ونأمل أن نقدم لك عزيزي القارئ، في هذا الكتاب معلومات وافية لتكوين آرائك الخاصة وأساليبك في مباشرة الدروس، وسؤال الطلاب، وتحفيزهم، ولابتداع واجبات بيتية، والتي يفترض أن تنسجم جميعها مع الدرس وفق أسلوبك المرثي الخاص.

5. ضرب فويل (FOIL)
6. قسمة متعددة الحدود.
7. القسمة الطويلة بحد مفقود في لقسوم.
8. تحليل ثلاثية الحدود للصيغة ax^2+bx+c
9. تعريف الدوال التربيعية.
10. حل المعادلات التربيعية.
11. مراجعة
12. تقييم.

وحدة عينية: الهندسة اللاأقليدية

Sample Unit: Non-Euclidean Geometry

إن هذه الوحدة مناسبة لإثراء منهج الهندسة. وتفترض معرفة مسجلة بالخطوط المتوازية، ومتوازي المستطيلات، ورباعيات الأشكال الخاصة الأخرى. ويمكن تعلم هذه الوحدة الهندسية اللاأقليدية إما مباشرة بعد وحدة عن المتوازيات أو أي وقت آخر بعد ذلك. ويجب أن تتألف على الأقل من الدروس الثمانية المتتابعة الآتية مع ملاحظة أنها تحتوي على اقتراحات لمصادر في الانترنت.

دروس يومية مقترحة Suggested Daily Lesson

1. مدخل إلى الهندسة اللاأقليدية - الزائدة المقطع والكروية.
2. رباعيات الأشكال ساخيري - تعريف وخصائص متعددة.
3. مساحات التظايق المبنية على رباعيات ساخيري.
4. مجموع قياسات زوايا المثلث.
5. المثلثات المتشابهة: قطعة مستقيمة تصل منتصفين ضلعي مثلث في كل نوع من الهندسة.
6. استخدام اللاأقليدية (برامجيات مجال عام) - استكشاف Exploring.
7. أعمال الفنان الرياضي كليفورد سنجر.
8. ملخص.
- تزايد أهمية الهندسة اللاأقليدية في العلم والتقنية المعاصرين.
- إن الهندسة اللاأقليدية معاكسة للحدس. وتساعد غرابتها الطلاب في إدراك أهمية النظام البديهي.
- ويمكن للطلاب أن يستكشفوا بصورة تفاعلية المثلثات التي يسمونها في الهندسة زائدة المقطع باستخدام اللاأقليدية المنطلقة من الموقع المنكوبوتي (Website).
- <http://math.rich.edu/~joel/noneducalid/>.
- ولا يوجد كتاب منهجي قادر على هذا النوع من الاستكشاف التفاعلي.
- ويستطيع الطلاب عبر الشبكة مشاهدة أعمال الفنان/ الرياضي المعاصر والذي يتأثر عمله (فنه) بالهندسة اللاأقليدية.

التخطيط طويل المدى

Long-Range Planning

بينما تكون الحركة والمرونة والتغييرات هي السمات البارزة للنشاطات الصفية اليومية، فقد تكون الدروس مخطط لها على مدى طويل خلال وحدة كاملة من العمل. وبطبيعة الحال، ينشر احتمال اتباع أي درس حرفياً كما هو مكتوب، لذا عندما تكتب الخطط طويلة المدى ينبغي أن تجري التعديلات يوميا. ولا يجب أن يتمتع المعلمون من عمل التعديلات هذه لمجرد أن ترك الخطة الأصلية مكتوبة كما هي بعد أمراً أيسر. ولا يمكن لدروس مفرد أن يعد في مكان مغرق لأن كل وحدة العمل هي مجموع دروسها المفردة. ويجب أن ينظر لكل درس يومي على أنه جزء من صورة أوسع، مع توفر القصد (أو النية) لتلبية الآمال طويلة المدى. ولنفتقر بأنك تدرس موضوع ((الجزور)) في الجبر. فبعد قراءة المساق المقرر للدراسة، والمادة الملائمة في الكتب المنهجية، وبعد البحث عن التوجيه من الزملاء ذوي الخبرة، عليك أن تتحدد بسلسلة من الدروس المرتبة منطقياً والتي ستشمل كل الموضوعات ذات الصلة فضلا عن مراجعة ودروس تقييم. وتعد الميزات الآتية وحدات متوقعة:

وحدة عينية: الجذور Sample Unit: Radicals

دروس يومية مقترحة Suggested Daily Lessons

1. الأسس والجذور: تقييم الجذور باستخدام الحاسبة العلمية.
2. البرهنة الفيثاغورية؛ حل المعادلات من الدرجة الثانية الصيغة $x^2 = k$ حيث تكون k أو لا تكون عدد صحيح مربع تام.
3. تقريب الكسور العشرية.
4. تقدير القيمة تبسيط الجذور وتركيبها.
5. ضرب وقسمة الجذور.
6. حذف الجذور للمقامات ذات الحدين.
7. المعادلات الجذرية.
8. مراجعة عامة للصف.
9. امتحان مجموعة صغيرة (لأغراض التقييم)
10. تقييمات الطلاب التحريرية للوحدة (لأغراض التقييم).

وحدة عينية: التحليل Sample Unit: Factoring

دروس يومية مقترحة Suggested Daily Lessons

1. المعاني والتعاريف.
2. العوامل الأحادية المشتركة.
3. الفرق بين مربعين تامين.
4. ضرب متعددة الحدود.

مساق دراسة أو منهجاً حكومياً مناسباً. ويمكنك بل وينبغي عليك تأمين مخططات مشابهة من مدارس أخرى أو أقسام تعليمية حكومية بمراستهم. وقد تتوفر البعض منها على الشبكة. فضلاً عن تزويدك بسلسلة مقترحة من المواضيع في المساق، سيعطيك المخطط التمهيدي دليلاً جيداً أخذاً بالحسبان الكمية التقريبية للوقت الذي سيخصص لكل موضوع في المساق. وتقدم بعض مناهج الولاية والمناهج المحلية الإرشادية سلسلة من خطط الدروس لاستخدامها في المساقات المنتظمة (المعيارية). ويجب أن تؤخذ هذه الخطط بعين الاعتبار. ولكن يجب استخدامها عند الضرورة كي لا يكون أسلوبك («متبداً») بخطئ مكتوبة من شخص آخر ولا تكون بالضرورة معدة لاحتياجك. والمهم هو أن تجمع ما أمكن من المعلومات المنهجية حول المساق التي ستعلمه.

الاطلاع على كتب دراسية مختلفة

Examine Various Textbooks

من الحكمة قبل البدء بأي تخطيط وحداني أن تطلع على كتب دراسية مختلفة التي تغطي المفاهيم التي تريد تعليمها. وتقدم الكتب الدراسية في الغالب مختلف الدخائل إلى مواضيع معينة ومصدراً كبيراً للمسائل التي يمكن الاختيار من بينها. وينبغي أن يكون للمكتبات الجامعية أو قسم الرياضيات في مدرستك طبعات متنوعة للطلاب أو للمعلمين من الكتب الدراسية. وإذا كنت تعلم أصلاً، فإن الناشرين سيسعدون عموماً بتجهيزك بنسخ من الكتب الدراسية آمليين بأن توصي بتبني كتبهم في صفوفك.

وعند حصولك على نسخة العلم للكتاب الدراسي، راجع المادة التقديمية لتحديد الدخول الفلسفي ووجهة نظر المؤلف. ولاحظ الترتيب الذي تقدم به الموضوعات، لأنه يحتمل أن يؤثر ذلك على تقييمك لمسلك على مدار السنة الدراسية. وبطبيعة الحال، ستكون هناك بعض الموضوعات التي ستطورها بمعزل عن ترتيب الكتاب الدراسي، لذا عليك تجنب اختيار كتاب دراسي يختلف كثيراً عن مفهومك الخاص في تقديم الموضوع المناسب.

والأهم من ذلك، أن تختار كتاباً دراسية تقدم طرقاً تدريسية تلمي أنماط تعلم طلابك وتلائم الخطوط العامة للمناهج الحكومية والمحلي.

عود نفسك على مكتبة المدرسة ومركز الأعلام

Familiarize yourself with the School Library and Media center

قد يكون لمدرستك أو مكتبة قسمك/ مركز الأعلام كتاباً

مصادر على الخط

<http://math.rice.edu/~joel/NonEuclid/>.
<http://www.math.toronto.edu/mathnet/questionCorner/NonEuclidean.html>.
<http://forum.swarthmore.edu/dr.math/problems/Non-Euclidean.html>
<http://www.encyclopedia.com/articles/09320.html>

تقييم Assessment

بعد الدرس رقم 7، سيناقد الطلاب نتائج استكشافاتهم مع الصف الدراسي.

وبعد مشاهدة العمل الفني ذي الصلة، سيطلب من كل طالب اختيار عمل فني واحد وكتابة مقالة قصيرة حوله.

مصادر للمساعدة في التخطيط طويل المدى

Sources to Assist in Long-Range Planning

إذا كنت على علم مسبق (قبل سنة أو فصل كامل) بأنك سوف تقوم بتعليم مساق معين، فإن بعض أو كل الخطوات التالية ينصح بها لمساعدتك في إعداد نفسك. وعلى أية حال فإذا علمت بالوقت قبل أيام قلائل أو أسابيع فقط فيمكن إجراء تعديلات الاقتراحات المدرجة. وسوف تتنوع هذه التعديلات بالاعتماد على كمية وقت التحضير المتاح، وكذلك على حماسك، وخبرتك، وتوقعاتك عن أداء الطلاب.

مشاهدة معلم ذو خبرة

Observe and Experienced Teacher

ليست هناك خطوة مفيدة وعملية ومساعدة يمكن أن تقوم بها أكثر من مشاهدتك اليومية لمعلم كفء ذو خبرة، يعلم حالها المساق الذي تتوقع أن تعلمه. أولاً، خذ موافقة المعلم لمشاهدة تعلمه. فإذا ما وافق، راقبه بانتظام وسجل ملاحظاتك الدقيقة حول ما تشاهده وتسمعه. أكتب الأسئلة والملاحظات بل وحتى الدعايات كي يمكنك استخدامها مستقبلاً. لاحظ إدارة الواجبات البيتية وإجراءات الاختيار وإدارة الصف. ولاحظ بالأخص أساليب التحفيز والطرق الذكية لتطوير الموضوع. وحتى لو قررت تماماً (تحسين) أسلوبه/أسلوبها فذلك على الأقل أساس متين لحكمك.

وسيكون من الأمور المساعدة إذا كان مقدور المعلم الذي تشاهده لقائك بانتظام لمناقشة المساق وأسباب استخدام أساليب تعليم معينة.

أحصل على عدة مخططات للمساق

Obtain Several Course Outline

قد يكون مشرفك قد أعطاك المخطط الرسمي لمدرسة، أو

والرياضيات وسيمتزون في صفك. وسوجد العديد منهم، رغم ذلك، أن الرياضيات موضوع مرعب ويثير التحدي. وللمساعدة في تحديد كيفية تلبية الاحتياجات الفردية لطلابك، فقد ترغب في الطلب منهم بكتابة مسح شامل يستوعب اهتماماتهم أو آرائهم في بداية السنة. أعط الطلاب سلسلة من الأسئلة من نوع ليكرت (Likert) (الشكل 2-1) للتأكد من حماسهم أو عدمه بالمشاركة في درس الرياضيات. تأكد من معرفة فيما إذا كان الطلاب يعتبرون أنفسهم ضعافاً، أو أقوياء في مجالات معينة من الرياضيات. كذلك حاول أن تسأل عن نجاحات أو إخفاقات الطلاب السابقة في مساقات الرياضيات أو مفاهيمها. فقد تساعد المعرفة في تحديد كيفية شعور الطلاب، أو اعتبار أنفسهم رياضيين وعلى تحديد أي من الطلاب هو بحاجة للمساعدة، ولتوفير فرص أكبر للتعلم بالتشكيلات، أو التحسن في الاستيعاب الرياضي. وبذلك تتجنب المزيد من الإخفاقات الرياضية.

أحصل على وسائل وتجهيزات Obtain Supplies
إضافة لأدوات مهنة التعليم المعتادة، بصورة عامة، يحتاج معلم الرياضيات إلى بعض مصادر التعليم الخاصة. ويمكن أن تشمل هذه المصادر: فرجار سهورة، ومقال، وجدول رسم، وأوراق رسم، وأشكال هندسية مرنّة، وأشكال رباعية، وأشكال مضلعة أخرى، وتشكيلات محسوسة منها ذات بعدين يمكن تثبيتها على جهاز الإسقاط الصوتي (OHP)، وآلات حاسبة (بضمنها آلات حاسبة رسومية) وحواسيب وبرامج حاسوبية (الرئيس بينها للتعليم الهندسي هو The Geometer's Sketchpad). تحرى عن توفر هذه الأنواع من المواد عندما تكلف مباشرة بتعليم الصف. وإذا ما كانت الموارد المالية المدرسة محدودة، فيمكن أن تجد مجموعات من الناس قد تساعدك في شراء هذه المواد لمد حاجات صفك.

إدارة الصف Classroom Management
إن مراجعة مساقات إدارة صفك ستساعدك في صياغة وتحديد قائمة بقواعد الصف. تأكد من توصيل هذه القواعد إلى طلابك لكي يدركوا ويعرفوا كيف تأمل أن تكون مسيرة الصف يوماً بيوم. وقبل أن يتعد درسك الأول، عليك أن تقرر كيفية معالجة أية المشاكل النظامية. ويجب عليك كذلك أن تناقش الخطة النظامية هذه مع معلمك المشرف قبل أن يبدأ العام الدراسي لكي تضمن إنك على خط واضح مع أنظمة وقواعد المنطقة التعليمية.

ومصادر شبيكة (انترنت) يجدها طلابك مفيدة. وقد تشمل هذه المصادر مساحة واسعة من المواد للطلاب لكل المستويات والقابليات. ويجب عليك وعلى طلابك كذلك أن يتدأوا جميعاً بمجموعات كتبكم الرياضية. وبالإضافة إلى المنتجات التجارية اللا محدودة، ينشر (NCTM) ويقدّم وسائل مساعدة عديدة متوفرة.

أدرس خطط الدروس السابقة (القديمة)

Study Old lesson Plans

تذكر أن الدرس القديم يمكن أن يكون قد قدم بواسطة معلم محترف. ورغم أن أساليب التعليم قد تطورت عبر الزمن، فقد تكون خطط الدرس القديمة لا تزال مصدراً للتعلم فيما يخص الأسلوب، والطرائق التدريسية، وصياغة الأسئلة، والمعرفة وغيرها.

أكشف الأفكار على الشبكة Find Ideas Online

تعد الشبكة العالمية المتكوبية مصدراً بارزاً لأفكار التعليم وخطط الدروس، والتي يمكن مطابقتها مع خطط الوحدات. إن عدد المواقع والارتباطات (Links) غير محدود عملياً. ويمكنك إيجاد المعلومات حول آخر النظريات التعليمية وخطط الدرس النموذجية، والبحوث المستمرة، وتقديرات مبدعة جديدة لمواضيع قديمة، وغرف مناقشة عن تربيوات الرياضيات، والمزيد بمجرد دخولك على خط الاتصال بالشبكة.

وستصبح الأفكار الخاصة بمشاريع الطلاب، ولخلفات أنواع الدروس، والموارد متعددة الأعلام إنما هي مجرد نقرة عابرة على زر الفأرة Mouse.

وتظهر أدناه بعض عناوين (مشتريكي المصدر الموحد) URLs لواقع الشبكة، والتي توفر كمية ضخمة من المعلومات المفيدة للمعلمين على مختلف مستويات الخبرة والخلفيات، وكذلك الارتباطات (Links) لواقع أخرى مفيدة. أشر هذه وأية مواقع متوفرة تجدها بنفسك عند تشغيل الانترنت.

<http://www.pbs.org/teachersource/math.html>
<http://www.powerlearn.com/home/index.html>
<http://www.enc.org>
<http://www.swarthmore.edu/>
http://lessonplanz.com/lesson_plans/mathmetics/grades_9-12/
<http://www.louisville.edu/~npgnad01/mathfrontpage.html>
<http://ericir.syr.edu/>

تعرف إلى خلفيات الطلاب

Learn Student's Backgrounds

ما نوع الشباب الذين ستعلمهم؟ سيكون بعضهم أذكاء في

الاختبارات الأولية. وهذه الاختبارات الأولية سواء كانت معدة من الدرس أو موجودة في الكتاب الدراسي هي تركز على معرفة فيما إذا كان الطلاب يمتلكون معرفة أساسية لتعلم مفاهيم جديدة مبنية على هذه المعرفة. فمثلاً، إذا كنت تخطط لوحدة عن العوامل فليك أن تتأكد من أن الطلاب يفهمون معنى العامل، أولاً من خلال علاقته بالأرقام فقط (مثلاً، ما هي العوامل الأولية للعدد 30؟) وبمدها بالمصطلحات الجبرية (مثلاً، ما هي عوامل x^2y ؟).

المتطلب المعرفي السابق Prerequisite Knowledge
سوف تعتمد خطة الوحدة التي ستقوم بتدريسها فضلاً تعتمد على دروس تعلم بتسلسل منطقي. ويسمح لك هذا التسلسل بتعريف الطلاب بالمفاهيم التي يركز الواحد منها على الآخر. وقد ترغب، قبل بداية دراسة أية وحدة، ترغب بالتعرف على معلومات الطلاب السابقة والتي ستساعدكم على إدراك المفاهيم التي تقدمها في الدروس الاستهلاية. ويمكن أن يحصل التعرف على معلومات الطلاب السابقة عن طريق

أسئلة عينية لمسح حول الآراء السائدة عن الرياضيات	أوافق بشدة	أوافق	شبه متأكد	لا أوافق	لا أوافق بشدة
1. أجد ممارسة الرياضيات ممتعة جداً.					
2. حل مسائل الرياضيات يضايقني.					
3. أود أن أعمل في مجال الرياضيات بعد أنهي دراستي.					
4. أشعر بعدم الارتياح من المفاهيم الهندسية.					
5. أستمتع بتطبيقات الاحتمالات والإحصاء الموجودة في الجريدة اليومية.					
6. أشعر بتوتر الأعصاب عندما يتوجب علي أداء امتحان في الرياضيات.					
7. أستمتع لمساعدة الناس الآخرين في حل المسائل الرياضية.					
8. لا أشعر بالأمان عندما يتوجب علي حل مسألة رياضية بطريقة جبرية.					
9. أعتقد أن الرياضيات هو أحد أهم المواضيع التي أدرسها.					
10. إن مهارات التحصيل تعزز بدراسة الرياضيات.					
لاحظ أن بعض العبارات إيجابية والأخرى سلبية وهذا يمنح المقيم من إعطاء نوع واحد للإجابة على كل الأسئلة.					

شكل 1-2 نماذج أسئلة لتحريات الاتجاهات الرياضية

2. حاول أن تعرف متى يتم إعطاء التقييمات الشاملة للطلبة بالدرسة كل سنة، ومتى سيتم اختبارهم. تحقق، إن أمكن ذلك، من حصص أو نسب التقييمات هذه التي سوف تكون ذات صلة مباشرة بالمفاهيم التي ستكون مسؤولاً عن تعليمها.
3. قم بمراجعة المواد المتوفرة للاستخدام عندما تقوم بالتعليم. هل إنك ستشارك هذه المواد مع معلمين آخرين؟ هل ستحتاج لإرجاء وإدخال بعض الوقت في سبيل استخدام هذه المواد؟ ما هي المواد التي يكون الطالب مسؤولاً عن شرائها؟ هل هناك خطة بمنح بمساعدة مالية للطلاب الذين ليس بمقدورهم شراء مواد بذاتها؟
4. حاول أن تتطلع على الكتب الدراسية التي اشترتها إدارة المدرسة، وخذها إلى البيت واقرأها. ما هي تلميحتها

التخطيط قصير المدى Short Range Planning

يجب أن يخطط لكل تفصيل صغير أو كبير لفعاليات صفك بصورة دقيقة. وسوف تختلف كمية التفاصيل التي تضعها في خطة درس مكتوبة مقارنة بالتفاصيل التي تحتفظ بها في ذاكرتك تبعاً لسنوات خبرتك وكذلك مع عدد المرات التي تعلم بها مساقاً معيناً. ولكي تضيق شعوراً من الثقة ولتضمن أنك تغطي كل المواضيع بدقة، ابدأ بالتخطيط لدروسك اليومية وفي نهك ما يلي:

1. اقرأ دليل المنهاج أو خطته. وسوف يزودك مشترك التعليمي أو رئيس دائرتك بهذه الوثيقة كي تتمكن من البدء في فهم الأهداف التعليمية، والتي سوف تكون مسؤولاً عنها في نهاية السنة الدراسية.

لكي يكون لديك سجل يومي منظم لدروسك على مدار الفصل الدراسي. ويمكن أن يخدمك هذا الدفتر كدليل في المستقبل أو كسجل للمشرفين أو للآباء وكمساعدة لأي معلم بدليل.

ومع هذا ينصح بكتابة خطط جديدة كل مرة تعلم فيها مساقاً. مما سيعطيك الحرية في تفصيل كل درس حسب الحاجات المعينة للصف الذي يعلم.

إن الدروس تكتب لإتباع شكل معين لا يختلف عن النص الذي يستخدمه المثلث مع تغيير الاتصالات مناسبة تحددها طبيعة الأداء نفسه. ورغم أن خطة درس المعلم تتبع شكلاً أساسياً معيناً، فإن هذه الخطط تختلف نوعاً ما طبقاً لطبيعة الدرس الذي تم التخطيط له.

ويظهر في الشكل الآتي صفحة 43 خطة مقترحة لخطة درس. وليس هناك ثمة ضرورة ملحّة لإدراج كل الأجزاء لهذا الترتيب في كل درس. وفيما يلي توصيفات لمكونات درس معين.

الموضوع Topic

بكتابة الموضوع في بداية خطة كل درس فإنك توضح تركيزك وأنت تخطط للدرس وكذلك عندما تكتبه ببساطة للاستخدام المستقبلي.

المعرفة المسبقة Prior Knowledge

يتطلب هذا الفصل إدراج المادة التي تم تعلمها سابقاً وتلك المطلوبة للدرس الحالي والتي سيكون الطلاب مسؤولين عنها. ورغم أن المعلم ذو الخبرة قد يحذف مراراً هذا الفصل، فإنه ضروري للدرس المبتدئ.

أهداف الأداء Performance Objectives

تحدد أهداف الأداء، الأهداف التعليمية لكل درس. وسوف يساعدك تحديد أهداف الأداء بتكوين الدرس المكتوب لكي تضمن استكشافاً مناسباً وفعاليات تعليمية. أن أهداف الأداء المكتوبة شكلياً: (1). تسمى الفعالية التدريسية التي سيقوم بها الطلاب؛ (2). تحدد الظروف التي في ظلها سيقوم الطلاب بالفعالية؛ (3). تبين كيف سيتم قياس الطلاب لضمان نجاحهم.

لاحتياجات دليل المنهج الدراسي؟. وعندما تقوم بمراجعة فصول معينة لتطوير خطة درسك اليومية، ضع في حساباتك ما ستحتاجه لدعم الدروس لتلبية احتياجات الطلاب البارزين والموهوبين كيف ستقسم دروس الكتاب الدراسي إلى مقاطع أصغر لكي تناسب المتعلمين غير المتأهبين الدراسي لكل مفهوم يعلم فيه؟. هل هناك فرصة كافية مصممة في درس الكتاب كي يُسمح للطلاب بالتمرين على ما تعلموه؟ خذ باعتبارك كيف ستلبي هذه الحاجة

5 راجع قائمة طلاب صفك. هل هناك أي طلاب لديهم أمور استثنائية؟ إن كان الأمر كذلك، هل هناك معلم خاص سيساعدك في تعليمهم؟ ما هي طرق تمرينهم على الدرس أو ما هي المعدات التي سوف تلي وتسد حاجات عوقهم؟ هل لديك معرفة بكتابة أهداف خطط التعليم الفردية (IEPs)؟ فإن لم تكن كذلك، فعليك تعلم كيفية كتابة مثل هذه الأهداف، وتعلم المزيد عن القواعد (الأكاديمية) الوظيفية المطلوبة للتعليم الانتقالي من خطة وكالة التعليم الخاص وضع لنظام مدرستك.

خطة الدرس اليومية The Daily Lesson Plan

تشمل خطة الدرس اليومية الفصل جميع ما ستفعله، وما تتوقع أن يفعله الطلاب خلال فترة الدرس المقررة. ولا بد من خطة درس يومية. يجب أن تفكر من خلال بنية الدرس، والواجبات ذات العلاقة والتي سيشارك الطلاب فيها، وأية مصاعب يمكن أن يواجهها طلابك. وينصح عند المباشرة بكتابة خطط الدروس أن تضمنها تفاصيل عديدة بصياغة محددة ستستعملها لكل ناحية من نواحي الدرس. وسوف تساعد الممارسة الميدانية على كتابة كل تفاصيل الدرس وبسهولة نجاحك كمعلم مبتدئ، ليس لأن من السهل نسيان تفاصيل الدرس فقط، بل كذلك لأنها ستساعدك على رؤية فيما إذا تذكرت تضمين كل خطوة منطقية في الدرس.

ومثلما يقضي ممارس ناجح وقتاً طويلاً بالتدريب على الأداء، يحتاج المعلم تمريناً مكثفاً على الدرس. ولكن الطريقة العملية للمعلم في التمرين هي التخطيط الفكري والبدني على (أداء) (الدرس) على الورق. وستجرب كتابة خطة الدرس الجيدة على الخوض بـ (خبرة غير حية عقلياً) للدرس. ولا تسمح لك هذه الفعالية ببلاوة أفكارك فقط وإنما في توقع الهفوات المحتملة كذلك في الدرس الحقيقي.

ويجب أن تكتب النسخ الأقصر للدروس في (دفتر الخطط)

أمثلة على أهداف الأداء Examples of Performance Objectives

الموضوع	سيقوم الطلاب بـ
إيجاد مساحة أي مثلث	جد المساحة إلى أقرب عشر، لثلاثة مثلثات: منفرج، وحاد، وقائم الزاوية
رسم لدوال مثلثية أساسية	خط رسم الدوال المثلثية الأساسية: جا، جتا، ظا، عند تحديد سعة وتردد ودورة كل منها.
حل تخطيطي لتباينات القيمة المطلقة	ارسم على خط الأعداد، أربعة (و) و(أو) متباينات قيمة مطلقة محلولة جبرياً
مقطع دائرة	جد مساحة وطول القوس لمقطع معروف لدائرة
تقاطعات خطية	استخدم حاسبة تخطيطية لتحديد عدد النقاط للتقاطع لكل واحد من ثلاثة قطوع مخروطية بخطوط مستقيمة.
حالة غامضة	استخدم قانون الجيوب لتحديد فيما إذا كانت المثلثات 0، 1، 2 يمكن أن تنشأ من خمس مجموعات من البيانات.
القياس الدائري	حوّل من القياس الدائري إلى القياس بالدرجات وبالعكس للزاوية المعطاة.

أمثلة على الفعاليات التحفيزية:

1. قد تتكون من مسألة معدة من المعلم، أو مأخوذة من الكتاب. وقد تكون فضلاً نصياً يدرس انفرادياً قبل التحليل بواسطة أي مجموعة صغيرة أو كبيرة.
2. قد تكون واجباً للطلاب في مكان معين من الصف. مثلاً، يمكن سؤال مجموعة صغيرة في الاستمرار على كتابة واجبات سابقة أو مراجعة واجب ما، أو مناقشة مثال يثير التحدي. وهناك المزيد حول الفعاليات التحفيزية في (صفحة 82).

الاستكشاف Exploration

إن قدرة المعلم على خلق جو تعلم فاعل يوفر مناخاً مناسباً يشجع الطلاب على الاستكشاف والتقصي والافتراض واشتقاق النتائج أمر حاسم في تطور الدرس. وكما هو الحال في دروس التلوين الشكلي، حيث يستطيع المرء تعلم أساليب وتقنيات التلوين كذلك الحال في مساقات التربية يستطيع المرء تعلم أساليب وتقنيات التعليم. وفي كلتا الحالتين إن تعلم أن تكون (فناناً)، إذ أنه بعد التمرين التلقيني في هذه المساقات فقط تسود موهبتك. وبعد كل هذا، تكون سنوات الأثنتان الأولى أو الثلاث الأولى كمعلم هي البيئة الأساسية التي تشكل نموك المهني. يجب أن ننظر إلى الواجبات الاستكشافية بوصفها إبداعاتك للرؤية الخلاقة، والتي سترقى بالمفاهيم الجديدة والمهارات والمعرفة والآراء الإيجابية بين طلابك. وستكون اقتراحات المعلمين الآخرين، وكتب النهج المتنوعة، ومجلات NCTM:

الشكل التدريسي Instructional Format

يشير الشكل التدريسي إلى مجموعة تدريسية صغيرة أو كبيرة، وتدرّس النظراء، ومناقشات الصف بأكمله، والاستكشاف الفردي، وعمل المشروع، والبحث المستقل، وتقييم التعلم. قد تشمل دروس المجموعة الصغيرة مراجعة الواجب البيتي، والتحليل، ومناقشة الواجبات الصفية، والخصائص الوسطية والنهاية. ويحين ممثل الصف في الغالب ليميد إلقاء التقارير لكل الصف. ويمكن كذلك الإجابة عن الأسئلة أو الاختيارات تماونياً من قبل مجموعات صغيرة من الطلاب على أن يجيب ويشارك كل طالب في كل العملية.

وتتناسب المجموعات الكبيرة عموماً مع الدرس التطوري أو (الاستكشافي) والمقدمة من المعلم بالعروض التي تشمل الفيديو، أو الأفلام، أو المتحدثين الضيوف، والعروض المتميزة، أو التجمعات الرياضية. وتعد الشفافيات المحضرة، بالجدول، واللوحات، تجعل من جهاز الإسقاط العلوي (OHP) وسيلة مثالية للتواصل مع المجموعات الكبيرة.

الفعالية التحفيزية Motivational Activity

قد تكون الفعالية التحفيزية الأولية للدرس على شكل تمرين (أفعل الآن)، ويمكن كتابتها في نفس الفصل على اللوحة الطباشيرية، يوماً، قبل البداية الرسمية للدرس. وتساعد اللوحة على استقرار الطلاب في بداية الحصة بإعطائهم واجباً يفصلونه عند دخولهم الصف. وستهم حقاً في تنظيم النبرة التعليمية والسلوكية للحصة بغض النظر عن الشكل التدريسي، ومن أجل ذلك تعد أسلوب قيماً للإدارة.

والتطبيقات ستكون أكثر تعميقاً، وأكثر تدخلاً في موضوعات أخرى من المجموعة الأولى للتمرينات. ومن الطبيعي أن تحدد طبيعة الموضوع الخاصة المقصودة نوع المسائل المتضمنة أو المشتلة في تمرين هذا الفصل أو غيره.

الملخص النهائي Final Summary

إن الملخص النهائي هو مراجعة موجزة للنقاط الرئيسية للدرس. ويجب أن يربط المعلم هنا سوية كل أجزاء الدرس. وكما هو الحال مع الإجازات السابقة يمكن تكوين هذا الموجز من الطلاب حين أجابته على الأسئلة الموجهة، أو قد يكون على شكل جمل بسيطة أو قد يكون مزيجاً من كلا النوعين. وفي بعض الأحيان، قد يستنبط سؤال بسيط موجه إلى الصف كالذي سيلي ملخصاً:

(افترض أن زميلك كان غائباً واتصل بك بالهاتف ليسألك عن ماذا كان يدور درس اليوم. ما ستقول عن الدرس بحيث يأخذ زميلك فكرة واضحة عن المواضيع التي فاتها؟)

تقييم Assessment

لا يحتاج بناء الثقة أن يكون محدوداً بالطلاب. فيجب أن يتأكد المعلمون كذلك، أنه مهما كانت الشكالية التدريسية فإن أهداف تحفيز حب الاستطلاع وجعل الطلاب يفهمون ويتقنون الدرس قد تحققت. ويتم الحصول على هذا الأمر من خلال أساليب تقييم الدرس مثل مراقبة تفاعل الصف، والتناغم، والمشاركة في النقاشات، وتقوم الطلاب من خلال الطرائق المتعددة، وحسبان الآراء المكتوبة، وعمل حلقات النقاش مع الطلاب، وإعطاء الاختبارات الجماعية والفردية المكتوبة. وخلال هذه التقييمات يجب أن يكون العلم متلقياً حساباً ومتقوماً لخلفيات الطلاب المختلفة وآرائهم. ولا يمكن أحياناً توقع ردود الأفعال خصوصاً عندما يكون المعلم محفزاً ومثيراً.

التمارين Exercises

بما أن هذا الفصل مهم جداً، فهناك مجاميع من التمارين في الملحق A يمكن استخدامها خلال الفصل، لمناقشتها فيه.

الواجبات البيتية Homework Assignment

ينصح دائماً أن يتم الاختيار والتخطيط لإعطاء الواجبات البيتية وإدراجها في خطة الدرس بعناية وحذر. ويجب أن يصمم الواجب لمساعدة الطلاب في تنقية مهاراتهم الجديدة المكتسبة، وتعزيز الاستقلالية والاعتماد الذاتي، وتطوير رد الفعل ومهارات التفكير الإبداعي. وكوسيلة لبلوغ هذه الغايات، من المتوقع لكل واجب مكتمل أن يكون دقيقاً منظماً مرتباً تماماً كما قدر الإمكان.

مثل معلم الرياضيات وتعليم الرياضيات في المدرسة المتوسطة وتعليم الأطفال الرياضيات (اسمها الرسم معلم الحساب) كلها قيمة جداً في مساعدتك على إيجاد فعاليات صقية مناسبة. أضف إلى ذلك، أن حس الإثارة والتحدى سيجعل من نبوة أدائك مستقرة، وستحقق النتائج الإيجابية الموجودة في السنوات المقبلة.

وكما سيحصل استكشاف الأفكار عندما تطلق تعليقات مفتوحة النهاية، ومحفزة، تجعل الطلاب يفكرون ويتكلمون، يوافقون أو لا يوافقون، ومتعشقين لزيد من المعرفة، وتمكنهم من التخمين أو التحرز. ويمكن أن تستخدم جداول، ورسم، وأشكال، ونماذج مادية، ومقارنات لتطوير المهام الاستكشافية المناسبة. وسيحصل المزيد من الاستكشاف الفكري عندما تمنح الطلاب فرصاً لتسجيل أفكارهم الرياضية في منشورات ومجلات.

أنشطة تدرييب Practice Activities

إن أنشطة التدريس والتي تأتي بعد الاستكشافات الصقية تكون حيث تؤدي النظرية إلى التطبيق. وتوجه الدروس إلى هذه النقطة وتُشكل نماذج مسائل/حلول ويبتعها تمرين جماعي تعاوني صغير أو فردي. ويجب أن تحدد التمارين التطبيقية الأولية في مفاهيم وموضوعات باعتبارها جديدة. ويمكن أن تتضمن التمارين اللاحقة والتي تربط فروعاً رياضية أخرى، مدى واسعاً من الموضوعات الرياضية ومجالات الموضوع المطروق.

الملخص الوسيط Medial Summary

إن الملخص الوسيط هو مراجعة موجزة وسطية للخصائص المهمة للموضوع الذي تم تطويره لحد ما. وقد يحصل في أية نقطة أو نقاط خلال الدرس ولكن قبل الخاتمة. ومن بين الوظائف العديدة التي يؤديها هذا الملخص هو إعطاء فرصة للطلاب الذي لم يتأكد من هدف الدرس، أو من طبيعة ما تم تطويره، وأهميته، أو الذي كان ببساطة شارد الذهن في بداية الدرس، وفاتته الأمور الرئيسة وهو تائه بالوقت الحاضر، ليفهم ويلحق ببقية الصف ويستفيد مما تبقى من الدرس.

الترايطات Connections

والآن وبما أن كل واحد، كما هو المأمول، قد فهم الجزء المناسب من الدرس، وكانت له فرصة للتمرين باستخدام المفهوم الجديد، أو الموضوع بتمارين بسيطة فإن هذا الفصل سينهض بأعباء التطبيقات والتمارين التي تربط المفهوم أو الموضوع الجديد مع تلك التي تم تعلمها سابقاً. إن هذه التمرينات

الخطوط المقترحة لخطة الدرس اليومي Suggested Outline for Daily Lesson Plan

_____ : الصف _____ التاريخ :

الموضوع : TOPIC

المعرفة القبليّة : PRIOR KNOWLEDGE

أهداف الأداء : PERFORMANCE OBJECTIVES

الشكل التدريسي : INSTRUCTIONAL FORMAT

الأنشطة المحفزة : MOTIVATIONAL ACTIVITY

الاستكشاف : EXPLORATION

أنشطة التدريب : PRACTICE ACTIVITIES

الخلاصة المتوسطة : MEDIAL SUMMARY

الارتباطات : CONNECTIONS

الخلاصة النهائية : FINAL SUMMARY

التقييم : ASSESSMENT

الواجب البيت : HOMEWORK ASSIGNMENT

أدوات خاصة لأغراض الاستخدام : SPECIAL EQUIPMENT TO BE USED

بمساعذك على فهم مبادئ كتابة أهداف الأداء.

أهداف الأداء Performance Objective

إن أهداف الأداء هي عبارات تحدد قابليات معينة للمتعلم (تعرف بـ «سلوك الطالب المشاهد»)، عندما يصل أو تصل إلى نهاية نشاط تعليمي معين، سوية مع أية شروط أو تحديدات معطاة. وتشمل كذلك كتابة لعملية التقويم (المعروفة بـ «الحد الأدنى من الأداء المقبول»). وبعبارة أخرى يجب أن تسمي عبارة هدف الأداء في الواقع السلوك الذي سيُشاهد عليه الطالب مؤديه بنجاح، تحت ظروف معينة معطاة عند إكمال أو قبل إكمال الدرس.

كيف تكتب أهداف الأداء

How to Write Performance Objectives

تم تقديم خطة وحدة حول الجذور في بداية الفصل. وستدرس الآن كيف يمكن تطوير مجموعة من أهداف الأداء باستخدام هذه الوحدة كنموذج. وللتمرين على كتابة أهداف الأداء في تحضير وحدة عمل، أو خطة درس يومية أبدأ بـ:

1. اختيار الوحدة (أو الموضوع) المراد تعليمه.
 2. دراسة المقرر والنصوص ذات العلاقة لإيجاد أمثلة مناسبة للدرس.
 3. إدراج الصيغ والنظريات والمفاهيم الرئيسة وما شابه ذلك، والتي يغطيها الدرس.
 4. تحديد الغرض الرئيس للدرس.
- والآن، أنت مستعد لكتابة هدف أداء لكل من المهارات التي يراد تعليمها.

وبعد أن يكتب كل هدف، قارنه بقابليات طلابك. أي، هل أنك تطلب من طلبتك ما لا يطيقون، أو أقل بكثير مما يستطيعون؟ هل أن أهدافك واقعية لنوع الطلاب الذين تعلمهم؟ (قد تؤثر هذه كمستوى (عالي) أو (منخفض) من الأهداف) تذكر أن تكتب أهدافاً واقعية، ولكن شريطة أن لا تجعل آمالك في إنجاز الطلاب منخفضة جداً لكي تتأكد فقط من أن الأهداف سيتم تليتها. تذكر كذلك أن الأهداف يجب أن تكون مكتوبة بشكل مناسب للطلاب على كل المستويات.

إن النموذج التالي يحتوي على بعض أهداف الأداء الممكنة لوحدة في الجذور. وكتبت هذه في شكل عملي وليس في شكل مثالي، لأنه لو أن المعلم قام بتحضير كل هدف في شكله المثالي، فإن الأهداف ستكون مطولة ومزعجة في كتابتها لكل درس.

يجب أن يناقش الواجب البيتي في الصف باليوم التالي، ويمكن مراجعته كفعالية لمجموعة صغيرة أو كبيرة وجميع ليرأه المعلم ويحلله. إن تحليلات المجموعة الصغيرة أو كل الصف مناسبة لاختلاف أنواع الواجبات ويجب أن يقوم المعلم بالاختيار. فليس هناك صيغة ثابتة لأحسن الطرق. إن طبيعة الواجبات البيتية ستناقش لاحقاً في هذا الفصل.

تشمل الواجبات الأسبوعية، أو طويلة المدى، عادة مشاريع تتطلب شكليات خاصة يحددها المعلم. وتتطلب أوراق الواجبات اليومية (التي توزع سلفاً) تخطيطاً كثيراً، ومن المحتمل أنها ستحتاج بعض التعديل خلال مساق الفصل الدراسي. أنظر الملحق B لمزيد من النقاش العميق حول تخصيص الواجبات البيتية.

أدوات خاصة للاستخدام

Special Equipment to be Used

يمكن إدراج المعدات الخاصة للاستخدام خلال الدرس في الخطة. وتشمل هذه المعدات مواداً مثل فرجار سمورة، والجدول الخطية، والأشكال الهندسية، وجهاز الإسقاط الملوي (OHP)، وحواسيب، ووحدات عرض لهذه — الخ. وتفيد هذه القائمة في تذكيرك لما يتوجب توفيره من مواد أو لتحضيرها سلفاً قبل بداية الدرس.

واجبات أو مشاريع خاصة

Special Tasks or Projects

يمكن أن يزين الدرس الحالي (أو الدرس المستقبلي غير البعيد) بشكل كبير ببعض الأعمال التحضيرية التي تنجز إما فردياً أو جماعياً من قبل الطلاب. ويمكن لهذا المشروع أن ينجز على شكل استقصاء، أو تمرين جمع البيانات، أو تقرير تاريخي. أو ربما على شكل دراسة مستقلة حول موضوع ذي صلة. ويمكن أن تظهر مثل هذه الأنشطة على شكل تقرير أو بحث قصير أو لوحة أو تقرير شفوي جماعي أو مزيج من هذه الأشكال جميعاً.

التمعن القريب في مكونات الدرس

Examining Lesson Components More Closely

نظراً لوجود أهمية خاصة بكل جزء من الدرس، سوف نقضي بعض الوقت في هذا الفصل مركزين على أنواع معينة من التخطيط والتي قد تصادق أثناء كتابة الخطة. من الضروري أولاً أن نأخذ بعين الاعتبار أهداف الدرس، لذا سوف نبدأ

نموذج موضوعات الأداء لوحدة عن الجذور

1. الأسس والجذور Powers and Roots

سيقوم الطلبة بتسمية الأساس، والأس، والقوى لأي صيغة بالصيغة التالية A^b (مستوى منخفض).
وسيعمد الطلبة إلى تقدير أربع صيغ مثل: 5^3 ، 16^2 ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt[3]{8}$.
سيستخدم التلاميذ آلة حاسبة لاحتساب قيم أربع صيغ مثل $\sqrt{576}$ (مستوى عالي).

2. نظرية فيثاغورث ومعادلات تربيعية Quadratic بالصيغة الآتية: $x^2=3$ ، $x^2=9$

سيقوم الطلبة بعرض نظرية فيثاغورث (مستوى منخفض).
سيقوم الطلبة بإيجاد طول أحد أضلاع المثلث قائم الزاوية بعد إعطائهم طولي الضلعين الآخرين، مقربين إلى أقرب مرتبة عشرية (سيجدون الآلة الحاسبة متوفرة).
سيجد الطلبة جذر الصحيح الموجب Positive Integral Root لكل من المعادلات الثلاثة مثل: $x^2=9$.
سيجد الطلبة الجذور الموجبة لكل من المعادلات الثلاث مثل $x^2=12$ ، إما بالإبقاء على الإجابات بشكل جذري، أو بتقريبهم إلى أقرب رقم عشري. (يمكن استخدام الآلة الحاسبة).

3. تبسيط الجذور Simplifying Roots

سيقوم الطلبة بكتابة ثلاث صيغ مثل: $\sqrt{9x^2}$ ، $\sqrt{27a^4}$ ، $\sqrt{20y^3}$ بأبسط صيغة جذرية.

4. جمع وطرح الجذور Adding And Subtracting Radicals

سيقوم الطلبة إلى ربط الجذور بثلاث صيغ مثل: $2\sqrt{3} + \sqrt{27}$ وعرض النتيجة بأبسط صيغة جذرية ممكنة.
وسيعمد الطلبة إلى ربط الجذور بثلاث صيغ مثل: $3\sqrt{18C^3} - 5C\sqrt{2C}$ وكتابة الأجوبة بأبسط صيغة جذرية ممكنة. (مستوى عالي)

5. ضرب الجذور Multiplying Radicals

سيقوم الطلبة بإيجاد قيمة لصيغتين مثل $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ بدون استخدام جداول الجذور التربيعية Square Root Tables، أو الآلة الحاسبة، أو خوارزميات الجذور التربيعية.
سيقوم الطلبة بإيجاد القيمة، وتقريبها إلى أقرب مرتبة عشرية، لكل من الصيغتين مثل: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}$ باستخدام آلة حاسبة لمرة واحدة فقط.

6. قسمة الجذور Dividing Radicals

سيقوم الطلبة بإيجاد القيمة لثلاث من الصيغ مثل: $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ بدون استخدام جداول الجذور التربيعية، أو آلة حاسبة، أو خوارزميات الجذور التربيعية.

7. حذف مقامات الكسور Rationalizing Denominations

سيقوم الطلبة بالتعبير عن كل من الكسرين مثل $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ككسر مكافئ Equivalent fraction مع مقام الكسر القياسي.

سيقوم الطلبة بالتعبير عن كل من الكسرين مثل $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ككسر مكافئ مع مقام الكسر القياسي.

سيقوم الطلبة بالتعبير عن كل من الكسرين مثل $\frac{2}{\sqrt{3}-2}$ ككسر مكافئ مع مقام الكسر القياسي.

8. حل المعادلات الجذرية Solving Radical Equations:

سيقوم الطلبة بحل معادلتين مثل: $\sqrt{x-1} = 2$, $\sqrt{x} - 3 = 5$ وفحص الأجوبة بأسلوب التمييز.

سيقوم الطلبة بحل معادلتين مثل $\sqrt{x-1} - 1 = 3$ وفحص الأجوبة بأسلوب التمييز.

9. مراجعة Review:

ينبغي على الطلبة الإجابة بصورة صحيحة على عشرة من الأسئلة الاثني عشر الآتية (كحد أدنى، وخلال أربعين دقيقة:

أ. احسب 3^3 , 14^2 , $\sqrt{25}$, $3\sqrt{27}$.

ب. جد الجذر الموجب للمعادلة $x^2=21$ وقربه إلى اقرب مرتبة عشرية.

ج. لديك مثلث قائم الزاوية بساق طوله 8، ووتر طوله 17. جد طول الضلع الآخر.

د. استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد الجذر الموجب للمعادلة $2x^2=10$ وقرب النتيجة إلى اقرب مرتبة مئات.

هـ. حل المعادلة الآتية للمتغير x بدلالة a : $x^2=9a^4$

و؟ حل المعادلة الآتية للمتغير x وضع الإجابة بأبسط صيغة جذرية ممكنة: $x^2=24$.

ز. صف ما يلي بأبسط صيغة جذرية: $\sqrt{8y^4}$, $\sqrt{18a^5}$ وتأكد من النتيجة بتربيع الإجابة.

ح. اربط وعبر بأبسط صيغة جذرية $5\sqrt{2} - \sqrt{8}$.

ط. ركب وعبر بأبسط صيغة جذرية $3a\sqrt{2a} + \sqrt{8a^3}$.

ي. بدون استخدام الآلة الحاسبة، جد قيمة $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$.

ك. عبر عن $\frac{3}{\sqrt{2}+1}$ بكسر قياسي المقام.

ل. حل المعادلة وتحقق بواسطة التمييز $\sqrt{x-2}=3$.

10- تقييم Assessment:

سيمكس هذا الأمر أهداف المراجعة للدرجة في الفقرة 9 عن طريق طرح مجموعة أسئلة تظهر بان كل هدف قد تم الوصول إليه.

تمارين Exercises

استخدامها في كتابة هدف الأداء. أكتب اثني عشر آخرين ولكنها واضحة يمكن استخدامها في كتابة أهداف الأداء بوضوح.

3. فيما يلي أربعة أهداف أدائية (ليس بالضرورة أن تكون جيدة). أكتب سؤالين يختبران كل هدف لتحديد فيما إذا كان قد تحقق أم لا. أكتب كذلك إن كان كل هدف قد تم تصميمه بشكل جيد.

أ. سيكتب الطلاب منطلق ومدى الدالة بإعطائهم رسم الدالة.

1. افترض أن مشرفاً زارك في صفك وسأل إذا كانت أهداف أداء طلابك المتوقع إحرازها خلال الأسابيع الماضية. سيختار عندها بصورة عشوائية طلاباً لاختبارهم طبقاً للأهداف.

أ. هل أن هذه الطريقة عادلة في قياس فعاليتك؟

ب. هل ستختار أهدافاً منخفضة المستوى من الآن فصاعداً لنضمن فرصة أفضل في إظهار نجاح طلابك؟

ج. هل تعتقد أن معرفة ما يفعله مشرفك دورياً سيجعل منك معلماً أكثر فعالية؟ علل جوابك!

2. اكتب قائمة باثنتي عشر فعلاً غامضاً جداً وغير واضح لفرس

- ب. سيفهم الطلاب كيفية حل معادلة تربيعية بأسلوب
(إكمال المربع)
ج. سوف يعرف الطلاب متوازي الأضلاع، والمستطيل،

- والمربع، والمعين.
د. سوف يقدر الطلاب (التعامل غير المباشر) في الهندسة.

بأعفاء العمل بكامله. يتطلب التعاون الصحيح في عملية التعليم إرشاد المعلم والذي يستطيع مساعدة الطلاب على فهم آلية المجموعة ويسعى في تطوير المهارات التعاونية التي يحتاجونها ويتعلمون الرياضيات من خلال العمل في مجموعات.

ويغيد التعلم التعاوني بوجود الأقران من الطلاب ويشجع التفاعل بين الطالب وزميله، ويعني علاقات تكافلية بين أعضاء المجموعة. ويتعلم الطلاب في الجامعات الفاعلة كيف ينصتون لآراء الغير، وكيف يناقشون ويرفضون، وكيف يقدمون، ويقولون النقد البناء من زملائهم، وكيفية الشعور بالراحة وعدم الخوف من الوقوع في الخطأ.

كيفية تكوين وتشكيل مجموعات تعليمية صغيرة

How To Structure Small Learning Groups

يمكن تشكيل المجموعات التعليمية الصغيرة بمدة طرائق. وتُعطي أدبيات الموضوعات العديد من الأساليب التي درسها وطورها الباحثون والمعلمون وقد صممت كل واحدة من هذه الطرائق لضمان وجود اعتماد إيجابي داخل كل مجموعة، والتزام فردي، وتخطاب كلامي وجهاً لوجه، وتفاعل اجتماعي إيجابي. وتتوجه الأساليب إلى أربع محاور وهي: تشكيل المجموعة، وتصميم الواجبات (المهام)، وأساليب المكافأة، والمعالجة الجماعية.

تكوين المجموعة Group Formation

يدرك ذوو الخبرة في مجال مجموعات التعلم الصغيرة أن تشكيل المجموعة مسألة مهمة لفعاليتها- ولغرض زيادة الفائدة من هذا التعلم فإن العضوية يجب تكون متنوعة فيها سواء فيما يخص القدرات أو الخصائص الفردية. ويجب أن تبقى المجموعة ما يكفي من الوقت لتطوير التماسك أو التماسد. إن المجموعة الناجحة ستكون صغيرة ما يكفي لكل واحد حسب حاجته لها، وكبيرة ما يكفي للسماح بتنوع الأفكار والمهارات.

إن الطريقة الأكثر فاعلية في ضمان التنوع هي تنظيم المعلم للمجموعات. بصورة عامة يعد المعلمون أكثر الأشخاص معرفة بطلابهم، ويمكن أن يضموا الذين يذكرون مع الذين لا يذكرون، والطلاب ذوي التوجه الترميني مع غيرهم من ذوي عدم التوجه الترميني، والطلاب ذوي القابليات العالية مع المتوسطة والمنخفضة، والأغلبية مع القلة، ومتحدثي الإنكليزية

الأشكال التدريسية Instructional Format

يتطلب التعليم صنع قرار حول الشكل التدريسي الأكثر ملائمة لتعليم دروس معينة. يحتمل أنك قد تعلمت الفروقات بين مختلف الأشكال التدريسية من ضمنه التدريس المباشر، والمحاضرات، والمناقشات التي تعقب المحاضرة، والاكتشاف أو التعليم التساؤلي.

ولأننا ندرك بأن لديك الأساس في هذه الطرائق من مساقات مناهجك فإننا سوف لن نراجعها جميعاً. وعلى أية حال، هناك مدخل تعليمي واحد- التعلم التعاوني- والذي هو فعال خصوصاً لدروس الرياضيات. وبصورة عامة يشجع التعاون والتفاعل الاجتماعي بين المجموعات الطلاب لدعم تعليم أحدهم الآخر. سيتحدث الطلاب في النشاطات الجماعية التعاونية جيدة التنظيم وسوف يتحدثون ويستمعون إلى أفكار بعضهم البعض عن الرياضيات، ويدققون فهمهم، ويساعد أحدهم الآخر على الاستمرار بالواجب، ويقدمون الدعم للذين يعانون من الفهم البطيء أو نقص الفهم. فضلاً عن ذلك، يتجسج التجمع التعاوني في تنمية المهارات الاجتماعية، وقبول الاختلاف في القدرات (الموهب)، والإنجاز، والانتماء، والجنس.

ما هو التعلم التعاوني؟

What is cooperative learning ?

يتعدى التعلم التعاوني إلى ما وراء مجرد وضع الطلاب معاً في مجموعات صغيرة وإعطائهم واجباً. فهناك عناصر معينة ضرورية لضمان أن الطلاب عندما يعملون في مجموعة فإنهم يعملون بتعاون. في البداية، يجب أن يدرك أعضاء المجموعة الصغيرة بأنهم جزء من فريق ولكل منهم هدف مشترك واحد. ثانياً، يجب أن يدرك أعضاء المجموعة أن المسألة التي هم بصدد حلها هي مسألة تخص المجموعة وأن النجاح أو الفشل في حلها يشمل كل الأعضاء. ثالثاً، لتحقيق هدف المجموعة يجب أن يتحدث الأعضاء جميعاً مع بعضهم ويتقدمون في النقاش حول كل المسائل. وأخيراً يجب أن يكون واضحاً بأن عمل كل عضو له تأثير مباشر على نجاح المجموعة. من أجل هذا يمتاز العمل الفرقي بأهمية قصوى.

لا يعد جلوس الطلبة سوية في مجاميع جواً تعاونياً وهم يعملون على المسائل انفرادياً، أو يتكرون شخصاً واحداً ينهض

تؤخذ صور للمجموعات، ويدعى الطلاب إلى وضعها على ورقة ترتيبها المجموعة بنفسها ومن ثم توضع على لوحة النشرة. وسوف يسهم هذا الأمر في إضافة الدفء، والمتعة لتكونهن جزءاً من مجموعة تعليمية واحدة.

Task Designs المهمة

لنجاح المجموعة التعليمية الصغيرة، يجب على الطلاب أن يتصوروا أنفسهم وكأنهم يعتمدون على بعضهم البعض، وأن يتواصلوا، وأن يكونوا مسؤولين عن العمل بشكل فردي. ولزيادة فرص تواجد مثل هذه الظروف، يجب أن تصمم مهام (واجبات) المجموعة بعد تفكير عميق.

ويقتسم أعضاء المجموعات الأخرى المسؤولية في تعلم كل فرد. ويتوقع من أعضاء المجموعة أن يساعدوا ويشجعوا بعضهم البعض. ويكون التأكيد على العمل والتعلم معاً، مع ذلك، يبقى الأفراد مسئولون عن تعلمهم ومساهماتهم الفردية في المجموعة. وهكذا يكون كل فرد في المجموعة مسؤولاً عن إجابة المادة. ويكون الأعضاء مسئولون بشكل فردي، ويتوقع تعلمهم، وكذلك مشاركتهم في عمل المجموعة.

إن إحدى الطرق التي تضمن مشاركة جميع طلاب المجموعة في الواجب تكمن في تقسيم المهام الوظيفية بطريقة يكون فيها كل طالب مسئول عن عمل أو أداء جزء واحد من العمل، وبحيث لا يمكن أن يكتمل واجب المجموعة إلا بمشاركة كل طالب بجزء من الواجب المناط بها.

ولتحقيق هدف المجموعة، أو إكمال مهمتها يجب أن يتحمل كل فرد مسؤولية البقية لتعلم المفاهيم والمهارات. ويجب أن تصمم واجبات المجموعة التعاونية كي تكون سلمياً يخدم التعلم. ويجب أن تفهم العمليات والإجراءات بوضوح من بعض الأعضاء من كل مجموعة لكي يستطيعوا المساعدة في تعلم الآخرين. كما ويحتاج أعضاء المجموعة للتدريب على ما تعلموه. ويعتمد التعاون على التبادلية، ويتطلب استمرار علاقات العمل المؤثرة بين أعضاء المجموعة من كل طالب أن يقدّر قيمة تبادل المعلومات، كما ويجب أن يكون كل طالب مستعداً للتعلم مثلما يأخذ.

Reward Structures أساليب المكافأة

توفر أساليب المكافأة الذي صمم بصورة جيدة حوافز إضافية للسلوك التعليمي لدى المجموعة الصغيرة بين الطلاب. فمثلاً، بعد أن تلم المجموعات واجباتها، يتم تقويم ناتج كل مجموعة من لدن المعلم والطلاب، ويسجل إنجاز كل مجموعة على لوحة يراها جميع الطلاب. ولضمان المسؤولية الفردية،

مع غير متحدثيها، والمعاين مع غير المعاقين، والإناث مع الذكور. كما ويمكن سؤال الطلاب حول رغبتهم في الانضمام مع من يحبون من الزملاء. ويمكن المعلم أن يأخذ هنا بعين الاعتبار عند تشكيل المجماميع. ومن الضروري جداً أن يكون الطلاب مرتاحين ومسؤولين في مجموعاتهم إننا ما أريد لهم العمل بشكل جيد.

ومن إحدى مقاييس نجاح المجموعات استقراها. ويأخذ التماسك وقتاً ليتطور في المجموعة. وعندما يعلم الطلاب أنهم سيبقون في المجموعة سويماً لبعض الوقت فإنهم يدركون أن عليهم تحسين مهاراتهم المرتبة المتبادلة لكي يستطيعون العمل بشكل فعال. وقد تبني مجموعات التعلم الصغيرة سوية خلال وحدة عمل كاملة، أو فصل، أو سنة. ورسم أن من الضروري بقاء المجموعات سوية، وتعلمهم كيفية العمل بشكل إنتاجي متناغم، فإن التغييرات يجب أن تجرى إذا لم تعمل بعض المجموعات بشكل جيد. وعندما يكون الطلاب غير راضين أو مرتاحين مع أعضاء مجموعاتهم فمن غير المحتمل إمكانية مشاركتهم في التعبير الحر واستكشاف الأفكار. لذا من الضروري أن يبقى المعلم على علم بسلوك ومواصفات كل عضو في المجموعة. وإحدى الطرائق لتحقيق ذلك ستكون بمراقبة تفاعل الطلاب مع بعضهم في المجموعة.

وقد تبدو المجموعة وكأنها تعمل بصورة جيدة ولكن الشاهدة قد تكون خادعة أحياناً. فقد لا تكون المجموعة تعمل بصورة جيدة كما يبدو. ويمكن أن يطلب من الطلاب استخدام المجلات (النشرات) لتبادل شعورهم حول مجموعاتهم والطريقة التي يعملون بها داخلها. يجب أن يعلقوا على المساعدة التي تلقوها أو التي أبدوها داخل المجموعة. ويجب أن يقرّر الطلاب والمعلم معاً متى وفيما إذا كان يجب استبدال تشكيلات المجموعة.

ويؤثر حجم المجموعة على قابليتها كي تكون منتجة. وقد أظهرت التجربة أن المجموعات المكونة من ثلاثة إلى خمسة طلاب تعمل جيداً. ولا يجب أن تكون المجموعة التعليمية كبيرة جداً. فلو كان عدد المجموعة كبيراً عندها يصعب عملها بصورة فعالة أمر صعب. ويعمل الطالب الأعلى صوتاً للسيطرة ويتراجع الهادئون إلى الخلف. ويكون من الصعب في المجموعة الكبيرة لكل طالب أن يطلق أفكاره. فضلاً عن أنه من الصعب على المجموعة الكبيرة أن تكون منظمة لتنسيق عملها وإفرادها للوصول إلى حالة التناغم.

ولزيادة الشعور بالصدقة الحميمة، فقد تطلق المجموعة على نفسها اسماً. وفي حالات استقرار المجماميع، فيمكن أن

يكونون عادة صامتين سيمشرون أن المجموعة تعتمد عليهم بالمشاركة في فعاليتها. أنها مسألة (الكل للفرد والفرد للكل) لأن هذا ما يجعل نجاح المجموعة ممكناً. فضلاً عن المكافآت الأساسية التي يمارسها أعضاء المجموعات التعاونية الناجحة، يمكن تقديم حوافز إضافية. فيمكن أن يمنح أعضاء المجموعات الناجحة شهادات. كذلك يمكن وضع أسماء المجموعات الناجحة للشهر على لوحة النشرة. ويكون الطلاب متحفزين دائماً لتحسين درجاتهم، ولكن مكافئة الطلاب بهذه الطريقة يجب أن تتم بمنية. إن إحدى الوسائل الفعالة هي تشمين (التعاون) كنسبة مئوية لدرجاتهم النهائية. عندها يمكن أن يمنح أعضاء الفريق نقاط (تعاونية) إضافية.

Group Processing المعالجة الفرقة

على المعلم مساعدة الطلاب ليدركون أن المجموعة كي تعمل بصورة جيدة، لا بد لأعضاء أن يشعروا بالحرية في التعبير عن آراءهم والسؤال وتوضيح الاختلافات. وهكذا، لا بد أن يتمتع كل شخص بالصبر وضبط النفس. ومتى ما تمت مناقشة كل الأفكار، حينها لا بد أن يرغب أعضاء المجموعة بالموازنة- تكامل مختلف النواحي في حل مجموعة فرد مقبول للكل. إن الاتفاق قد يكون صعباً وليس غالباً ما يتحقق بسبب تجارب الطلاب التعليمية السابقة.

وليس غريباً أن تنشأ الاختلافات والتباينات حتى ولو كانت المجموعة تعمل بشكل تعاوني. ويحتاج أعضاء المجموعة إلى المهارات لمعالجة مثل هذه النزاعات. كما ويجب على المعلمين مساعدة الطلاب في فهم حقيقة أن أعضاء المجموعة ينبغي أن يكونوا ناقدين للأفكار وليس للناس. وعليهم أن يفهموا أن النزاع أو الاختلاف يقوي الفهم ويساعد المجموعة في الوصول إلى الإجماع. كما ينبغي كذلك أن يتعلموا أهمية الإنصات لما يقوله أعضاء المجموعات الأخرى، وفهم الأفكار التي لا يتفقون معها. إن مثل هذه المهارات في إدارة الخلافات مهمة جداً لعمل أية مجموعة.

وعلى المعلمين أن يراقبوا المجموعات في تقديمها ويقدموا النصح والإرشاد متى كان ذلك ضرورياً. وعندما يكون أداء المجموعة ضعيفاً، فيجب أن يتدخل المعلم لمساعدة الطلاب بالمهارات التي يحتاجونها. ومتى ما تم تشخيص هذه المهارات ومناقشتها، عندها سيري المعلم كيفية أداء المجموعة وفيما إذا كانت تعمل بفاعلية أكبر. ويجب أن يوفر المعلم التغذية الراجعة لكي يعلم الطلاب مدى إجابة أدائهم. ويمكن أن يطلب المعلم من المجموعة أن تراقب أدائها بنفسها من خلال

تتال المجموعة درجة كاملة على نتائجها، فقط، إذا ما استطاع طالب يتم انتخابه عشوائياً من إيضاح الحلول بصورة كفوة. وهناك عدة طرائق لتسجيل واحتساب ما تنتجه المجموعة، بناءً على طبيعة الواجبات. ويمكن أن يشتمل التسجيل احتساب عدد الحلول الصحيحة، أو التقييم الكمي لاستراتيجية الحل مع درجة بحرف، أو تصنيف العمل من كل مجموعة. ويمكن أن تتنافس المجموعات فيما بينها أو تجاهد لتلبية مقياس معين موضوع سلفاً. ويجب الانتباه لئلا تؤدي هذه المنافسات إلى رجوع الأعضاء الضعاف إلى المقاعد الخلفية أو الأدوار السلبية، بل يجب أن يكونوا فعالين أكثر من الطلبة المشاركين.

ويكون الطلاب العاملون في مثل هذا التركيب متلهفون على الدوام لفحص أحدهم الآخر للتأكد من أن كل فرد في المجموعة يفهم المادة ويتوافق مع النتائج والاستخلاصات، وهو قادر على تمثيل المجموعة، بأن يكون المتحدث عنهم. ويطلب الطلاب المساعدة من بعضهم البعض في التوضيح، ويسألون الأسئلة ويجيبون عليها. إن نوع التفاعل الكلامي هو عامل مهم في نجاح المجموعة.

إن الطريقة (الإستراتيجية) المحفزة الأخرى هي فرق الطلاب - تقسيمات الأداء (STAD). يقدم المعلم رسماً، وبمدها يلتقي الطلاب في فرق من أربعة أو خمسة لإكمال مجموعة من أوراق التمارين حول الدرس. ويؤدي في حينها كل طالب امتحاناً عن المادة. وتعتمد تسجيلات أداء الطلاب المشاركين عن فرقهم على الدرجة التي طوروا فيها دوراتهم الفردية الماضية. وهناك طريقة أخرى وهي فرق -الألعاب- المنافسة (TGT) وهي تشبه الـ STAD ولكن بدلاً من أداء الامتحانات السريعة يلعب الطلاب ألعاباً رياضية كممثلين عن فرقهم. ويتنافسون مع بقية الطلاب الذين لهم نفس مستوى الأداء.

وبهذه الأنواع من أساليب المكافأة يشجع الطلاب لا ليهتموا بأنفسهم فقط وإنما ببقية أعضاء المجموعة أيضاً. ويشارك الطلاب في التعليم الودي (الأقراني) لأنهم سيعتفون بأن كل عضو في المجموعة يجب أن يفهم المادة. ويترك كل طالب أن المجموعة تتوقع من كل عضو إكمال الواجب المقرر وأن يسهم في المجموعة. ويساعد الطلاب أحدهم الآخر. ويوضح أحد الطلاب مفهوماً صعباً لطالب آخر بطريقته الخاصة. ويشارك أعضاء المجموعة المراجع والمصادر، ويعملون كمرجع لأحدهم الآخر، ويشجع بعضهم البعض للمشاركة. وحتى أولئك الذين

نقاش المجموعة بصورة دقيقة عن فهمه. إن الطلاب قادرين على تحضير أنفسهم وأعضاء المجموعة الآخرين للاختبار القادم. ومرة أخرى، تتلق كل مجموعة على الحلول للمسائل ويسلمون ورقة مجموعة واحدة. ويعطي المعلم ما يكفي من الوقت لكل الصف لمناقشة تلك النواحي التي تحتاج للإيضاح.

ومن الضروري كذلك أن يحدث التعلم بعد أن يرجع الاختبار! ويستطيع أعضاء المجموعة أن يساعدوا بعضهم البعض لفهم وتصحيح أخطاءهم. وقد يمنح الطلاب الفرصة كذلك لإعادة تسليم المسائل التي حدث فيها الخطأ، بشرط أن يحلوا كل مسألة بصورة صحيحة، وأن يوضحوا لم كانت حلولهم الأصلية خاطئة، وأن يعطوا تبريرات لحلولهم الجديد بإعطائهم إيضاحاً مكتوباً للمعالجات الفكرية التي استخدموها. يمكن لهذا الأسلوب أن يوازن التفاعل الطبيعي للعديد من الطلاب، والذين كانوا سيقبلون الخطأ الماضي، فقط للتحرك قدماً للمهمة المقبلة، حيث تنتظمهم (مهمة نظيفة). يمكن حينها أخذ الاختبارات بالحسبان وأن تكون درجة نهائية بأخذ معدل متوازن لدرجات الاختبار الأول والثاني. وربما يمكن استخدام الاختبار الأول كمثلث الدرجة والثاني كمثلث.

الدرس الموجه بالواجب

The Task-Oriented Lesson

في الدرس الموجه بالواجب، تنشأ مفاهيم جديدة وأساليب أو تعميمات خلال مسيرة مهام ما قبل الواجب (الدرس). ويقدم المعلم بصورة نموذجية تقديماً، وبعدها يطلب من الطلاب أن يطبقوا معرفته الجديدة بتطبيقات مشابهة تخصهم. ويمين الدرس تطبيقات بالأسلوب المعتاد مانحاً الطلاب الوقت للعمل عليها بشكل فردي. وبدلاً من دعوة الطلاب جميعاً إلى الصف للمراجعة الجماعية لما قدموه، يلتقي الطلاب في مجموعات للمناقشة والمناقشة على العمل المخصص لهم. وتكون كل مجموعة مسؤولة عن تسليم نسخة واحدة من الحلول المتفق عليها. وبعد أن يسلم العمل، يدير المعلم نقاشاً لتلك التطبيقات التي تحتاج إلى توضيح وكواجب إضافي، وقد يطلب من المجموعة الإجابة على سؤالين: (ماذا تعلمنا اليوم ما لم تكن نعلمه سابقاً؟)، و (وماذا أردنا أن نعرف كنتيجة لعمل اليوم؟). وتعطي الأسئلة المقترحة الفرصة لكل مجموعة لتلخيص الدرس، كما وتزود المعلم بتقنية راجعة للتخطيط المستقبلي. ويعطي سؤال المجموعات بكتابة جملة أو اثنتين حول ما تعلموه في يوم معين الفرصة للطلاب للإظهار، وللمعلم لتقييم أثر الدرس.

الإجابة على الأسئلة التي تتعلق بسلوك وعمل المجموعة. هل أن كل عضو يشارك في العمل؟ وهل أن الطلاب يتعاونون فيما بينهم؟ وهل إنهم يديرون ويعالجون الخلافات بصورة جيدة؟

دور المعلم في إدارة تعلم المجموعة الصغيرة The Teachers Role in Managing Small-Group Learning

يلعب المعلم دوراً حيوياً في تحقيق تعلم المجموعة الصغيرة الفاعل. وقبل أن يطلب من الطلاب العمل في مجموعات، يجب أن يعطي المعلم توضيحاً حول الواجب، والوقت المخصص للنشاط، والتطلعات التعليمية للمجموعة، والسلوكيات التعاونية المرجوة، والخطوات التي يجب اتباعها، وبينما نجاح المجموعة. وعلى المعلم، كمدير للصف، أن ينتبه إلى أن الصف منظم بطريقة تضمن تقارب أعضاء المجموعة بما يكفي للعمل سوية وبراحة تامة. ويجب أن تكون المجموعات منفصلة عن بعضها كي لا تتداخل فيما بينها.

وخلال عمل المجموعة يصعب في الغالب اجتذاب انتباه الطلاب. ومن الطرق التي لا تستدعي رفع الصوت هي أن يرفع المعلم يده ويطلب من الطالب الذي يلاحظ اليد المرفوعة أن يفعل الشيء نفسه ويتوقف عن الكلام. بعدها يجب أن يفعل كل طالب الشيء نفسه حينما يرى يد طالب آخر مرفوعة. ويتوقف هذا التفاعل المتسلسل عندما يرفع الجميع أيديهم ويصبح الصف هادئاً ومستعداً للانتباه للمعلم. يجب أن تنفذ هذه الطريقة بحذر وبعد تفكير عميق كي لا تبدو صيانية جداً للصفوف الثانوية العليا.

وعندما يحس المعلمون أنهم أصبحوا مرتاحين من طريقة تعلم المجموعة الصغيرة، يمكن بعدها أن يقرروا بأنفسهم ما هو الأفضل لتسهيل العملية وما يلي بعض الاقتراحات لطرق بسيطة للبدء.

كيفية دمج تعلم المجموعة الصغيرة بدرس الرياضيات How to Incorporate Small Group Learning into Mathematics Class

اختبار تمهيدي/مراجعة

يناسب تركيب المجموعة الطلاب لمساعدة بعضهم البعض للتحضير للاختبار. ويمكن تخصيص اختبار عينة للواجب البيتي. عندها يلتقي الطلاب في مجموعات ليناقشوا الاختبار العينة ويعمقوا فهمهم للمفاهيم والأساليب التي سيختبرون بها. وبالمثل على الاختبار العيني بشكل فردي، يأتي كل طالب إلى

فمثلاً يمكن أن ينظم العمل في طرائق مختلفة، أو يمكن أن تعطى مسألة للمجموعات والتي يجب أن تحل في نهاية الأسبوع. وفي نهاية الأسبوع، تقدم المجموعات التي تدعي أنها حلت المسألة حلولها. ويختار المعلم متحدثاً عن كل مجموعة يقدم الحل بصورة فرضية قبل أن تحصل على درجة لحلها المسألة.

ولحل المسائل الجماعي فوائد عديدة. ويشارك أعضاء المجموعة في ما يسمى (العصف الذهني) وهي فعالية تمكن كل الأعضاء من المشاركة في طرح الآراء الحرة. وهنا يمتلك الطالب الضعيف في حل المسائل الفرصة للمشاركة في عملية حل المسائل مع بقية الأقران القادرين على ذلك. لا يتعلم كل الطلاب كيفية حل المسائل فحسب، وإنما يشاركون كذلك في التمتع التي تحظى بها المجموعة عندما تحل المسألة.

الإثراء Enrichment

يعد العمل الجماعي طريقة ممتازة لدمج خبرات الإثراء في درس الرياضيات، ولتحفيز اهتمام الطالب في موضوع جديد، يمكن أن تبحث مجموعات تعليمية صغيرة في التطورات التاريخية للموضوع. ويجب على أعضاء المجموعة تصميم العمل بينهم. فمثلاً يمكن أن يبحث أحد الطلاب في تاريخ بداية الموضوع، ويكون الآخر مسؤولاً عن بيان الرياضيين الذين كان لهم دور فاعل في تطور الموضوع. وربما تحتاج المجموعة لشخص يبحث في النواذر والحوادث التي لها علاقة بالموضوع وأخيراً، قد يكون ممتعاً لأحد الأعضاء أن يبحث في كيفية تأثير معرفة هذا الموضوع على العالم. ويمكن وضع المشروع هذا على اللوحة الجدارية الدورية.

ويمكن للمجموعات التعليمية الصغيرة الاندماج في الرياضيات الإبداعية والتي تتحدى الطلاب بحل المسائل بصورة إبداعية. (انظر الفصل الرابع في حل المسألة)

نموذج درس لعمل مجموعة تعاونية

Sample Lesson for Cooperation Group Work

حل معادلات جذرية Solving Radical Equations

يمكن أن يدرس أي درس ضمن مجموعة. وكما نوقش سابقاً، فإن هناك أكثر من سبب مختلف وراء اقتراح درس يتعلم تعاوني. سنقوم في هذا المقام بتناول درس رقم (7) من مقترحنا بخصوص مخطط وحدة حول موضوع الجذور مع اقتراح مخطط درس يستخدم التعلم التعاوني. لهذا السبب، فمعد حل المعادلات الجذرية، اقترحنا مجاميع تتألف كل منها من خمسة طلبة. إن تقسيم طلبة الصف إلى مجاميع غير متجانسة Heterogeneous سيمنح فرصة التواصل المختلفة دون الحاجة إلى التمويل على قادة الصف لاستبعاد البقية. وبعد تنظيم الصف وتقسيمه إلى مجاميع غير متجانسة، قم بتوزيع نسخة واحدة من ورقة العمل الآتية لكل مسجل مجموعة. رتب المسائل لتمكين الطلبة من إيجاد الإجراءات المطلوبة لحل المعادلات الجذرية.

لكل مما يأتي، قم بحل، وفحص، وعرض مجموعة الحل، مع بيان كل خطوة من خطواتها.

1. $\sqrt{x} = 5$
2. $\sqrt{x+1} = 5$
3. $\sqrt{x+1} = -5$
4. $\sqrt{x+1} - 1 = 5$
5. $\sqrt{x+1} + 5 = 1$
6. $x = 1 + \sqrt{x+5}$
7. $\sqrt{3x-1} = 2\sqrt{8-2x}$
8. $\sqrt[3]{4x+5} = 3$

تلميحات: بالنسبة للمسائل 4 و 5 قم بفرز الجذور.

الأسئلة:

أية معادلة ينتج عنها جذور غريبة Extraneous Roots.

وضح سبب كون الجذور غريبة.

دعوة للتحدى:

$$\sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{2x}$$

تمارين Exercises

6. صف ثلاث مميزات طلابية والتي يجب أن يأخذها المعلم بالاعتبار عند تشكيل المجموعات غير المتجانسة.
7. لماذا يحتاج أعضاء المجموعة التعليمية التعاونية الفاعلة إلى مهارات إدارة النزاعات؟
8. ترفع طالبة تقريراً بأن مجموعتها تعمل بصورة جيدة، وليس هناك خلافات أو نزاعات. رغم ذلك لا تصل الإنجازات إلى الحد المطلوب أو كما يجب. كيف ستعالج هذا الموقف؟
9. صف بعض الطرائق التي يمكن بواسطتها أن يراقب المدرس تطور المجموعات التعليمية التعاونية.
10. صم درساً يمكن أعضاء المجموعات التعليمية التعاونية من اكتشاف أن مجموع الجذور لمعادلة من الطراز $ax^2+bx+c=0$ هو $-b/a$ وأن ناتج ضرب الجذور هو c/a . افترض أن الطلاب يستطيعون حل مثل هذه المعادلة من الدرجة الثانية بالعوامل أو بالقانون.

1. يلاحظ المعلم أن بعض المجموعات التعليمية التعاونية في الصف: يقوم الطلاب الأذكى بكل العمل. ما هي بعض الطرائق التي يمكن للمعلم استخدامها لمنع حدوث ذلك؟
2. تتلقى مكالمة هاتفية من والد غاضب لأحد الطلاب اللامعين في صفك. يتذمر الوالد من إلزام ولده بمساعدة الطالب الضعيف في مجموعته. كيف سترد على هذا الوالد؟
3. يلاحظ المعلم أن أحد من الطالبات ضعيفي القابلية لا تشارك في مجموعتها. كيف سيعالج المعلم هذا الموقف؟
4. صم درس استكشاف تعليمي تعاوني يمكن الطلاب من التخيّن أخذين بالحساب العلاقة بين زوايا المثلث الثالث.
5. يدرك المعلم أن العديد من المجموعات التعاونية في صفه لا تعمل بشكل فاعل، لذا يقرر تغيير تركيب المجموعات في نهاية الوحدة التعليمية. ما هي الإجراءات التي يمكن أن يستخدمها لإعادة تنظيم المجموعات في أحسن أسلوب ممكن.

المستوى الأول FIRST LEVEL

ينبغي أن يكون قد طور الطلبة مهاراتهم في حساب الصيغات الجبرية التي تحتوي على أسس لكل من قيم المتغير x الموجبة أو السالبة. كذلك ينبغي أن يهيا الطلبة لرسم النقاط في نظام الإحداثيات المستطيلة الشكل.

على جميع الطلبة إكمال الجدول الآتي، ورسم النقاط على شبكة الإحداثيات Coordinate Grid، ووصلهم عن طريق رسم منحني مستمر أملس - انظر شكل رقم (1).

إن الخواص المنعكسة للقطع المكافئ (شكل رقم 2) ينبغي الإشارة إليها مع استخداماتها في الهوائي Antenna والمصابيح الأمامية للسيارات Head lights.

المستوى الثاني SECOND LEVEL

سيستخدم الطلبة آلة حاسبة رسومية إعداد رسم بياني للمعادلة $y=x^2+x-6$ واحتساب قيم اصفاره. سيظهر القطع المكافئ كما في شكل 1، وستكون قيم اصفاره في تقاطعاته مع المحور السيني x -axis عند $(-3, 0)$ و $(2, 0)$.

نماذج دروس Sample Lessons

في اصطلاحات "المعايير"، يتألف جوهر المنهج الدراسي من بضع سنوات من متطلبات دراسة الرياضيات التي تظهر بوضوح طبيعة التغييرات واتساع معالجة الموضوعات والتطبيقات.

وعلى هذا الأساس، فإن جميع الطلبة - و بصرف النظر عن مستوى قابلياتهم - سوف يختبرون كافة موضوعات المنهاج الدراسي. وعليه، فإن الطلبة الذين تم اختيارهم سابقاً لضمار عام أو علمي، مع مناهج الدراسي المتخصص، سوف يتم الآن تعريضهم إلى نفس المادة الدراسية مثل حدود الكلية، بالرغم من كونهم على مستوى مختلف من الاستعداد.

إن الدروس الجوهريّة التالية تظهر بوضوح كيف ان نفس المحتوى يمكن عرضه بمستويات مختلفة من التجريد، بالرغم من اختلاف استراتيجيات التعليم في ضوء مستويات اهتمامات الطالب. والمهارات، والأهداف.

النموذج الأول لدرس جوهري

First Sample Core Lesson

تأمل الرسم البياني للقطع المكافئ $y=x^2+x-6$ (Parabola)

سيقومون بتصميم مبدأ بأن محور التناظر يمر خلال نقطة منتصف القطعة المستقيمة على المحور السيني والذي يصل بين نقطتي الصفرين.

وفي هذا المثال، فإن معادلة محور التناظر تبدو بأنها ستكون $x = -\frac{1}{2}$. وسيزيد الطلبة من التعميم عندما يدركون بأن نقطة المنتصف تمثل معدل القيمة بين نقطتي الصفرين.

من المعادلة التي تم تعلمها سابقاً حول مجموع جذور المعادلة التربيعية، المجموع $-\frac{b}{a}$ ، فإن معادلة محور التناظر للمعادلة العامة $y = ax^2 + bx + c$ ستكون في ضوء ذلك: $x = -\frac{b}{2a}$

يستطيع الطلبة بسهولة، فيما بعد، إنشاء جداول مرتبة تناظرياً والتي سوف تعطي قطع متكافئة-تناظرة، تبدأ بمحور التناظر ثم اختيار نفس العدد من النقاط على الجانبين.

المستوى الرابع FOURTH LEVEL

بعد إكمال المستويات الثلاثة الأولى، سيستخدم الطلبة منهج المحل الهندسي Locus Approach لرسم القطع المكافئ. بدايةً ينبغي تقديم تعريف المحل الهندسي للقطع المكافئ وهو: "القطع المكافئ هو مجموعة النقاط في مستوى يبعد مسافات متساوية عن مستقيم ثابت (خط الدليل Directrix) ونقطة ثابتة (البؤرة Focus) والتي لا تقع على المستقيم الثابت".

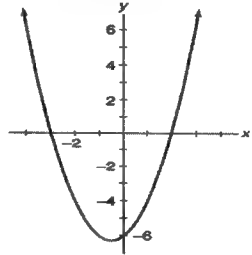
ينبغي أن يتم إعداد الرسم العام بحيث تعكس بوضوح تعريف هذا المحل الهندسي، مع أمثلة محددة حول القطع المكافئ بالصيغة $y = ax^2$ ، أو $x = ay^2$. ينبغي أن يكلف الطلبة بحساب إحداثيات البؤرة، ومعادلة خط الدليل (Directrix) التي تصاحبه. يتألف العمل اليدوي من نقطة محددة (دبوس) وقطعة من الخيط أو (السلك) لإيضاح مفهوم التعريف (شكل 3).

يصف شكل (4) القطع المكافئ الذي تم تشكيله من غلاف Envelope تم إنشاؤه بواسطة ثنات المماس لقطعة من الورق المعامل بالشمع Waxed Paper. (إن أساس هذا الهيكل هو تعريف القطع المكافئ الذي تم عرضه سابقاً. وإن التقنية الباهرة التي استخدمت في ثني الورقة كانت كما يلي: خذ قطعة كبيرة من الورق المعامل بالشمع، وافر نقطة لتكون بؤرة، ثم ارمس خطاً مستقيماً ليكون خط الدليل. قم بطي الورق المعامل بالشمع بضعة مرات بحيث تضع البؤرة على خط الدليل في كل مرة، ثم اعتمد إلى تجعيد Crease كل طية. سينشأ عن التجميعات غلافًا للقطع المكافئ).

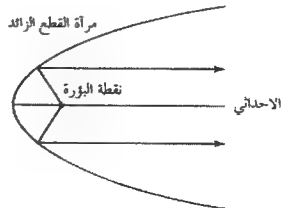
المستوى الثالث THIRD LEVEL

سيقوم الطلبة برسم خط التناظر Line of Symmetry في الرسم البياني الذي تم إعداده للمستويين 1، 2. سيدرك الطلبة بأن خط التناظر هذا، والذي يعرف أيضاً بمحور التناظر Axis of Symmetry، يقع في منتصف المسافة بين القيم الصفرية للدالة، (2، -3).

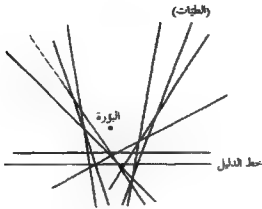
x	y
-4	6
-3	0
-2	-4
-1	-6
0	-6
1	-4
2	0
3	6



شكل رقم (1)



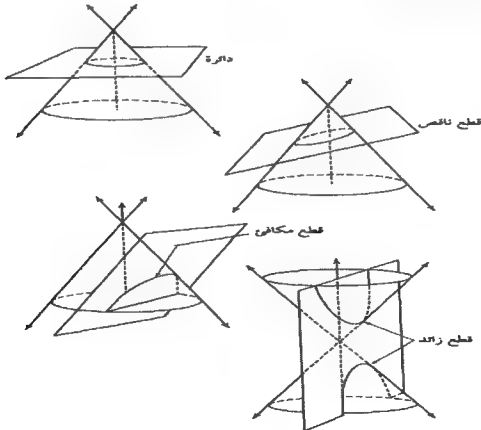
شكل رقم (2)



شكل (4) غلاف القطع المكافئ

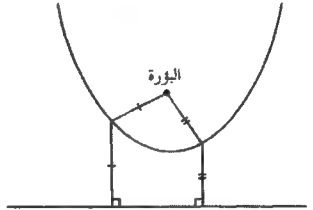
المستوى الخامس FIFTH LEVEL

في هذا المستوى سيتعلم الطلبة الذين ينوون الالتحاق بالكلية College bound بأن القطع المكافئ هو مقطع من مخروط أنشئ من شريحة موازية لأحد عناصره. ويمكن توسيع هذا النموذج Model ليشمل البراهين التي تظهر بأن عملية تقطيع الشرائح Slicing باتجاهات أخرى سينشأ عنها شكل دائرة، إذا كان المخروط دائرياً، أو شكل قطع ناقص Ellipse، أو شكل قطع زائد Hyperbola، أو حتى مستقيمان متقاطعان. (شكل 5).



شكل رقم (5)

إن أغلفة الأجزاء المتبقية من القطوع المخروطية Conic Sections يمكن أن تعرض الآن مع مقدمة عن فن (الأسلاك) والخيوط وقد يكون فن (الأسلاك) والخيوط مناسباً في مستويات أخرى، أيضاً (انظر الفصل الثالث كمرجع لهيكليات فن الأسلاك والخيوط).
قد تتضمن الدروس العملية قطعاً متكافئة متناظرة بدلالة المحور الصادي y-axis أو المحور السهني x-axis، أو مع المحاور التي تدور بآلة زاوية.



شكل (3) القطع المكافئ كمحل هندسي

المستوى الثاني SECOND LEVEL

سيقوم المعلم بافتراض التعبير الأول ويتبعه ببراهين هندسية تتألف من السياقات التالية من المبرهنات والتضاياء، حيث يستند كل برهان إلى القضايا التي تقدمت عليه:

(2) → (3) → (4)

ملاحظة: الأعداد المستخدمة لوصف أبعاد الأشكال قد تكون قياسية أو غير قياسية Irrational.

المستوى الثالث THIRD LEVEL

سيكتسب الطلبة منظورا تاريخيا لتطور النظم الافتراضية (البديهية) Postulational Systems عن طريق الرجوع إلى كتاب "الأصول" لإقليدس Euclid's Elements وفرضياته الهندسية الخمس. إن مناقشة الفرضية الاقليدية الخامسة، فرضية بلاي فير^(*)، ورباعي ساخيري Saccheri هي امتدادات إضافية تؤدي إلى إظهار الهندسة اللا اقليدية، وهي إنجاز كبير في تاريخ الرياضيات.

يتضمن الموضوع الإثرائي المقترح دراسة الأشكال الكروية، والمجسم المكافئ، والزائدي وفق المفاهيم السائدة في الهندسة اللا اقليدية.

ينبغي كذلك مناقشة موضوعات: إنشاءات الفرجار Compass، والمسطرة العدلة Straightedge والإنشاء بأدوات أخرى. وتقسيم زاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية، واستنساخ نسخة مطابقة لمكعب، ستمهد إلى مناقشة Galois^(**) ونظرية المر (Theory of groups).

المستوى الرابع FOURTH LEVEL

سيطلب من الطلبة إنشاء نظم فرضيات شخصية محدود Minipostulational Systems من أي ميدان آخر في الرياضيات، أو من موقف في الحياة الواقعية. إن دراسة المنطق الرمزي، والقياس المنطقي، وجداول الصدق Truth Tables، سوف تساهم بدعم الطلبة في جهودهم الحديثة لإنشاء نظم متسقة.

النموذج الثالث لدرس جوهري

Third Sample Core Lesson

لأن نظرية فيثاغورث المعروفة والتي تعالج المثلث قائم الزاوية $a^2 + b^2 = c^2$ ، Right Triangle، تمد الحجر الأساس للتعميمات الخطية في الهندسة.

إن تمرينا إثرائياً يحمل طابع التحدي للمستوى الخامس سوف يبرهن على ما يأتي: إن السلك المنتظم الذي يتدلى بحرية وبثأثير وزنه، يأخذ شكل سلسلة Catenary. ولكنه سوف يعلق على شكل قطع مكافئ عندما يتم وزنه (تدليته) بطريقة ما بحيث أن وزنه الصافي لكل قدم أفقي يكون ثابتا.

إن الطلبة الذي ينوون الالتحاق بالكلية وبمقراتهم الرياضية المتميزة سيكونون قادرين على استخدام هندسة المتجه Vector Geometry للبرهنة على هذه الحقائق.

النموذج الثاني لدرس جوهري

Second Sample Core Lesson

فكر مليا في التعريف التالي بميدان الهندسة الافتراضية Postulational Geometry "إن مساحة أي سطح مستوى تكافئ عدد الوحدات المربعة التي يحتويها".

المستوى الأول FIRST LEVEL

سيقوم المعلم بتعريف وتوضيح المصطلحات والمبارات غير المألوفة من خلال المبارات الأربع الآتية مقرون برسم، وقطع، وإعادة ترتيب أشياء واقعية ملموسة.

(الأرقام الحسابية التي تستخدم لوصف الأبعاد يمكن أن تكون أعداداً: صحيحة، كسرية Fractional، أو عشرية Decimal، في ضوء ما يناسب بيئة الدرس). يمكن أن تتضمن التطبيقات دوائر للمستوى الأول، ولكنها ستكون غير ذات علاقة وزائدة للمستويات العليا لأنها لا تتناسب مع الحاجة الافتراضية المقبلة.

إن قيمة π سوف تحتسب على أساس 3.14 أو $\frac{22}{7}$.

وبالنسبة للطلبة الأكثر تقدما يمكن للمعلم أن يوضح التعابير الأربعة بواسطة وصف الأبعاد عن طريق صياغات جبرية بدلا من الأرقام الحسابية.

1. مساحة المستطيل تساوي حاصل ضرب طول قاعدته في الارتفاع.
2. مساحة متوازي الأضلاع تساوي حاصل ضرب طول أحد أضلاعه في الارتفاع الذي تم رسمه على ذلك الضلع.
3. مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طول أحد الأضلاع في الارتفاع المقام على ذلك الضلع.
4. مساحة شبه المنحرف تساوي نصف حاصل ضرب الارتفاع في مجموع أطوال قاعدتيه.

(*) جون بلاي فير (1748-1819) رياضي وجيولوجي سكتلندي، لديه مؤلفات كثيرة، أهمها عناصر الهندسة Elements of Geometry (1795).
(**) رياضي فرنسي من القرن الثامن عشر.

المستوى الثاني SECOND LEVEL

بعد تطوير نظريات معدل الكميات المتناسبة - الثلاث التي تنتج عن رسم ارتفاع إلى وتر المثلث ذي الزاوية القائمة، سيتمياً الطلبة لملاء الفراغات على أوراق الرسم البياني للإجابة على الأسئلة السبعة في أنموذج مخطط الدرس المعروض في مكان قريب.

يتبع ذلك سبعة أسئلة ممارسة وتحد، وننصح بان تحل هذه الأسئلة السبعة بوصفها جزءاً من مناقشة مجموعة صغيرة. بعد أن يعاد جمع طلبة الصف وتوحيدهم على شكل مجموعة كبيرة، يمكن أن يطلب من الطلبة مناقشة ملخص الأسئلة الختامي. في هذه النقطة ينبغي تحديد الواجب البيتي. وإذا توفرت الرغبة الكافية، يمكن إضافة مسألة التحدي المشار إليها إلى الواجب البيتي المحدد. ويمكن مناقشة كليهما ضمن مجاميع صغيرة في اليوم التالي.

يمكن تقديم حساب مثلثات المثلث قائم الزاوية في هذا المقام، مع استخدام الآلات الحاسبة لحساب الدوال المثلثية Trigonometric functions لأية زاوية حادة.

المستوى الثالث THIRD LEVEL

سيستخدم الطلبة هندسة الإحداثيات Coordinate Geometry لرسم نقاط ينشأ عنها مثلثات قائمة الزوايا في مجموعة من أشكال المستويات. وسيقومون باشتقاق صيغة المسافة Distance formula للأشكال ثنائية وثلاثية الأبعاد. إن التطبيقات في هندسة المستويات أو الإحداثيات تعد مناسبة، مثل إيجاد وتر المكعب الذي طول ضلعه 2، أو منشور المستطيل والذي أبعاده 2، 3، 4.

كذلك فإن من المناسب لهذا المستوى فتح باب مناقشة براهين غير مباشرة في الرياضيات، مثل تلك التي تبرهن على عكس نظرية فيثاغورث.

إن قانون جيبوس القام Cosines، وقانون الجيبوس Sines لأي مثلث، ينبغي توضيحها بتفصيل في كل من صياغات هندسة الإحداثيات والهندسة التركيبية Synthetic Geometry في هذا المستوى.

من المناسب أيضاً معالجة تطبيقات شاملة بميدان حل المسائل، وباستخدام آلات حاسبة، نظراً لطبيعة الارتباطات القائمة بينها وبين حلول المثلثات. وإن حلول هذه الأسئلة سوف تمهد الطريق أمام توضيح تفصيلي للتعريف الخاصة بـ Inverse Trigonometric functions.

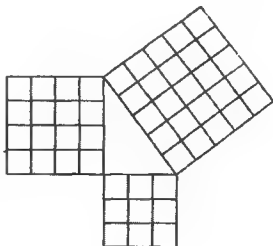
وتلعب هذه البرهنة دوراً فاعلاً، وتمتلك تأثيراً ملموساً في ميدان المواقف الهندسية ثنائية وثلاثية الأبعاد. بيد أن القياسات الخطية، هي بالتأكيد، ليست الأمر المهم الوحيد في نظرية فيثاغورث. إن تعميم هذه البرهنة، والمعروف بالنظرية الأخيرة لفيرمات Fermat قد تركت أثراً ملحوظاً على نظرية الأعداد.

المستوى الأول FIRST LEVEL

سيقوم المعلم بعرض أنموذج علمي للمثلث قائم الزاوية أضلاعه (3-4-5) مع وحدات مربعة-بلاستيكية، يمكن ترتيبها لتكوين مربع على كل ضلع، ليبين أن مجموع مساحات المربعات على ساقى المثلث تساوي مساحة المربع المقام على وتر الزاوية القائمة. (شكل 6).

إن الثلاثيات الفيثاغورية المشهورة فضلاً عن 3-4-5 وهي: 5,12,13، 8,15,17، 7,24,25 وكذلك مضاعفاتها وأجزاؤها، سيتمكن استخدامها في وصف المواقف العملية السائدة في الحياة الواقعية.

سيتعلم الطلبة الأساليب الجبرية لاحتساب الضلع الثالث لأي مثلث قائم الزاوية، بعد إعطائهم أبعاد الضلعين الآخرين. وسيتعلم الطلبة، في الواقع، كيفية حل المعادلات ذات الصيغة $x^2=k$. وسيضمن هذا الأمر استخدام الآلة الحاسبة، أعداد قياسية وأخرى غير قياسية، وإجابات غير مألوفة، والتقريب، والتقدير.



شكل رقم (6)

أنموذج بلاستيكي لثلاثية فيثاغورث 3-4-5

تعليقات Comments

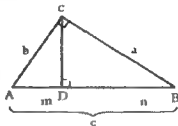
نموذج مخطط درس Model Lesson Plan

لساق هندسة في المدرسة الثانوية

الموضوع: درس على نظرية فيثاغورث.

الهدف: تقديم، وبرهنة، وتطبيق نظرية فيثاغورث.

النشاط المحفز: في الشكل، CD هو ارتفاع المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ في النقطة C . وقد تم تأشير أطوال أضلاع المثلث. أنجز ما الصف. يأتي بالرجوع إلى الشكل أدناه:



لاحظ أيضا بأن هذه التمارين تستعرض نظرية المتوسط التناسبي Mean Proportional Theorem مع إتاحتها، في نفس الوقت، للطالب فرصة للبرهنة على نظرية فيثاغورث. وبالرغم من أن بعض الطلبة قد يعجز عن إدراك هذا الأمر في البداية، ستوفر لهم فرصة لرؤية ذلك خلال مراحل هذا الدرس.

1- الضلع AC هو المتوسط التناسبي بين AB و AD .

$$2- \text{ إذن } \frac{c}{b} = \frac{b}{m} \text{ أو } b^2 = (cm) \text{ أو } b^2 = cm$$

3- الضلع BC هو المتوسط التناسبي بين AB و BD .

$$4- \text{ إذن } \frac{c}{a} = \frac{a}{n} \text{ أو } a^2 = (cn) \text{ أو } a^2 = cn$$

5- بإضافة نتائج الفقرة 2، إلى نتائج الفقرة 4 ستحصل على

$$a^2 + b^2 = (cn) + (cm) = (c)(m+n)$$

$$6- \text{ لكن } m+n = c$$

$$7- \text{ إذن } a^2 + b^2 = c^2$$

ملاحظة: إن الأقواس تعني إجابات صحيحة للطلبة، والتي ينبغي

عدم وجودها على الصفحة الأصلية لورقة العمل.

الاستكشاف

لا تتمجل عندما تقص قصتك، بهدف الحصول على الفاية من روايتها وبعبارة سيزول التأثير المتوقع لهذا الأسلوب ينبغي تهئية الورق الشفاف بحيث نسخة مستنسخة عن ورقة العمل الخاصة بالتمرين الذي زود بها الطلبة.

ينبغي استعراض الموضوع بعناية بحيث نصل إلى أفضل فائدة مرجوة من هذا التمرين.

يجب أن يعرض بعناية للحصول على ما يهدف للوصول إليه من هذا التمرين.

1- أسأل الطلبة (اختر قصة ما) فيما إذا كانوا يستطيعون إدخال سطح منضدة قطرها 5 أقدام من باب ارتفاعه 8 أقدام وعرضه 6 أقدام فقط.

2- استخدم الأوراق الشفافة لجهاز العرض العلوي Overhead لاستعراض تمرين "النشاط التحفيزي" مع طلبة الصف.

3- وضح لطلبة الصف أهمية هذا التمرين، وبأنهم قد برهنوا الآن على نظرية فيثاغورث

الارتباطات

1. أسأل الصف عن الصفات المشتركة بين كل من إقليدس Euclid،

والرئيس جيمس جارفيك James A. Garfield.

وإبدأ الآن بإعطاء الطلبة نبذة تاريخية عن نظرية فيثاغورث

(مثل "المصريين الذين يشدون الحبال" أو البراهين + 360).

(انظر: E.S. Loonis, the Pythagorean Properties,

Washington D.C.: NCTM, 1968).

كلاهما يبرهن على نظرية فيثاغورث

هذه المناقشة المختصرة سوف تولد اهتماما اكبر بهذا الموضوع.

تعليقات Comments

أنموذج مخطط درس Model Lesson Plan

الأداء المساعدة المرئية سوف تكون مفيدة في هذا المقام.

2. ناقش تطبيق نظرية فيثاغورث مع طلبة الصف.

أنشطة الممارسة

(هذه تطبيقات بسيطة ويجب القيام بها في الصف)

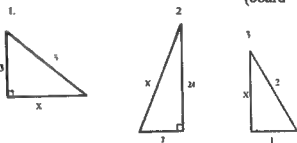
1. جد طول وتر المثلث القائم الزاوية التالي:



هذه تمارين بسيطة التي تنطبق فقط على نظرية فيثاغورث ولا تتطلب معرفة مسبقه بغيرها.

2. جد قيمة المتغير x فيما يلي (أرسل الطلبة إلى السبورة Chalk

(board



سيطلب من الطلبة كتابة إجاباتهم الصحيحة على السبورة. وسيطلب المعلم هذه الإجابات المعلم أثناء تنقله داخل الصف، بينما يستمر الطلبة بالعمل على حل هذه التمارين.

ستظهر هذه الأسئلة، للمعان، الموضوعات الرئيسية بالقسم السابق من الدرس وستكون مختصرا إلى هذه النقطة من الدرس.

الخلاصة المتوسطة (اطرح الأسئلة التالية):

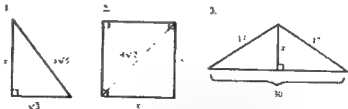
1. انطق نظرية فيثاغورث.
2. ما هي طبيعة استخدامات نظرية فيثاغورث؟
3. هل يمكن تطبيق نظرية فيثاغورث على أي مثلث إذا تم إعطاء أطوال ضلعين من أضلاعه؟

ينبغي تكليف الطلبة بأداء عملهم على اللوحة الطباشيرية مباشرة، بدلاً من حل المسائل أولاً في مقاعدكم ثم نسخها على اللوحة.

سيتعلم الطلبة من الأخطاء كما سيتعلمون من الحلول الصحيحة.

التحدي:

جد قيمة المتغير x فيما يأتي (أرسل الطلبة إلى السبورة عند تعيين المسائل للصف).



4. إذا كان \overline{PS} هو ارتفاع المثلث PQR

$$PQ^2 - RP^2 = QS^2 - SR^2$$

برهن:



تعليقات Comments

أتمونج مخطط درس Model Lesson Plan

تم تصميم هذا التقييم لاستعراض موضوع هذا الدرس وإتاحة الفرصة للطلبة بإظهار طبيعة فهمهم له وطبيعة تطبيقاته. الأسئلة 3-5 مستهد للدرس القادم حول عكس نظرية فيثاغورث.

إن تحديد هذا الواجب البيتي هو أسلوب تحديد حلزوني يستعرض المواد التي تم تعلمها في مراحل سابقة، إضافة إلى الموضوعات المطروحة حالياً (انظر المناقشة حول تحديد الواجب البيتي في بداية هذا الفصل).

هذه المسألة تتضمن مجموعة تطبيقات حول نظرية فيثاغورث، وتعد نقلة موضوعية من التطبيقات البسيطة-السابقة.

التقييم الختامي

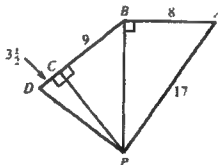
1. انطق نظرية فيثاغورث بكلمات مختصرة.
2. كيف تساعدنا نظرية فيثاغورث في إيجاد طول الوتر بمستطيل ما، إذا توفر لنا أطوال ضلعين من أضلاعه؟
3. هل يمكن تطبيق نظرية فيثاغورث على أي مثلث تتوفر لدينا أطوال ضلعين من أضلاعه؟
4. ماذا تخمن أن يكون صحيحاً حول مثلث أضلاعه 3,4,5 على التوالي؟
5. هل استطعنا البرهنة على طبيعة حالتك إزاء سؤال 3؟

تحديد الواجب البيتي

1. أربعة تمارين مشابهة لتلك في الجزء التطبيقي من مخطط الدرس.
2. برهان واحد يتضمن نظرية فيثاغورث.
3. تمرين واحد حول استخدام مبرهنة المتوسط التناسبي.
4. تمرين واحد حول مثلثات مشابهة.

مشروع خاص

(ناقش مسألة التحدي التالية مع طلبة الصف).
في الشكل $\overline{PC} \perp \overline{BD}$ في نقطة C و $\overline{PB} \perp \overline{AB}$ ، $AP=17$ ، $AB=8$ ، $BC=9$ و $CD=3\frac{1}{2}$ جد قيمة PD.
($12\frac{1}{2}$)



معدات وأدوات خاصة

مجموعة نسخ من الأنشطة المحفزة بالإضافة إلى نسخ شفافة منها، جهاز عرض علوي ، وطباشير ملون، ومسطرة. (أو نوعه ما من مسطرة السيورة).

المقترحة، والمهام التي تحمل طابع التحدي، وحقايب عينة عمل الطالب الصفي، وجوانب أخرى من الأنشطة الصفية، قد تم اقتراحها بواسطة "المعايير" سيشار إليها على أنها دروس المعايير STANDARDS LESSONS.

بالرغم من أن الخطوط العامة لمخطط الدرس اليومي صفحة (46) كان الأساس الذي ارتكزت إليه أربعة نماذج لدروس "المعايير" قد تم إعدادها لهذا القسم، إلا أن من الضروري أن تكون منتبها إلى الحقائق الآتية:

1. إن المخطط للدرس اليومي هو صيغة ينصح بها فحسب، ولا يقصد بذلك أنه المخطط الوحيد.
2. إن تحليلك القبلي لدروس المعايير صفحة (72-79) سوف يوفر لك فهما أعمق بما يتوقع من الدروس التي تستخدم استراتيجيات المعايير.
3. أن درس المطالعة الذي سيشار إليه لاحقا يعرض برهانا هندسيا منهجيا قد كتب بصيغة فقرات بناء على الأسلوب الذي تقترحه المعايير لكتابة البراهين الرياضية، بدلا من اعتماد صيغة العمودين التي لا تزال شائعة الاستعمال بالوقت الراهن.

المستوى الرابع FOURTH LEVEL

في الوقت الحاضر، سيبها الطلبة، لفهم الهندسة الكروية Spherical Geometry وتصريف الزوايا القائمة في الجسم الكروي. إن درسا تمهيديا بموضوع الهندسة اللاقليدية سينجم عنه انقلاب مفاهيمي ملموس في تاريخ الهندسة، وبالأخص، النتائج والمفاهيم التي تنشأ عن التباين مع المسئلة الاقليدية الخامسة.

إن الخصائص الطوبولوجية Topological للأنموذج اللاقليدي، مثل الكرة والقطع المكافئ الزائدي hyperbolic paraboloid، يمكن أن تطرح للعرض والمناقشة جنبا إلى جنب مع التحويلات في هندسة صفحة المطاط Rubber Sheet Geometry. وعلى أعقاب نظرية فيثاغورث تأتي المبرهنة المعروفة بمبرهنة فيرمات الأخيرة. كتب فيرمات على هامش احد الكتب الموجودة في مكتبته ملاحظته الشهيرة : المعادلة $x^n + y^n = z^n$ لا يمكن أن تحل بإعداد موجبة صحيحة $n=3,4,5, \dots$ لقمة x,y,z .

إن المحاولات العقيمة على برهنة هذا الحدس الرياضي قد نشأ عنها المزيد من الإنتاج العلمي الرياضي لفترة امتدت لأكثر من 350 عاما، بيد أنه لم يظهر على ساحة المجتمع الرياضي من يمتلك القدرة على تدقيق النظر بهذا الحدس الرياضي!

إن البحث عن برهان صحيح قد توج بالبرهان الرياضي للدكتور اندرو ويلس Dr. Andrew Wiles من جامعة برنستون في حزيران 1993 (مع تعديل قام به بعد ذلك العام). أن التحليل الأكثر عمقا لمبرهنة فيرمات سيفتح أفقا جديدة أمام مناقشات لإيجاد حلول لمعادلات دايوفانتين Diophantine Equations^(*)، وبالأخص ذات الدرجة الأولى (مثل إيجاد جميع أزواج الأعداد الصحيحة للمتغيرين x,y التي تحقق المعادلة $ax+by=n$ ، حيث a,b,n هي أعداد صحيحة مطاه)

سيتعلم الطلبة في هذا المستوى، معنى ودلالة العدد الأولي النسبي Relatively Prime وربما تتوده إلى اكتشاف طريقة لتوليد الثلاثي الفيثاغوري الأولي Primitive Pythagorean Triples.

عينة دروس "المعايير"

Sample Standards Lessons

إن الدروس المعدة لتدريس مجاميع صغيرة أو كبيرة، والتي تتضمن التشكيلات ، والآلات الحاسبة، والحواسب، والأسئلة

(*) هي عبارة عن معادلة متعددة الحدود بحيث إن معاملاتها لا تساوي صفرا: كما أن قيمة معامل n تكون عددا صحيحا موجبا.

عينة درس تطبيقي بنموذج المعايير

الموضوع: درس تمهيدي حول تحليل ثلاثي الحدود بصيغة ax^2+bx+c إلى حاصل ضرب ثنائي الحدود.

المعرفة القبلية: يستطيع الطلبة ضرب ثنائية الحدود بالتخمين.

صيغة التقدير: كل من المجاميع الصغيرة والكبيرة.

النشاط المحفز: تعين مجاميع صغيرة من الطلبة لتحديد الإجابات لكل من المجموعات الآتية، واقترح بان تقوم كل مجموعة باختيار ممثل عنها يقوم بتقديم تقرير عن مقترحات المجموعة لطلبة الصف بعد إعادة لم شملهم.

المجموعة 4	المجموعة 3	المجموعة 2	المجموعة 1
$(x-3)(x-5)$	$(x-3)(x+2)$	$(x+5)(x-2)$	$(x+3)(x+2)$
$(x-1)(x-8)$	$(x+1)(x-6)$	$(x-3)(x+5)$	$(x+1)(x+7)$
$(x-7)(x-2)$	$(x-4)(x+2)$	$(x+5)(x-1)$	$(x+4)(x+3)$

الاستكشاف: بعد اكتمال لم شمل طلبة الصف، ادع كل ممثل مجموعة لإنجاز ما يأتي:

1 مناقشة أنماط كل مجموعة اكتشفها الطلبة.

2 قم بتوضيح كيفية استخدام الأنماط للعمل باتجاه العوامل، وباستخدام الناتج $x^2 + 8x + 15$ كبيان لذلك. ثم ابدأ باستبدال الإشارة الموجبة (+) بالإشارة السالبة (-) أمام المتغير $8x$ واستمر بتطبيق الإجراء لكل مجموعة.

أ. يؤكد المعلم على ضرورة البدء دائماً بالأقواس () () .

ب. ملاحظات المعلم: حلل العامل الثابت بحيث يكون مجموع العوامل مساوية لعامل Coefficient الحد الأوسط التعبير Middle Term.

التدريب: (عد ثانية إلى المجاميع الصغيرة وباستخدام تمارين تطبيقية مستنسخة أو تمارين تدريب محددة من كتب دراسية.

11. $x^2 - 81$	6. $x^2 - x - 20$	1. $x^2 + 7x + 10$
12. $49 - x^2$	7. $x^2 + 3x - 40$	2. $x^2 - 5x + 6$
13. $x^2 - 25 / 36$	8. $x^2 - 6x + 9$	3. $x^2 - 7x + 6$
	9. $x^2 - 64$	4. $x^2 - 2x - 15$
	10. $x^2 + 4x - 12$	5. $x^2 + 5x - 14$

تحديد الواجب البيتي: قم بتوزيع أوراق إضافية من التمارين التطبيقية لجميع الطلبة، وناقش حلول الواجب البيتي في مجاميع صغيرة بالصف خلال اليوم التالي. استمر بتحديد واجب - يومي إضافي حول نفس الموضوع متضمناً التوسيع لتضمين ثلاثية الحدود وبمعامل ابتدائي أكبر من 1.

التقييم: بعد بضعة أيام، قم بجمع وتقييم عمل الطالب، والتي ستحتوي حلول الواجب البيتي، والامتحانات الموجزة، والاختبارات.

عينة "المعايير" درس قراءة الرياضيات

الموضوع: برهن القضية: إذا كان قطر الدائرة عمودياً على الوتر فإنه ينصف الوتر وقوسه arcs.

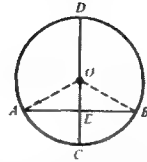
المعرفة القبلية: ينبغي أن يمتلك الطلبة معرفة مناسبة لبرهنة النظرية.

الصفة التدريسية: استكشاف فردي من خلال قراءة الرياضيات.

النشاط المحفز: اقرأ برهان القضية وبادر إلى توضيحها بصيغة فقرات. وتهيأ لإجابة الأسئلة التي تنشأ عن تلك القراءة، وتهيأ أيضاً إلى اقتراح أسئلتك الخاصة.

الفرضية: في الدائرة Q يكون القطر $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ في النقطة E

$$\begin{aligned} \overline{AE} &\cong \overline{EB} \\ \overline{CE} &\cong \overline{ED} \\ \overline{DB} &\cong \overline{AC} \end{aligned} \quad \text{الاستنتاج}$$



للبهنة على أن $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ ، ينبغي أن نبرهن أولاً بأن $\triangle AOE \cong \triangle BOE$ وبما أن أنصاف الأقطار \overline{AO} و \overline{OB} متطابقان، وأن \overline{OE} هو الساق المشترك للمثلثين قائمي الزاوية $\triangle AOE, \triangle BOE$ ، فينتج عن ذلك بأن المثلثين يتطابقان في ساق - وتر المثلث ذي الزاوية القائمة \cong (نظرية ساق - وتر المثلث).

إن تطابق المثلثين ينتج عنه تطابق الزوايا المتناظرة $\angle AOE$ و $\angle BOE$ أيضاً. وبما أن الزوايا $\angle AOE$ و $\angle BOE$ هي زوايا مركزية للدائرة، وبالتالي فإنهما يقسمان القوسين المتطابقين \overline{AC} و \overline{BC} .

ونحن نعلم بأن قطر الدائرة يقسمها إلى قوسين متطابقين، وبالتالي:

$$\text{القوس } \overline{CAD} \cong \text{القوس } \overline{CBD}$$

ينتج عن عملية الطرح بأن القوس \overline{AD} والقوس \overline{DB} متطابقان.

بعد أن يكون الطالب قد قرأ ودرس برهان النظرية، يادر إلى استخراج أجوبتهم على الأسئلة الآتية:

- 1 عندما رسم هذا الشكل، ماذا رسم منه أولاً؟
- 2 ماذا رسم لاحقاً؟
- 3 ماذا رسم أيضاً؟
- 4 كيف رسم قطر الدائرة؟
- 5 ماذا رسم بعد ذلك؟
- 6 لماذا تظهر الحاجة إلى أنصاف الأقطار \overline{AO} و \overline{OB} في الشكل؟
- 7 ما هي المعلومات التي نستطيع الحصول عليها من المثلثين؟
- 8 لماذا يتطابق القوسان \overline{AC} و \overline{BC} ؟
- 9 ماذا ينتج عن حقيقة كون القوس $\overline{CDA} \cong \overline{CBD}$ ؟

الارتباطات: تستخدم الرموز والمباريات الرياضية في تمرين القراءة لتقييم الإدراك. يستمر الحديث حيث يمتحن الطلبة بدقة بأسئلة واستجابات إضافية، مثل: كيف تجد مركز المجلة البكسور واربط هذا الموضوع مع مفهوم المحل الهندسي في الهندسة.

ملخص ختامي: إن من المناسب طرح السؤال القديم - البديل Old Standly Question: كيف ستوضح ماذا تعلمت بالصف، من خلال محادثة هاتفية، لصديق لا يمتلك كتاباً دراسياً؟

التقييم: اطلب من الطلبة صياغة آرائهم حول قراءة دروس في الرياضيات الصفية. وقم بإعداد نص تعلم مبرمج أو الحصول عليه ليرشد الطلبة إلى تعلم معارف جديدة أو البحث عن مهارات جديدة.

الواجب البيتي: تطبيقات الكتاب المدرسي البرية والهندسية منهجية في الجبر والهندسة.

عينة درس - فن حديث Sample Lesson - Modern Art

عرضنا، في بداية هذا الفصل، وحدة مقترحة حول الهندسة اللاقليدية تم من خلالها إعداد ثمانية دروس مختلفة. وسنحاول في هذه الصفحات التوسع اتجاه الدرس السابع من الوحدة: أعمال الفنان - الرياضي كليفورد سنجر Clifford Singer. سنعرض في هذا المقام تفاصيل إضافية، واقتراحات محددة بخصوص هذا الدرس.

الموضوع: الهندسة اللاقليدية والفن الحديث.

مستوى الرحلة: الصف العاشر / الهندسة.

الوصف: سيستعرض الطلبة أعمالاً فنية بمنظور لا أقليدي لفنان ورياضي معاصر. وسيعمد كل طالب إلى التقاط قطعة من الأعمال الفنية، فيكتب مقالاً عنها، ثم يرسل بالمقال إلى الفنان عبر البريد الإلكتروني.

موضوعات الأداء:

سيدرك الطلبة أن هناك أعمالاً فنية تتضمن الهندسة اللاقليدية بوصفها موضوعاً رئيسياً سائداً في مادتها الفنية. وسيستخدمون مهارات التواصل في مسائل الرياضيات الدراسي عن طريق كتابة مقال حول قطعة فنية، وسيستخدمون مهاراتهم التقنية عبر إرسالها إلى الفنان.



Clifford Singer, *Points, Lines, and Surfaces* (1987). A square of square size 40" x 40" inches.

المعايير الموجهة:

الهندسة.

التواصل

الارتباطات:

العرض

الاستكشاف: سيدرك الطلبة أهمية الرياضيات بوصفها أداة للفن. وسيستخدمون الأفكار الهندسية لحل المسائل، يكتبون عمق بالبصيرة فيها، في اتجاهات وميادين أخرى مثل الفن والعمارة (NCTM, 2000).

وسيتري الطلبة مهاراتهم الكتابية باستخدام المصطلحات الرياضية والارتباطات.

المواد والمعدات: حواسيب مع تسهيلات الدخول إلى الانترنت، وحساب بريد إلكتروني خاص بالصف أو المعلم، وبرمجيات معالجة النصوص Word Processing.

عناوين المواقع الإلكترونية URLs:

<http://math.rice.edu/~joel/NonEuclid/>
<http://math.rice.edu/~joel/noneuclid/singer/singer.html>

الارتباطات: متابعة للدروس السابقة حول الهندسة اللاقليدية، سيستعرض الطلبة الأعمال الفنية لكليفورد سنجر، الفنان / الرياضي المعاصر الذي يقم في قرية كرينج Greenwich بمدينة نيويورك. وسيقومون بعدها بكتابة مقال حول عمله ويقومون بإرساله إليه عن طريق البريد الإلكتروني.

أنشطة الانترنت Internet Activities: سيقوم الطلبة باستعراض عمل الفنان سنجر بالنظور اللاقليدي مباشرة على شبكة الانترنت Online.

الأنشطة خارج دائرة الانترنت Non-Internet Activities: سيستخدم الطلبة برنامج معالجة النصوص لكتابة مقالاتهم، وإذا توفرت الفرصة لكل طالب بالحصول على حاسوب خارج الصف، ينبغي إعطاء المقالة بوصفها واجباً بيتياً. أما في حالة وجود طلبة لا

يستطيعون الدخول إلى الحاسوب، ينبغي انذاك اعتماد مبدأ كتابة المقالة داخل غرفة الدرس. يقوم الطلبة بتبادل مقالاتهم في الدرس.

الوقت الصفي اللازم **Class Time Required**: درس واحد أو درسين.

المشاكل التي قد تظهر والحلول Problem/Issues That May Be Encountered And Solutions

قد لا تعمل الحواسيب، أو قد يكون جهاز خدمة الانترنت ISP متوقفا عن العمل، أو قد تكون المواقع متوقفة، أو قد يصعب الدخول إلى بعض المواقع على شبكة الانترنت بسبب زحمة المرور للمعلوماتي. تعد الشفافيات - مسبقاً - للعمل الفني تمهيدا لاستخدام جهاز عرض الشفافيات في حالة عدم إمكانية الدخول إلى مواقع الانترنت. وتطيع نسخ من العمل الفني على طابعة ملونة.

التقييم الختامي **Summative Assessment**: سيقوم الطلبة بكتابة مقالات ومناقشة أفكارهم مع الصف.

مهام خاصة **Special Tasks**: سيقوم الطلبة باستكشاف Explore مواقع المتاحف على شبكة الانترنت وعرض أعمال الفنان ساجر، وتحديد أعمال فنية ذات طابع رياضي إضافية. وسيحاول الطلبة تعيين مواقع أعمال فنية أخرى على الشبكة العنكبوتية العالمية وWorld-Wide Web والتي تعرض مادة الرياضيات كموضوع أساسي.

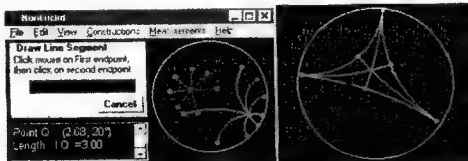
عينة درس-استخدام الهندسة اللا اقليدية

Sample Lesson-Using Non-Euclidean Geometry

الموضوع: الهندسة اللا اقليدية: استخدام برنامج لا اقليدي -تفاعلي على الشبكة.

مستوى المرحلة: الصف العاشر / الهندسة.

الوصف: سيستخدم الطلبة، بصورة مباشرة، برنامج الهندسة اللا اقليدية الديناميكي على الشبكة لاستكشاف مبرهنة هندسة القطع الزائدية Hyperbolic Geometry



الحافز: سيختبر الطلبة مثلثات بمجموع زوايا تقل عن 180° ، وسيرون علماً بصور مغايرة، بيد ان الكلمات والمعاني لم تتغير بعد.

المعايير الموجهة:

الإعداد والعمليات. الهندسة.

القياس. حل المسائل.

التعليل والبرهان. التواصل.

الارتباطات: فهم نظام البديهيات من خلال فحص ومقارنة الهندسات الاقليدية واللا اقليدية.

أهداف الأداء: سيستخدم الطلبة مهاراتهم في كل من مادتي الجبر والهندسة لإنشاء مثلثات-لا اقليدية، وإيجاد مجموع زواياها، وأطوال أضلاعها، ومساحتها. وسيتعلمون أهمية الكلمات والتعاريف.

الموارد والمعدات **Materials And Equipment**: حاسوب مع إمكانية الدخول على شبكة الانترنت.

عناوين المواقع الإلكترونية (URLS):

<http://math.rice.edu/~joe/NonEuclid/>
<http://math.rice.edu/~joe/NonEuclid/why.html>
<http://math.rice.edu/~joe/NonEuclid/triangle.html>

الارتباطات: كمتابعة الدروس الماضية في وحدة الهندسة اللاقليدية سيعمل الطلبة في مجاميع صغيرة وباستخدام المباشر لبرنامج لا اقليدي - تفاعلي ديناميكي وذلك لإنشاء مثلثات زائدية. وسيقومون باحتساب مجموع قياسات الزوايا، وأطوال الأضلاع، ومساحات هذه المثلثات.

ثم سيقوم الطلبة بمناقشة عملهم داخل حدود المجموعة، ومحاولة التنبؤ بال مسار التقريبي للخطوط الزائدية المستقيمة، والتي تمر من خلال نقطتين معروفتين، بالإضافة إلى فحص علاقات أخرى في هندسة القطع الزائدي.

أنشطة خارج دائرة الانترنت **Non- Internet Activities**: سيناقش الطلبة نتائج استكشافاتهم مع الصف، وسيقومون بإعداد لوحات جدارية لعملهم على هندسة القطع الزائدي.

الوقت اللازم للصف **Class Time Required**: درس أو درسين.

المشاكل التي قد تظهر والحلول **Problems/Issues That May Be Encountered And Solutions**: قد لا تعمل الحواسيب، أو قد يكون جهاز خدمة الانترنت ISP متوقفا عن العمل، أو قد تكون المواقع متوقفة، أو قد يصعب الدخول إلى بعض المواقع على شبكة الانترنت بسبب زحمة المرور المعلوماتي.

تعد الشفافيات - مسبقا - من بعض المواقع تمهيدا لاستخدام جهاز عرض الشفافيات في حالة عدم إمكانية الدخول إلى مواقع الانترنت، وتطبع نسخ من العمل على طابعة ملونة.

التقييم الختامي **Summative Assessment**: سيطلب من التلاميذ مناقشة نتائج استكشافاتهم المباشرة على شبكة الانترنت حول المثلثات الزائدية.

مهام خاصة **Special Tasks**: سيستكشف الطلبة مواقع الانترنت التي يمكن من خلالها معرفة المزيد حول موضوعات الهندسة اللا اقليدية، والهندسة الكروية.

سيبحث الطلبة في التطبيقات المعاصرة للهندسة اللا اقليدية.

عينة درس - استخدام الصحائف الممتدة

Sample Lesson- Using Spreadsheets

الموضوع: القيمة العظمى / القيمة الصغرى باستخدام الصحائف الممتدة.

مستوى المرحلة: جبر الصف 9-12 بالاعتماد على درجة تعقيد الدرس.

الوصف: سيقوم الطلبة باحتساب الحجم الأقصى Maximum Volume لصندوق عن طريق حل المسألة على صحيفة. باستخدام الجبر، ثم سيقومون بوصف طول المقطع بالرمز x ، فتكون الأبعاد الناتجة $(14-2x)$ و $(8.5-2x)$. وسيتم احتساب الحجم عن طريق استثمار الخصائص الأولية للصحيفة.

المعايير الموجهة:

الأعداد والعمليات.

الجبر

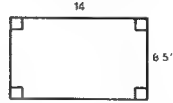
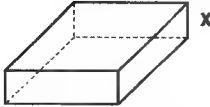
الهندسة

القياس

حل المسائل

التقديم

أهداف الأداء: تحل المسائل المتشابهة في موضوعات القيمة / القيمة العظمى - الصغرى سابقا، في دروس التفاضل والتكامل، بيد أن ظهور الصحائف الإلكترونية نقل حلول هذا النوع من المسائل إلى دائرة الجبر الأولي Elementary Algebra.



الاستكشاف: سيتم توفر صحيفة بقياس محدد للطلبة (8.5 في 14 إنش). اطرح المسألة الآتية، ينبغي عليك أن تقطع نفس مساحة المربع من الزوايا الأربع لصحيفتك قبل طيها لعمل صندوق. كم يجب أن يكون طول كل ضلع من أضلاع المربع بحيث يكون حجم صندوقك بقيمته العظمى؟

المواد والمعدات **Materials And Equipment**: صحيفة بقياس ثابت (14" × 8.5") لكل طالب، ومقص، وحاسوب يحتوي على برنامج صحائف ممتدة.

الارتباطات **Connections**: سيتم تعميق موضوع الحجم فضلا عن المفاهيم الهندسية بأن قيم الأبعاد لا تكون بقيم سالبة، مع مناقشة دقة وأهمية الأشكال.

التقييم الختامي **Summative Assessment**: ما هو أكبر حجم ممكن لكل حافة من حافات مربعك؟ ولماذا؟ وهل ستغير إجابتك إذا كانت الدقة المطلوبة بأجزاء من المئات؟ أو الألوف؟

عينة درس - نظرية فيثاغورث

Sample Lesson – Pythagorean Theorem

الموضوع **Topic**: برهنة نظرية فيثاغورث وتطبيقها.

مستوى الصف **Grade Level**: العاشر أو الحادي عشر وبما يتناسب معها.

الوصف: سيستخدم الطلبة، أولا، كتبهم الدراسية لإعداد أحد البراهين التقليدية لنظرية فيثاغورث، ثم سيقومون بإيجاد براهين أخرى لهذه البرهنة الشهيرة من شبكة الانترنت.

موضوعات الأداء **Performance objectives**:

سيتملم الطلبة كيفية البرهنة على نظرية فيثاغورث بأكثر من طريقة.

المعايير الموجهة **Standards addressed**:

الجبر.

الهندسة

القياس.

حل المسائل.

التفكير والبرهنة.

التواصل.

الارتباطات.

الاستكشاف **Exploration**: سيوظف الطلبة مهاراتهم في كل من الجبر والهندسة لبرهنة نظرية فيثاغورث وتطبيقها بواسطة كتبهم

الدراسة. وسيعملون في مجاميع صغيرة على توسيع برهان لنظرية فيثاغورث بوصفها متابعة للمبرهنات حول الارتفاع الرسوم إلى وتر المثلث قائم الزاوية. وسيتقدمون النتائج التي توصلوا إليها لحل بضعة مسائل جبرياً. بعدها، سيتوجهون مباشرة إلى المواقع المدرجة أدناه للاطلاع على براهين أخرى مقترحة، تتضمن ذلك الذي يعود إلى الرئيس جيمس أ. جارفيلد. ويؤمل أن يعمدوا إلى التحقق من الخطوات في البراهين التي استعرضوها عبر شبكة الانترنت.

المواد والمعدات **Materials And Equipment**: مواد صغية تقليدية: أوراق وأقلام، وحواسيب ترتبط بشبكة الانترنت.

عناوين المواقع الإلكترونية **URLs**:

<http://jwilson.coe.uga.edu/EMT669/Student/Folders/Huberty.Greg/Pythagorean.html>
<http://eame.ethics.ubc.ca/users/rikblok/pythag/index.html>
<http://jwilson.coe.uga.edu/EMT669/Student/Folders/Carlisle.Jody/pt/pt>
<http://www.mcn.net/~jomlov/pythag.html>

أنشطة الإنترنت **Internet Activities**: سيطلع الطلبة على البراهين الأخرى لنظرية فيثاغورث الموجودة في الإنترنت. سيبررون كل خطوات كل برهان.

أنشطة خارج الإنترنت **Non-Internet Activities**: سيحاول الطلبة استخدام العمل الحالي من المساق الدراسي لاكتشاف براهينهم البرهنة لنظرية فيثاغورث، وسيعرضون مهاراتهم: الجبرية، والهندسية، وفي مضمار حل المسائل عند تطبيقهم لهذه البرهنة.

الوقت الصفي اللازم **Classtime Required**: درسان.

المشاكل التي قد تظهر والحلول **Problems/Issues That May Be Encountered And Solutions**: قد لا تعمل الحواسيب، أو قد يكون مجهز خدمة الانترنت ISP متوقفاً عن العمل، أو قد تكون المواقع المتوقعة، أو قد يصعب الدخول إلى بعض المواقع على شبكة الانترنت بسبب زحمة المرور المعلوماتي.

تعد الشغافيات - مسبقاً- للمواقع الإلكترونية تمهيدا لاستخدام جهاز عرض الشغافيات.

في حالة عدم توفر إمكانية الدخول إلى مواقع الانترنت، وتطبع نسخ من المواقع على أوراق ملونة.

التقييم الختامي **Summative Assessment**: سيكلف الطلبة ببيان وبرهنة عكس نظرية فيثاغورث، وسيعملون على حل المسائل الجبرية والهندسية باستخدام عكس النظرية. وسناقش الطلبة الامتدادات الممكنة لنظرية فيثاغورث بعيدان حلول المثلثات المائلة **Oblique Triangles** (هذا هو قانون الجيوب).

مهام خاصة **Special Tasks**: سيقوم الطلبة بتهئية الخطوط العامة لبراهين أخرى لنظرية فيثاغورث. وسيظهر الطلبة تنافساً جبرياً عند تطبيق البرهنة بحلول المسائل اللفظية (**Word Problems**).

عينة "المعايير" درس تطبيقي

Sample Standards Practice Lesson

يعد التطبيق بأسلوب الإعادة من التقانات المهمة في تعليم الرياضيات، لكونها تعمق المهارات التي تم تعلمها في مراحل سابقة، بينما يتم تطوير التقانات الجديدة من خلال الفوارق الدقيقة التي تظهر نتيجة إنجاز مجموعة كبيرة من الأمثلة المختارة. الأمر الذي يؤدي إلى فهم أفضل للأسس البرهنة التي تكمن وراءها. وقد تستمر كل من تطبيقات دروس المجاميع الصغيرة والكبيرة جميع الفترة المخصصة أو قد تكون ملحقة بدرس توجيهي الهام **Task-Oriented Lesson** خلال مدة محددة من الفترة المخصصة.

ولتوضيح هذا الأمر، عمدنا إلى عرض درس في مادة الجبر بموضوع التحليل للمقدار ثلاثي الحدود **Trinomial** إلى حاصل

ضرب مقادير ثنائي الحدود **Binomials** والتي تتعاقب بين المجاميع الصغيرة والكبيرة. إن الأنماط المستحدثة والمطبقة، في كل مجموعة صغيرة، سيماد النظر فيها مرة ثانية خلال المجاميع الكبيرة، ولكن عبر معالجة مفاهيمية إضافية يمارسها المعلم مع طلبة آخرين.

يقوم المعلم بتسهيل حركة الطلبة، وتنسيق الملاحظات، تحديد الواجب البيتي ويوجه دقة تقييم الدرس.

عينة "المعايير" دراسة قراءة الرياضيات

Sample Standards Mathematics Reading Lesson

إن المبادرة الفردية تأخذ جملة من الأشكال والهياكل، ويحاول هذا الدرس توظيف مبدأ "الرياضيات من خلال القراءة".

وينبغي أن يحتوي كل درس على بعض خصائص المهام الموجهة - على الأقل - مثل أنشطة التحدي، واستخدام الآلات الحاسبة، والحواسيب، أو التشكيلات عندما تكون مناسبة، ومثيرة والأسئلة المفتوحة باستمرار كلما أردت أن تخطط وحدة عمل، أو درس يومي، أو استراتيجية للتقييم، حاول أن تعدها باهتمام بالغ مع توظيف الخيال الإبداعي في صياغة مفرداتها.

ستجد أن هناك وفرة من الخيارات أمامك لكي تختار منها ما تشاء، لذا حاول أن تختار بحكمة، وحاول تجربة استخدام أكثر من طريقة، بقدر المستطاع، خلال الفصل الدراسي.

كما أن كل من يؤدي عملاً لا يستمتع بأداءه نفس الدور يوماً، فذلك الحال بالنسبة للطلبة الذي لا يستمتعون بالجلوس وتلقي نفسها الدرس كل يوم. لأن العمل الروتيني يُميت المبادرة، ويبدد ملكة الخيال.

وقد يحمل تأثيراً على المعلم الذي، على سبيل المثال، يستخدم صيغة التدريس بمجاميع صغيرة كل يوم. إن التغيير والتنوع هو الذي يضفي على عملية التعلم فضلاً عن الجوانب التعليمية لتلك العملية، مذاقاً مقبولاً.

وعليه فإن المناقشات الشاملة لطلبة الصف، والتدريس الرفاعي، والاستكشاف الفردي، ومحاضرات الضيوف، وعروض الفيديو، ينبغي أن تصبح جزءاً لا يتجزأ من ذخيرة معلم الرياضيات.

تمارين: عينة دروس Exercises: Sample Lessons

- استخدم ملصقات وأنشطة محددة لبيان طبيعة الاختلاف بين تطوير المهام الموجهة عن تلك التي تم عرضها.
- بين تلك المواضيع في الدرس والتي تطور أنشطة التواصل.
- كيف تستطيع تعميق الفهم من خلال الارتباطات القيمة مع الرياضيات الأخرى، ومع موضوعات بعلوم أخرى؟
- كيف يمكن للآلات الحاسبة والحواسيب أن تلعب دوراً فاعلاً في هذا الدرس؟
- إلى أي حد يمكن لمجموعة درس صغيرة أن تؤلف استراتيجية مفيدة لهذا الدرس؟ نفس السؤال يطرح بصدد المجموعة الكبيرة.
- أين تظهر أهمية العمل الهديوي، وأين يصبح ضرورياً؟
- إلى أي حد يمكن تكون الأسئلة محرزة؟ مفتوحة؟ Openended؟
- ما هي إستراتيجيات التقييم التي عمدت لتوظيفها في غضون المساق وفي خاتمته؟

إن الخطط الخمس القادمة تصف دروساً واقعية من سجلات مجموعة معلمين. وإذا قمت بالدراسة، والتحليل، والمناقشة، والتعليق حول هذه الدروس، ستوفر لديك فرصة مناسبة لتعلم ما هو صحيح لدى الجديدين، وما هو خطأ لدى الضعفاء منهم. إن المعلمين المتدربين حديثاً سيتولد لديهم باعث ملهم بواسطة فلسفة "المعايير"، بيد أن كون معظم هؤلاء قد تلقوا أثناء تعلمهم في مدارسهم الثانوية بالأيام الماضية طرائق مقبولة، ونظر لكونها لا زالت عالقة في أذهانهم، فقد عرضنا خمس خطط من سنين سابقة للمعلمين المستقرين بالتدريب على مسافات للارتقاء إلى مرتبة "المعايير". نحن نعتقد أن هذه هي الطريقة المثلى للمعلمين الجدد على بداية طريقهم المهني بسجل جديد. عندما تقرأ عينة الدروس الآتية، تفكر بالمهام والأسئلة:

- كيف تستطيع إجراء تحسينات على أهداف الأداء المكتوبة؟
- كيف تضمن توظيف رياضات "المعايير" في الدرس (انظر الموقع الإلكتروني <http://www.nctm.org> كموود مساعد).

استعراض مدير المعلم بخصوص مفردات الدرس. ولست بحاجة إلى إدراج تعليقات المراجعة حول الدرس. وبدلاً عنه يمكن أن يدخر هذا القسم كتفذية راجعة من أقرانك. إن مخطط الدرس 3 مخصص للمدارس المتوسطة أو الطلبة حديثي العهد بالمدارس الثانوية.

تذكر الدروس القديمة التي قد تم تعلمها بواسطة معلمين مهرة. وبالرغم من حصول تغيير كبير في الأدوار التي يتبوها المعلم بالوقت الراهن، فإن خططهم ما زالت مثقلة بالخبرة والثقافة من حيث: الأسلوب، والتكنيك، والإستراتيجية، والمساعدة، والمعرفة، وأمور أخرى يصعب حصرها. لاحظ بأن قسم التعليق قد تم تضمينه لمساعدتك في

تعليقات Comments

Lesson Plan 1 خطة درس

الهدف AIM: لتمييز المعادلات التربيعية ولتعلم كيفية حلها بالأسلوب التحليل إلى عوامل Factoring.

أنجز - الآن Do-Now: إذا كان حاصل ضرب عدد ما بعدد آخر يزيد عليه ب 3 يساوي صفرا. جد هذا العدد.

العدد = x

العدد الذي يزيد عليه ب 3 = $x+3$

$$x(x+3) = 0$$

دعنا نتوقف قليلا من الوقت لنرى هل نستطيع اكتشاف أمر ما يساعدنا على حل هذه المعادلة. كل منا يفكر بالمددين اللذين يساوي حاصل ضربهما صفرا (اكتب إجابات على اللوحة).

ماذا لاحظت حول كل زوج من الأعداد؟

كيف تستطيع التعبير بكلمات عما لاحظته الآن؟ (اكتب على اللوحة إذا $ab = 0$ إذن $a=0$ أو $b=0$).

الآن. دعنا نوظف هذه الحقيقة لحل معادلتنا:

x	$(x+3)$
$x=0$	$x+3=0$
	$x=-3$

كيف ستستخدم الحقيقة ذاتها لحل: $x(x+4)=0$

كيف ستحل المعادلة: $x^2+4x=0$ (استنبط التحليل إلى العوامل)

ماذا حول هذه المعادلة $x^2+5x+6=0$

كيف ستحل المعادلة التالية: $x^2-4=0$

إن معاودة النظر إلى المعادلة التي قمنا بحلها الآن، كيف يمكنك إخبارنا بالخطوات التي استخدمتها في الحل؟

(استنبط ما يلي)

(اكتب على السبورة)

1. قم بالتحليل إلى العوامل.

2. اجعل قيمة كل عامل تساوي صفرا.

3. قم بحل كل من المعادلات الخطية.

والآن استخدم هذه الخطوات لحل ما يأتي:

أ. $x^2=0$ ب. $x^2+6x+8=0$

ج. $x^2-16=0$

(راجع الحلول).

بماذا تختلف هذه المعادلات عن تلك التي تعلمت حلها قبل اليوم؟

(الدرجة 2، جوابان، ... الخ).

هذه المعادلات يطلق عليها المعادلات التربيعية Quadratic Equations (أو

معادلات من الدرجة الثانية)

أي مما يأتي تعد معادلات تربيعية؟

هذه هي الأسئلة التي يتوقع المعلم استنباطها عندما يستعرض أنجز - الآن.

هذه هي أهم الأسئلة والتعليقات كتبت بنفس الترتيب الذي سالت به بواسطة المعلم.

هذا السؤال لم يطرح لأن المعلم قد رأى بأن الدرس أصبح طويلا جدا، فأراد أن يقطع جزءا من الدرس المعد.

إن تطوير الخطوات المستخدمة في حل المعادلات التربيعية يعد ملخصا متوسطا.

المثال (ج) قد اقتطعت من العرض الصفي لتوفير وقت إضافي.

سؤال محوري يقارن المعرفة الجديدة للطلبة مع المعرفة السابقة.

يكتب المعلم على السبورة الهدف من الدرس: كيفية حل معادلات الدرجة الثانية

$$x^2+7x+12=0 \text{ أ. } x^2-2x=0 \text{ ب.}$$

$$x^2+7x=-12 \text{ د. } x^2=2x \text{ ج.}$$

$$x+3=0 \text{ هـ.}$$

قارن بين (أ،د)، (ب،ج).

من منكم يلخص لنا كيف نملك حل المعادلات التربيعية؟

(لاحظ: الخطوة الإضافية لجمع لوضع العوامل على جهة واحدة واحد ويتدرج تنازلي للقوى (Powers).

تحديد الواجب البيتي Homework assignment:

ادرس الصفحات 157 . 158.

حل الأمثلة 3: 5، 7، 13، 17، 19.

يطلب من الطلبة قراءة شرح النص الخاص بالموضوع وحل نماذج تطبيقية. ملاحظة 1: تحديد الواجب البيتي لم يكن لولها. ملاحظة 2: بالرغم من كتابة الواجب البيتي أخيراً في المخطط، فقد كتبها المعلم على السبورة. وفي نهاية الفترة المخصصة، قام المعلم بتغيير الواجب البيتي عبر إزالة الأمثلة التي لم تتم مناقشتها.

لا يتم إنجاز ذلك داخل الصف بسبب عدم توفر وقت كاف لذلك.
هذه أيضاً لا تنجز داخل الصف.

راجع الواجب البيتي هذا اليوم. الصفحات 140/ 2، 3، 4، 6.

إذا توفر وقت IF TIME:

قم بحل المعادلات التربيعية الآتية:

$$x^2+8x+15=0 \text{ أ.}$$

$$x^2-64=0 \text{ ب.}$$

$$a^2=7a \text{ ج.}$$

$$b^2+6b=-8 \text{ د.}$$

المعمل على اللوحة Board Work

لوح I

$$x(x+3)=0$$

$$x(x+4)=0$$

$$x^2+4x=0$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$x^2-4=0$$

لوح II

$$1. \text{ إذا كان } a=0 \text{ أو } b=0, ab=0$$

2. الخطوات لحل المعادلات التربيعية:

أ. قم بتجميع العوامل في جهة واحدة،

واجعل قيمتها مساوية للصفر.

ب. قم بتحليل العوامل.

ج. ساوي كل عامل بالصفر.

د. قم بحل المعادلات الخطية.

3. حقائق حول المعادلات:

أ. الدرجة ثانية.

ب. جوابان.

ملاحظة: الواجب على اللوحة الجانبية

لوح III

حل المعادلات:

$$x^2+5x=0$$

$$x^2+6x+8=0$$

$$x^2-16=0$$

أي من المعادلات التالية

تربيعية؟

$$x^2+7x+12=0$$

$$x^2-2x=0$$

$$x^2=2x$$

$$x^2+7x=-12$$

$$x+3=0$$

يحتوي الصف على ثلاثة لوحات أمامية، ويخطط للمعلم المواقع التي سيكتب عليها كل جزء من أجزاء العمل.

خطة درس 2 Lesson Plan

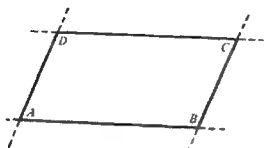
الموضوع Topic: درس تمهيدي حول خصائص متوازي الأضلاع Parallelogram.

الهدف AIM:

- (أ). لعرفه خواص متوازي الأضلاع وبرهنتها.
(ب). إجراء بعض العمليات الجبرية التطبيقية - البسطة على هذه الخصائص.

ما تم تعلمه سابقاً Previously learned:

- أ. خصائص الزوايا الناتجة عن قطع مستقيمين متوازيين بقاطع Transversal.
ب. طرائق البرهنة على تطابق المثلثات.
ج. تعاريف الشكل الرباعي والخط القطري Diagonal.



أنجز الآن Do Now:

المعطى Given: الشكل الرباعي ABCD

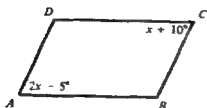
$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}; \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

السؤال Question: ما هي العلاقات القائمة بين $\angle A$ و $\angle B$ ؟ ولماذا؟

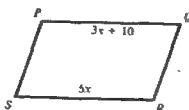
التطوير والطرائق Development and methods:

- (لا يسمح للطلبة بالكتابة في دفاتر الملاحظات حتى يسمح لهم المعلم بذلك، وسيتم إنجاز جميع براهين النظريات التي أثيرت خلال الدرس شفويا. قم بتدوين جميع الاستجابات بالشكل الجدولي كالهئية الموضحة في نهاية المخطط).
1. عرف متوازي الأضلاع (ضع عنوانا للجدول) في متوازي الأضلاع وحاول إثارة الهدف من الدرس.
 2. ناقش فقرة "أنجز - الآن" (اثر موضوع "الزوايا المتعاقبة Consecutive Angle تكون متكاملة Supplementary"، وبرهن ذلك).
 3. سؤال: ماذا يكون صحيحا حول $\angle A$ و $\angle C$ ؟ ولماذا؟ اثر موضوع وبرهان "الزوايا المتقابلة تكون متطابقة".
 4. ارسم المستقيم \overline{BD} .
 5. سؤال: ما هي الأشياء الجديدة التي تراها في المخطط نتيجة لرسم المستقيم \overline{BD} ؟ (اثر موضوع وبرهن: "تم إنشاء مثلثين متطابقين، وأن الأضلاع المتقابلة متطابقة").
 6. قم بإلغاء المستقيم \overline{BC} وارسم المستقيم \overline{AC} بدلا منه.
 7. سؤال: هل نتج عن رسمنا للمستقيم \overline{AC} أمر جديد نستطيع البرهنة عليه؟
 8. مختصر متوسط Medial Summary: على الطلبة قراءة القائمة التي أعدت سابقا وتوضيحها، ونسخها في دفاتر ملاحظاتهم.

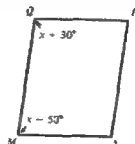
تدريب عقلي DRILL:



الشكل ABCD متوازي أضلاع،
جد قيمة x (علل؟).



الشكل PQRS متوازي أضلاع،
جد قيمة x (علل؟).



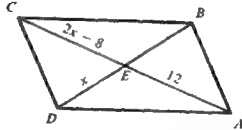
الشكل MNPQ متوازي أضلاع،
جد $m \angle p$.

التطوير Development:

9. ارسم قطري متوازي الأضلاع.
10. سؤال: عبر عن الاستنتاج الذي ستوصل إليه حول القطرين اللذين يظهران على المخطط وبرهنه (الجواب: "القطران ينصف أحدهما الآخر").

تدريب عقلي DRILL:

ABCD هو متوازي أضلاع.
جد قيمة DE



المخلص Summary: قم بإلقاء الجدول من على اللوحة واطلب منهم "أن يدرجوا في دفاتر الملاحظات عباراتهم التعريفية لخصائص متوازي الأضلاع التي قمنا بمناقشتها سابقاً".

واجب بيتي Homework:

1. ستة أمثلة الكتاب المدرسي، مشابهة للتدريب العقلي المنجز في الصف.
2. بضعة أمثلة أخرى من الموضوع السابق.

إذا توفر وقت IF TIME: أكثر من طرح أمثلة حول الموضوع بقدر ما يتيح الوقت المخصص للدرس (ينبغي إدراج أمثلة محددة في هذا الموضوع).

جدول (على جانب اللوحة الأمامية)

في متوازي الأضلاع IN PARALLELOGRAM

1. (تعريف): الأضلاع المتقابلة متوازية.
2. (نظرية): الزوايا المتتالية متكاملة.
3. (نظرية): الزوايا المتقابلة متطابقة.
4. (نظرية): القطران يقسمانه إلى مثلثين متطابقين.
5. (نظرية): الأضلاع المتقابلة متطابقة.
6. (نظرية): القطران ينصف أحدهما الآخر.

تعليقات Comments

خطبة درس 3 Lesson Plan

يشير هذا إلى موضوعات تم تعلمها سابقاً وتتعلق بموضوع هذا الدرس. وهي من التفاصيل التي يتم استيقاظها في ذهن المعلم بدلاً من إدراجها في المخطط.

الموضوع Topic: جمع كسور حسابية بسيطة

المعرفة القبلية Prior knowledge:

1. يكون موضوع المبادئ الأساسية للكسور مألوفا لدى الطلبة.
2. قد درس الطلبة موضوع ضرب الكسور البسيطة وتبسيطها.

أنجز الآن Do now : استخدم هذا الخط



(4) كم جزءا قد تم تظليله؟

(8) غير مظلّل؟

(12) ما هو المجموع الكلي للأجزاء؟

الأسئلة المتوقعة قد أحيطت بقوسين.

اختصر كل كسر إلى أبسط صيغة ممكنة:

$$\frac{4}{12} = \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{8}{12} = \left(\frac{2}{3}\right)$$

اكتب الكسور التالية

$$\left(\frac{4}{12}\right) = \text{المظلّل / الكل}$$

$$\left(\frac{8}{12}\right) = \text{غير المظلّل / الكل}$$

استعرض إجراء تبسيط الكسور:

$$\frac{4}{12} = \frac{\cancel{4} \times \cancel{2}}{\cancel{12} \times \cancel{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{8}{12} = \frac{\cancel{8} \times \cancel{2} \times 2}{\cancel{12} \times \cancel{2} \times 3} = \frac{2}{3}$$

تحدي Challenge: ماذا ينبغي أن يساوي $\frac{8}{12} + \frac{4}{12}$ ولماذا؟

استخدم مخططا لتوضيح الإجابة .

ماذا ينبغي أن يساوي $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ ولماذا؟

انظر إلى المخطط الآتي:



قم بتسمية الكسور في كل مخطط

$$\left(\frac{2}{4}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \quad \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\text{المظلّل}}{\text{الكل}} = \left(\frac{2}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

ما هو الموضوع الذي تعلمناه اليوم؟

اكتب write: جمع الكسور على اللوحة

تحدي CHALLENGE:

قم بتسمية الكسور في كل مخطط

$$\left(\frac{3}{9}\right) \text{ و } \left(\frac{1}{9}\right)$$

(1).



(2).



$$\left(\frac{1}{3} \right) \frac{3}{9} \quad \text{بسط} \quad \frac{3}{9} + \frac{1}{9} = ? \quad \left(\frac{4}{9} \right)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

انظر إلى المثالين:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

نفسه

ما الذي سيكون صادقا حول مقامات الكسور عندما نضيف؟

تدريب Practice:

يشرح المدرس (مستعينا بالأمثلة)
إضافة الكسور بصورة عمودية
بالإضافة إلى ترتيبها أفقيا.

هل $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$ أم مختلفة؟

قم بتسمية المقام المشترك: (10)

$$\left(\frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} \right) \text{ لذا } \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{6}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

تدريب إضافي More Practice:

$$\frac{4}{7} + \frac{1}{21} = ?$$

أسئلة تحدي Challenge Questions:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} \text{ ما هو المقام المشترك؟}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

هذه الأمثلة هي بالواقع أسئلة "إذا
توفر وقت"، وبالحقيقة فإن الأول قد
أنجز فقط

مختصر ختامي Final Summary: ماذا تعلمنا اليوم؟

واجب بيتي Homework: الصفحة 157، الأمثلة: 2، 3، 5، 7، 9، 11، 12، 13، 15، 18.

خطط الدروس 4، 5 تمتاز بكونها أقل تفصيلا من الخطة السابقة. وقد كتبها معلمون يمتلكون خبرة قبل "المعايير"، وثقة بقدراتهم
على التفكير وهم واقفون في أمام الصف.

تعليقات COMMENTS

خطة درس Lesson Plan 4

هدف الدرس كان لاشتقاق صيغة لمساحة المعين بدلالة قطريه.

واجب بيتي Homework:

الصفحة 2/212، الصفحة 8/208، 11.

أنجز الآن DO-NOW:

المعين ABCD

AC=10

BD=8

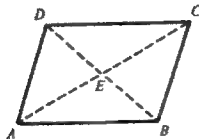
(1). ما نوع الزاوية AEB؟ ولماذا؟

(2). جد مساحة المثلث AEB.

(3). جد المساحة الكلية للمعين.

بمعدن. ليكن $x = AC$ ، $y = BD$

اظهر بأن المساحة $= \frac{1}{2} x \cdot y$.



سينتج عن فقرة "أنجز الآن" عمل جديد، وهذا هو التطور.

تدريب عقلي DRILL: الصفحات 3/212، 5، 6.

مراجعة الواجب البيت.

يقوم المدرس بعرض المثال الأول على اللوحة. أما المثالان الباقيان فيقوم الطلبة بإنجازهما وهم جلوس على مقاعدكم ويقوم المدرس بمراجعتهم. تم تحديد الأمثلة لكي تكتب على اللوحة عندما يعمل الطلبة على فقرة "أنجز الآن". "إذا توفر وقت" غير موجودة.

تعليقات Comments

خطة درس Lesson Plan 5

تم استعراض الاختبار مسبقاً ويتم تذكير الطلبة بالواد التي درست سابقاً. هذه هي البرهنة التي استرجعت.

اختبار عودة

اذكر النظرية حول خط مستقيم موازي لاضلع من اضلاع المثلث.

نظرية Theorem:

إذا كان خط مستقيم موازي لاضلع من اضلاع المثلث يقطع الضلعين الآخرين، فإنه يقطعهما بنسبة هذين الضلعين.

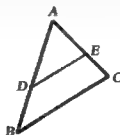
نظرية Theorem: إذا قطع المستقيم ضلعي مثلث، وكانت قطعتا هذين المستقيمين تتناسب بنسبة طول هذين الضلعين، فإن المستقيم يوازي الضلع الثالث.

نوقش عكس النظرية أعلاه وتم توضيحه بيد انه لا يوجد أي مؤشر حول أسلوب إنجازها "الإضافة" تشير إلى:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{AD+DB}{DB} = \frac{AE+EC}{EC}$$

عدة خصائص
(بما فيها الجمع)



يقوم المدرس بتحديد تمرينين تطبيقيين.

نظرية Theorem: النصف لزاوية مثلث يقسم الضلعين المقابلين إلى قطعتي تطبيقان جبريان:

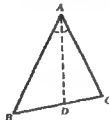
كان المدرس على معرفة أكيدة ببرهان البرهنة

ولم يجد أن كتابتها مفيدة أو ذات جدوى في

المخطط.

مستقيم تتناسب أطوالهما بنسبة طول الضلعين المتجاورين.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{CA}$$



ثلاثة أمثلة تدريب عقلي، جبرية وهندسية.

الصفحة: 193/ الأمثلة 1، 3، 4.

إذا توفر وقت IF TIME: الصفحة: 192/ الأمثلة 17، 18.

واجب بيتي Homework:

الصفحة: 192، الأمثلة: 11، 12، 15، 16.

الصفحة: 193، الأمثلة: 5، 6.

مراجع مقترحة Suggested References

Artzt, Alice. and Claire M. Newman. How to Use Cooperative Learning in the Mathematics Class. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1997.

Artzt, Alice F.. and Claire M. Newman. "Implementing the Stands Cooperative Learning" Mathematics Teacher 83,no.6 (Sept. 1990): 448-452.

Brown, Cheryl. "Whole Concept Mathematics: A Whole Language Application." Educational Horizons 69, no.3 (Spring,1991):159-163.

Burrill, Gail, Jhon C. Burrill, Pamela Coffield, Gretchen Davis, Jan de Lange, Diance Resnick and Murray Siegel. Curriculum and Evaluation Standards for school Mathematics: Data Analysis and Statistics Across the Curriculum, Addenda Series, Grades 9-12. Reston, VA: NCTM, 1992.

Cater, John, and Dorothy Carter. The Write Equation: Writing in the mathematics Classroom. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1994.

Clark, H. Clifford, and Marvin N. Nelson. "Improving Mathematics Evaluation through Cooperative Learning Strategies." Middle School Journal 24, no. 3 (Jan. 1993): 15-18.

Committee on Mathematical Sciences in the Year 2000. EVERYBODY COUNTS: A Report to the Nation on the Future of Mathematical Education. NRC, Washington, DC: National Academic Press, 1989.

Cooney, Thomas J., ed. Teaching and Learning

Mathematics in the 1990's: 1990 Yearbook. Reston, VA: NCTM, 1990.

Cox, Arthur F. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics: Geometry from Multiple Perspectives, Addenda Series, Grades 9-12. Reston, VA: NCTM, 1992.

Erickson, Tim, ed. Get It Together: Math Problems for Groups Grades 4 to 12. Berkeley, CA. EQUALS. 1989.

Frazer, Don. Sports Math. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Froelich, Gray W. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics Addenda Series, Grades 9-12. Reston, VA: NCTM, 1991.

Grouws, Douglas A., ed. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 1992.

Grouws, Douglas, Thomas Cooney, and Douglas Jones, (eds.). Perspective on Research on Effective Mathematics Teaching, Vol. 1. Reston, VA: NCTM, 1988.

Halpern, Diane F. Enhancing Thinking Skills in Science and Mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1992.

Higbee, Jeanne L., and Patricia L. Dwinell, eds. "Sharing Teaching Ideas." Mathematics Teacher 83, no.9 (Dec. 1990): 721-724.

Kastner, Bernice, ed. Space Mathematics. Washington, DC: U. S. Government Printing Office.

- Keeler, Carolyn M., and others. "Cooperative Learning in Statistics." *Teaching Statistics* 16, no.3 (Fall 1994): 81-84.
- Kulm, Gerald. *Mathematics Assessment: What Works in the Classroom*. Washington, DC: MAA, 1994.
- Leikin, Roza, and Orit Zaslavsky. "Facilitating Student Interactions in Mathematics in a Cooperative Learning Setting." *Journal for Research in Mathematics Education* 28, no. 3 (May 1997): 331-354.
- Lesh, Richard and Susan J. Lamon. *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science, 1992.
- Mathematical Sciences Educations Supporting Mathematical Teaching Standards. NRC, Washington, DC: National Academy Press, 1991.
- Milgram, Roberta M., ed. *Teaching Gifted and Talented Learners in Regular Classrooms*. Springfield, IL: Charles C. Thomas, 1989.
- National Council of Teachers of Mathematics. *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: NCTM, 1991.
- _____. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM 2000.
- _____. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics-Addenda Series*. Reston, VA: NCTM 1991-1992.
- _____. *Teaching and Learning Mathematics in the 1990's*. NCTM 1990 Yearbook. Reston, VA: NCTM, 1990.
- _____. *Discrete Mathematics Across the Curriculum. K-12*. NCTM 1991 Yearbook. Reston, VA: NCTM, 1991.
- Owens, Douglas T., ed. *Research Ideas for the Classroom: Volume II: Middle Grades Mathematics*. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 1993.
- Peigten, Heinz Otto, Evan Maletsky, Hartmut Jurgens, Terry Perciante, Dietmar Saupe and Lee Yunker. *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volumes One and Two*. New York: Springer Verlag/NCTM, 1991.
- Perl, Teri. *Women and Numbers: Lives of Women Mathematicians Puts Discovery Activities*. San Carlos, CA: Wide World Publishing/Tetra House, 1993.
- Posmentier, Alfred S., Hope Hartman and Constanze Kaiser. *Tips for the Mathematics Teacher: Research. Based Strategies to Help Student Learn*. Thousand Oaks CA: Corwin Press, 1998.
- Quinn, Robert J. "Modelling Statistics Lessons with Preservice and Inservice Teachers." *Cleaning House* 6. No. 4 (Mar-Apr. 1996): 246-248.
- Roueche, Suanne D. ed. "Innovation Abstracts, Volume XV, 1993." *Innovation Abstracts* 15, no. 1-30 (Jan.-Dec, 1993).
- Rubenstein, Rheta N. and Denisse R. Thompson. "Learning Mathematical Symbolism: Challenges and Instruncions. Strategies." *Mathematics Teacher*, 94 No. 4 (April 2001), 265-271.
- Slavin, Robert E. and others. "Cooperative Learning Models for the 3 R's. *Educational Leadership* 47, no. (Dec., Jan. 1989, 1990): 22-28.
- Spikell, Mark A. *Teaching Mathematics with Manipulative: A Resourse of Activities for the K-12 Teachers*. Needhar Heights. MA: Allyn and Bacon, 1993.
- Steen, Lynn A., ed. *Heeding the Call for Change: Suggestions for Curricular Action*. Washington, DC: MAA, 1992.
- Steen, Lynn A., ed. *On the Shoulders of GIANTS: New Approaches to Numeracy*. NRC. Washington, DC: National Academy Press, 1990.
- Stenmark, Jean Kerr, ed. *Mathematics Assessment: Myths, Models, Good Questions, and Practical Suggestions*. Reston, VA, NCTM, 1991.
- Stewart, Ian. *Nature's Numbers: The Unreal Reality of Mathematics*. New York: Basic Books, 1995.
- Sutton, Gail Oberholtzer. "Cooperative Learning Works in Mathematics" *Mathematics Teacher* 85, no. 1 Jan 1992, 63-66.
- Sved, Martha. *Journey Into Geometries*. Washington, DC: MAA, 1991.
- Tietze, Martha. "A Core Curriculum in Geometry." *Mathematics Teacher* 85, no. 4 (Apr. 1992): 300-303.
- _____. "Sharing Teaching Ideas." *Mathematics Teacher* 83, no. 9 (Dec. 1990): 721-724.
- Ward, Cherry D. "Under Construction On Hrcoring a Constructivist in View of the Standards." *Mathematics Teacher*, 94 No. 2 (February 2001), 94-96.
- Weichman-Tischler, Rosamond. *Teaching with Manipulatives: Middle School Investigations*. White Plains, NY: Cusenare, 1996.
- Zaslowsky, Claudia. *Fear of Math: How to Get Over It & Get On With Your Life*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1996.

Teaching More Effective Lesson

يعد المعلم شخصاً واسع الخبرة باختصاصه، ويستطيع تقدير استراتيجية التعليم الصفي الأكثر تأثيراً على طلبته. ويكافح المعلم الجيد ويجذل جهوداً مستمرة تجعل الصف مكاناً يستمتع الطلبة فيه بعملية التعلم.

يعد التعلم الفعال للطلبة، بصورة عامة، هدفاً ملازماً. ومما لا ريب فيه، فإن الأسلوب الذي يتم من خلاله عرض المادة الجديدة للصف يحدد المناخ الحقيقي للتعلم. فإذا تم إخبار الطلبة بحجم المعلومات التي ينبغي عليهم معرفتها حول موضوع ما، فإنهم سيصابون، حتماً، بالفجر، وسيفقدون الاهتمام بالموضوع، وفي النهاية سوف لن يأبهوا بالموضوع ولا يعيرون له أي نوع من الاهتمام. من أجل هذا، ينبغي على المعلم أن يحاول باستمرار بث وتميز المناخ التعليمي المناسب داخل الصف. وتعد الإثارة الفكرية إحدى الطرق التي تدعم اهتمام الطلبة طيلة فترة الدرس.

وتستطيع أن تحفز الطلبة عبر عرض دائم لتحديات فكرية معتدلة (سواء ضمن مجاميع صغيرة، أو كبيرة).

سيعني هذا الفصل بإعداد تقانات واستراتيجيات مهيّبة، لكي تساعدك على: تحفيز، وسؤال، و(بطريقة أخرى) تحفيز إثارة الطلبة، موفرة لك أكثر الطرق فاعلية بميدان التعليم.

اقتصادية رمزية للأداء الحسن لارتياح الأقران للأداء الحسن، و"تجنب العقاب" بواسطة الأداء الحسن، وإطراء للعمل الجيد، وأمور أخرى متشابهة. تمتاز الطرائق العرضية بفعاليتها الملحوظة للطلبة بأشكالها المتعددة. وتؤثر بيئة الطلبة وتربيتهم المبكرة بشكل ملحوظ على تكيفهم مع المحفزات الخارجية الشائعة.

من ناحية ثانية، فإن كثيرا من الطلبة يظهرون الأهداف الجوهرية في رغبتهم لفهم موضوع ما أو مفهوم محدد (نو صلة بالواجب)، والأداء المتفوق مع الآخرين (نو صلة بالذات)، أو يخلف تأثيرا بالفرق (نو صلة اجتماعية). إن الهدف الأخير يبعد الحاجز بين كونه هدفا جوهريا أو عرضيا.

تعمل الحوافز الجوهرية إلى مطابقة ومماثلة الأنواع الأساسية الآتية:

التعلم يريد تنمية وتطوير القدرات. يكون الطلبة، في أحوال كثيرة، مثلهن في مسائل التحدي أكثر من تلك التي تتصف بكونها روتينية. لذا ليس من غير المألوف أن ترى الطلبة يبدؤون واجباتهم اليومية بمسائل "التحدي للخبراء Challenge for Experts" على الرغم من كونها تستنزف حتما كبيرا من الوقت، وتحول (في أحيان كثيرة) دون إكمال الأعمال الروتينية.

المتعلم يحب الإطلاع على الأحداث والأنشطة الجديدة. إنها إحدى الخصائص التي تلتصق بالإنسان فتجعله ينجذب عن المواقف والتحديات غير المألوفة، والتي يمكن اقتحامها بالمهارات والعرفة المتوافرة، مما يوفر شعورا بالقوة والكفاءة الذاتية. وعندما يتعمق حب الإطلاع والرغبة في اكتناه المجهول وغير المألوف لدى المتعلم مثيرا فضوله، يصبح شكلا من أشكال الحوافز.

التعلم بحاجة إلى أن يشعر باستقلاليته. إن الرغبة بإحداث تأثير على شيء ما بوصفه نتيجة لما تعلمه الإرادة الشخصية هي عامل محفز (في كثير من الأحوال) ضمن العملية التعليمية الشامل. ولتحديد ماذا ينبغي تعلمه بنفسك، بدلا من الإحساس بأن عملية التعلم تحدث لإرضاء شخص آخر، أو للحصول على مكافأة عرضية أو خارجية، هو أمر تقتضيه الحاجات الإنسانية الأخرى.

يتفاعل المتعلم مع بعض القيم الاجتماعية-الذاتية. عندما نحاول تبسيط وبيان الحاجات واليوغيات الإنسانية ينبغي عدم إغفال موضوع كون معظم المتعلمين يمتلكون قيما

التقانات المحفزة

Motivational Techniques

إن إحدى أكثر المهام صعبة التي يجابهها معلم الرياضيات تكمن في كيفية تحفيز الطلبة وشد اهتمامهم بموضوع محدد. يتطلب التخطيط لعملية التحفيز وإثارة الاهتمام خيالا واسعا، وقدرة وإبداعية متميزة. فينبغي أن تؤخذ بعين الاعتبار حاجات الطلبة واهتماماتهم، والتي تتغير، طبيعيا، بتغير خصائص الطلبة المنتشرين في مدارس هذه الأيام. ويبدو أن الهندسة، بحكم طبيعتها الموثبة، تثير بسهولة اهتماما ملحوظا بين الطلبة. بيد أن ما يؤسف له، هو أن هذا الأمر لا تجده دائما مع موضوع الهندسة، لأن جزءا كبيرا من مساقاتها الدراسية يعاني من معالجة موضوع برهنة النظريات على مسائل مصطنعة بعيدة عن الواقع الملموس.

بالمقابل فإن الطلبة المهتمين بموضوع الرياضيات تستثيرهم هذه الموضوعات أكثر من غيرها من الأنشطة والفعاليات الرياضية. لذا ينبغي أن يركز العلم عنايته واهتمامه بالطلبة الأقل اهتماما بمادة بالرياضيات (في التخطيط للمحفزات المناسبة) ذلك لأنهم لن يكونوا يمثل هذه المفاهيم الطبيعية الافتراضية لمادة الهندسة. ولغرض تحفيز الطلبة وشد اهتمامهم. ينبغي توجيه عنايتهم ولهم صوب تعلم موضوعات مميزة. وقد قمنا في هذا الفصل بمعالجة بعض التقانات التي يمكن استخدامها لتحفيز طلبة المدارس الثانوية بمادة الرياضيات. وقد تم (على وجه الخصوص) عرض ثنائي تقانات مختلفة، مع عرض مجموعة من الأمثلة بمادتي الجبر والهندسة لكل منها. (يرجى ملاحظة أن التقية هي الجزء المهم الذي ينبغي أن يبقى عالقا بالذاكرة، أما الأمثلة فقد تم إيرادها لكي تساعد على فهم هذه التقانة).

ما هو الحافز؟ What Is Motivation?

إن مسألة كيفية تحفيز الطلبة على التعلم تقع على سأم المشاكل المحيرة في دائرة الاهتمام لمن يريد أن يعد مادة ينوي تعليمها، لأنه إذا كان ممكنا جعل الطلبة يتهجون بوصفهم متعلمين، بعدها سيصبح الجزء المتبقي من العملية التعليمية أكثر سهولة، وأعمق تأثيرا وفاعلية. بصورة طبيعية، عندما نفكر بكيفية "جعل طالب ما يرغب في التعلم" بم تنوي أن تباشر بتعليمه. فإن جملة من طرائق التحفيز الأساسية قد تقفز إلى ساحة تفكيرنا الشخصي. وتتضمن هذه الطرائق: مكافآت

فيما يأتي بضعة أمثلة حول كيفية استخدام هذه التقنية.

مثال EXAMPLE: (تقديم الزاوية العامة General Angle الجبر - السنة الثانية)

اعرض الأسئلة الآتية على طلبتك:

جد قيمة كل ما يأتي دون مساعدة آلة حاسبة علمية.

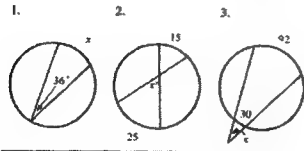
1. جا $30^\circ = ?$
2. جتا $60^\circ = ?$
3. جتا $120^\circ = ?$

إن الطلبة الذين ألفوا المثلث $30 - 60 - 90$ يتوقع منهم أن يكونوا قادرين على إجابة السؤالين 1، 2 بسهولة. أما السؤال الثالث فسوف يثير شعوراً بعدم الراحة لدى الطلبة، نظراً لكونهم لم يألفوا التعامل مع دوال مثلثية لزوايا تزيد قيمتها على 90° .

في هذه اللحظة تستطيع أن تجعل الطلبة يدركون بوجود ثغرة في معرفتهم الرياضية، وسوف يتعلمون كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا التي تزيد قيمتها على 90° .

مثال EXAMPLE: (تقديم قياسات الزوايا باستخدام رؤوسها خارج دائرة معينة - هندسة).

افترض أن الطلبة قد تعلموا العلاقات بين قياسات أقواس الدائرة، وقياس الزاوية (التي تقابل شعاعاتها هذه الأقواس) مع متممها داخل أو على الدائرة شريطة أن لا تكون خارجها. إن مجموعة التمارين الممكنة قد تم عرضها في أدناه جد قيمة X في كل مما يأتي :



بعد إكمال التمرينين الأولين، ينبغي أن يريد الطلبة تعلم العلاقة الموجودة في التمرين الثالث، مما سوف منسبة للوثوب إلى الدرس. (في سبيل الحصول على خيار متعق ومشوق في تعليم هذه الوحدة، راجع الوحدة الإثرائية 56، قياس الزاوية مع الدائرة).

أخلاقية محددة والتي أرسيت جذورها الذاتية لديهم عبر أعوام من المد الاجتماعي المستمر الذي ينشأ في أكثر الأحيان داخل بيئة المنزل.

فعل سبيل المثال، إذا كان الأبوان يخبران الطفل، على الدوام، بأن العمل المتأخر جيد، فإن هذه القيمة الأخلاقية سوف تترسخ داخل البناء النفسي للطفل، وتصبح جزءاً من البواعث التي تحكم أداء ذلك الطفل وأفعاله. إن مهمة المعلم تكمن في فهم البواعث الأساسية المقيمة في ذات المتعلم ومباشرة تحويلها إلى رأس مال معرفي يفيد منه في الارتقاء بعملية التعلم. ويستطيع المعلم بعدها معالجة معرفته ببواعث الطلبة ببراعة وحكمة بما يضمن زيادة فاعلية العملية التعليمية وتعميقها.

بصورة عامة، ينتج عن هذه المعالجة بعض المواقف المصطنعة التي تخترع (بصورة خاصة) لفرض استقلال بواعث التعلم من أجل توليد رغبة حقيقية في موضوع ما، وهو أمر مقبول ومرغوب فيه.

مع إبقاء هذه المبادئ والأسس حاضرة بالذهن، نستطيع الآن مباشرة عملية استكشاف لكيفية استخدامها في تنشيط وتحفيز تدريس الرياضيات. إن من الطبيعي إن هذه التقانات ستكون بحاجة لأن تتوسع، وتتخرف، وتتكيف بحسب شخصية المعلم، وفوق كل هذا، أن تجعل متناسبة مع مستوى قابلية المتعلم وبهئته التي يقطن فيها.

تحفيز الطلبة : التقانات الثمانية

Motivating Student: Eight Techniques

أظهر فجوة في معرفة الطالب

Indicate A Void in Students Knowledge

بصورة عامة، يمتلك الطلبة رغبة طبيعية لإتمام معرفتهم بموضوع ما. ولهذا السبب تتضمن هذه التقانة المحفزة جمل الطلبة يدركون وجود فجوة بمعرفتهم وتوظيف هذا الأمر لتعميق رغبتهم بتعلم المزيد.

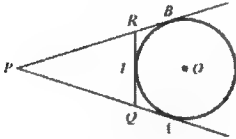
مثلاً، تستطيع تقديم بعض الأمثلة المبسطة التي تتضمن مواقف مألوفة، ثم تتبناها بأمثلة أخرى تتضمن مواقف غير مألوفة حول الموضوع نفسه. أو قد تذكر أو تعرض لطلبك كيف أن الموضوع الذي سيرعرض عليهم، سيساهم في إكمال معرفتهم حول قسم محدد بالرياضيات. وكلما فعلت ذلك بأسلوب أكثر إثارة ازداد أثر التحفيز بنفوسهم. وغالباً ما تكون عملية توجيه الطلبة صوب الكشف عن هذه الفجوة المقيمة في معرفتهم ذات اثر بالغ.

آخر، فنتظهر في هذا المقام حكمة العلم باختيار نوع التحدي اللام لكافة حالات من الحالات.

مثال EXAMPLE: (خواص المماسات - هندسة)
(Properties of Tangents)

افترض أنك ترغب بتحفيز طلبتك على تعلم درس حول المماس المقام على دائرة. دع الطلبة يتأملون المسألة الآتية:

المعطيات: المستقيمات \overline{AQP} ، \overline{BRP} ، \overline{QTR} تمس الدائرة O في النقاط T, B, A على التوالي.
 $\Delta P \cong \Delta R$



جد محيط المثلث ΔPQR

قد يشعر الطلبة بأن المعلومات المتوفرة غير كافية لحل هذه المسألة. ولحل المسألة، فإنهم بحاجة فقط إلى معرفة العلاقة القائمة بين أطوال قطعتي مماس الدائرة من نقطة خارجية محددة. ومتى يتم توفير هذا الطلب للنظرية (من خلال تحد بسيط)، سيتمكن الطلبة من حل المسألة من خلال ملاحظة علاقات المساواة Equalities

$$AP = BP, AQ = TQ, BR = TR$$

بما أن محيط المثلث

$$\begin{aligned} \Delta PQR &= TQ + TR + PQ + PR \\ &= AQ + BR + PQ + PR \end{aligned}$$

$$AQ + PQ = AP = 18, \quad \text{كذلك}$$

$$BR + PR = BP = 18 \quad \text{و}$$

$$\text{وعليه فإن محيط المثلث } PQR = 36$$

مثال EXAMPLE: (التقاء المستقيمتان المنصف لزاوية مثلث - هندسة)
(Concurrency of angle Bisectors of a triangle)
يمكن استخدام تحد من نوع آخر عند طرح موضوع التقاء المستقيمتان المنصف لزاوية مثلث. فيطلب من الطالب تحديد (أو رسم) مستقيم ينصف زاوية يقع رأسها في منطقة

اعرض إنجاز تسلسلي

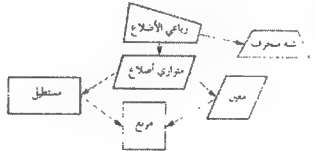
Show A Sequential Achievement

تمتاز هذه التقنية بكونها قريبة الصلة بالتقانة السابقة بيد أنها تتجه صوب جعل الطلبة يفضلون التسلسل المنطقي للمفاهيم الأساسية. وتختلف هذه الخاصية عن الطريقة السابقة في كونها تعتمد على رغبة الطالب بزيادة معرفته، دون الميل إلى استكمال مقرراتها.
إن استخدام مخطط رسومي قد يكون مفيداً في تطبيق هذا الأسلوب من التحفيز.

مثال EXAMPLE: (الأشكال الرباعية - هندسة).

عند توسيع خصائص الأشكال الرباعية، ينبغي إعداد مخطط كالذي يظهر في أدناه.

يمكن أن يواجه الطلبة مع توليد الرغبة لديهم في الوصول، بصورة متعاقبة، إلى عدة مستويات من هذا التوسيع المخطط وينبغي إعداد الشكل الرسومي بعناية، مع التركيز على الهدف المقصود وجعله ظاهراً للعيان.



قدّم تحدياً Present A Challenge

عندما يتم تحدي الطلبة فكرياً، فإنهم يتفاعلون مع الأمر بحماسة بالغة. من أجل هذا يجب اختيار موضوع التحدي بعناية بالغة. كما ينبغي أن لا تؤدي المسألة (إن تم اعتماد هذا الأسلوب من التحدي) إلى العرس فقط، بل أن تكون ضمن متناول قدراتهم الشخصية.

كذلك ينبغي أن يكون التحدي قصير الأجل خالها من التعقيد، بعيداً عن الاستحواذ الكلي على تفكير وانتباه الطالب بحيث ينشعب عن ذلك تهميش جزء لا بأس به من الدرس المطلوب، مما يؤدي إلى غياب الهدف الذي أعد التحدي من أجله.

من أجل هذا، فإن التحديات التي تخلق حافزاً وبعثاً إيجابياً في صف ما، قد لا تمتلك التأثير الملموس نفسه في صف

ينبغي أن يحفز الطلبة الآن على التقهيب عن خطوة مختصرة لإنجاز عملية الجمع الضمنية! وبعد أن يستطيعوا إنشاء صيغة مناسبة لجمع حدود التسلسلة الهندسية، يمكن لهم أن يطبقوا الصيغة المستحددة في حل مثل هذه المسألة. وسيمابون بدهشة شديدة عندما يكتشفوا الرقم الجديد الذي سينتج عن تطبيق الصيغة على الخيار(ب) وسيكون المبلغ، 21، \$ 474, 836, 47.

اظهر فائدة الموضوع

Indicate the Usefulness of a Topic

هنا ، يتم عرض تطبيق عملي في بداية الدرس. ينبغي أن تكون التطبيقات المختارة ذات فائدة ملموسة للصف. ونؤكد ثانية على ضرورة اختيار التطبيقات بحيث تكون مختصرة وخالية من التعقيد المبالغ فيه بحيث تثير عن تحفيز الطلبة بالإقبال على الدرس بدلا من الإعراض عنه. يجب اخذ اهتمامات الطلبة بنظر الاعتبار، وبمنايا بالغة، عند اختيار تطبيق ما، وتذكر بأن الفائدة تكون مناسبة فقط عندما يمتلك الطالب معرفة سابقة بالموضوع المعالج ضمن التطبيق. إن الأمثلة الآتية قد اقترحت لإيضاح وبيان هذه التقنية.

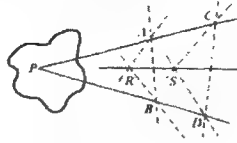
مثال EXAMPLE: (خواص المستقيم العمود على مستوي-

هندسة) Properties of a line perpendicular to a plane : عند إقامة الطلبة لسارية العلم، تنمو لديهم الرغبة بمعرفة كيف يمكن أن نكفل التعامد Perpendicularity- وهذا مبرر طبيعي للحفيز باتجاه هذه النظرية. "إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستقيمين متقاطعين، في نقطة تقاطعهما، فإن هذا المستقيم يكون عموديا على المستوي الذي يتحدد بهما". إن التوسع بمسألة سارية العلم يعتمد على مستوى القابلية ومستوى الاهتمام بالموضوع السائد في الصف (ويصدق هذا الأمر مع جميع طرائق التحفيز المعروضة هنا).

مثال EXAMPLE: (العلاقة بين قطعي وتري الدائرة

المقاطعين Relationship Between the segments of two intersecting chords of a circle : إن احتساب مساحة الطبق للتصعد الذي يكون الجزء الأكبر المتبقي منه عبارة عن قطع صغير من الدائرة الأصلية، هو تطبيق يحتاج إليه الطلبة لإيجاد قطر الدائرة التي يكون فيها القوس ABC هو القوس الثانوي Minor Arc بالطبق إن

يتعذر بلوغه. ينبغي أن يكون الطلبة معادين على الأشكال التي تتطلب استخدام المسطرة والفرجار.



إن أحد الحلول المرغوبة لهذه المسألة يتطلب رسم أي مستقيمين مثل \overline{AB} و \overline{CD} اللذين يقطعان أشعة الزوايا الموجودة في موقع يتعذر بلوغه P. رسمت منصفات الزوايا الأربع، والنقطتان S, R تحددان منتصف الزاوية المطلوب.

ينبغي على الطلبة ملاحظة كون المستقيمتان المنتصف للزاويا مثلث متلاقية، (تأمل هنا المثلثين $\triangle APB$ ، $\triangle CPD$ كل على حدة)، ينجم عنه ضرورة وقوع كل من النقطتين S, R في منتصف الزاوية التي يتعذر بلوغها. بعد مشاهدة هذا الحل، سيرغب الطلبة ببهنة مسألة التقاء المستقيمتان المنتصف للزاويا مثلث (من أجل معالجة أكثر عمقا لهذه المسألة، النظر الوحدة الإثرائية 37، "الزاوية التي يتعذر بلوغها").

مثال EXAMPLE: (تقديم مجموع للتسلسلة الهندسية - الجبر/سنة ثانية) Introducing the sum of a geometric series :

اعرض التحدي الآتي لطلبتك:

أي مما يلي تفضل الحصول عليه؟

أ- مبلغ \$ 100,000 في كل يوم لمدة 31 يوما

أم

ب- 1 € في اليوم الأول

2 € في اليوم الثاني

4 € في اليوم الثالث

8 € في اليوم الرابع

16 € في اليوم الخامس

وعلى هذا الأسلوب لمدة 31 يوما.

سيميل معظم الطلبة باتجاه الخيار (أ)، لأنه يعطي انطبعا بالحصول بعد مرور 31 يوما على مبلغ كبير مقداره \$ 3,100,000. إن مهمة جمع 31 حدا من حدود الخيار (ب) سيكون أمرا مضنيا.

عندما تغير الأرجل المتصالية الموضع ، ينبغي ملاحظة أن الأرجل يجب أن تقسم كل منها الأخرى (دائما) بصورة متناسبة ، إذا كان مستوى الصندوق سيبقى موازيا لمستوى العربة. هذا الأمر سيحفز الطلبة على برهنة هذه الحقيقة.

استخدم الرياضيات الترفيهية

Use Recreational Mathematics

تتألف الحوافز الترفيهية من ألغاز ، وألعاب Games ، وعبارات موهمة بالتناقض Paradoxes ، أو تسهيلات facilities يضاف إلى ذلك ، لكي تختارها بوصفها مصدرا لتحقيق كسب تحفيزي ، ينبغي أن تتم بدون بذل جهد لكي تكون هذه التقنية فعالة ومؤثرة.

مثال EXAMPLE: (مساحة الدائرة-هندسة) Area of Circle: عند البدء بدراسة مساحة الدائرة ، يمكن أن نعرض للطلبة خمس دوائر متمركزة Concentric (تصف قطر الصغرى يساوي I وحدة) وتزيد أقطار كل منها على بعضها بمقدار I وحدة ، على التوالي. ونطلب منهم المقارنة بالبداهة بين مساحتي المنطقتين الظللتين (انظر المخطط).



سيمتدح معظم الطلبة بأن "المنطقة الداخلية" تمتلك مساحة أكبر من منطقة "الحلقة الخارجية".
إن اعتبار مساحة الدائرة شهرم بالحصول على العلاقة الحقيقية. وبصورة عامة ، سيصاب الطلبة بهشة بالغة عندما يجدون أن المنطقتين تمتلكان مساحات متساوية.

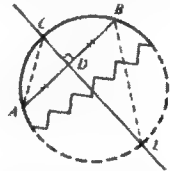
مثال GENERAL EXAMPLE (عام)

إن موضوعات مثل: القصة على الصفر ، التوسط ، والتعاريف مثل $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ عندما تكون قيمتا a, ليستا سالبتين ، ووجود الزوايا المنعكسة Reflex Angles تعرض دائما عبر مقالطات رياضية. وتتوفر جملة من الكتب التي تعني بعرض

صياغة هذه المسألة ضمن أقصوصة سيكون أكثر تحفيزا للطلبة. ارسم أي وتر \overline{AB} للقوس ، والعمود للنصف \overline{CDE} لذلك الوتر (حيث أن نقطة C تقع على القوس). قم بقياس كل من \overline{AD} و \overline{CD} ، ثم استخدم التشابه Similarity لإنشاء القناسب

$$\frac{BD}{CD} = \frac{DE}{AD}$$

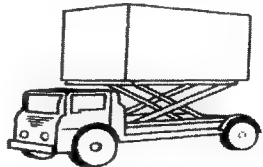
وعليه فإن DE ثم CE اللذين يمثلان القطر المطلوب للدائرة ، يمكن احتسابهما بسهولة. هذه المسألة ستكون حافزا للنظرية التي تنص على ما يأتي "إذا تقاطع وتران في داخل دائرة ، يمكن احتساب قطعتي كل من هذين الوترين ، بحيث أن حاصل ضرب أطوال قطعتي الوتر الأول تساوي حاصل ضرب أطوال قطعتي الوتر الثاني". بالرغم من أن الطلبة قد يكونون قادرين على حل هذه المسألة بالأسلوب المذكور هنا ، غير أنهم سيرحبون بطريقة اقصر للحل. وعليه ، فإن المسألة قد ولدت لديهم حاجة إلى إنشاء العلاقة $DE \cdot CD = AD \cdot BD$ إن برهان النظرية قد طمر ضمن الحل الذي تم تقديمه الآن.



مثال EXAMPLE: (خصائص المثلثات المتشابهة - هندسة)

PROPERTIES OF SIMILAR TRIANGLES

عند عرض خصائص المثلثات المتشابهة ، اطرح على الطلبة سؤال: كيف أن الأرجل المتصالية CROSS-LEGS لعربة خدمات الطائرة ينبغي أن يحدد موضعها بدقة بحيث أن مستوى الصندوق يكون موازيا لمستوى العربة.



الاعتمادية في الوحدة الإثرائية "إعادة زيارة لمسائل الأرقام"
"Digit Problems Revisited".

أروي قصة وثيقة الصلة بالموضوع

Tell a Pertinent Story

قد تلعب القصة التي تروي حدثاً تاريخياً، أو موقفاً مخترعاً دوراً فعالاً في تحفيز الطلبة. ويسرع المعلمون، في معظم الأحيان، سرد القصة التي يعرفونها جيداً لرغبتهم في الدخول إلى مادة الدرس. إن مثل هذا العرض المستعمل يقلل من التأثير الكامن للقصة بوصفها أداة تحفيز. وعليه، فإن طريقة معدة بعناية لعرض قصة بقصد تحفيز الدرس تنبئاً الأهمية نفسها التي تمتاز بها القصة ذاتها.

مثال **EXAMPLE**: (تقديم مجموع متسلسلة حسابية -

الجبر) Introducing the Sum of an arithmetic Series
اقصص لطلبتك كيف أن الحدث كارل فريدريش جاوس Carl Friedrich Gauss، والذي كان عمره يقارب عشرة أعوام، وكيف أن المعلم قد طلب من الفصل القيام بجمع الأعداد من 1 إلى 100. وقد أصيب المعلم بذهول شديد عندما وجد أن طالبه الحدث جاوس قد أكمل حل المسألة بصورة صحيحة خلال وقت قصير جداً. وعندما سأل عن كيفية توصله إلى الحل بهذه السرعة، عمد الطالب الحدث إلى تفسير ذلك كما يلي:

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

وعليه، يوجد 50 زوج من هذا النوع، وستكون الإجابة:

$$50 \times 101 = 5050$$

يمكن استخدام هذا النهج، أو النسق في إعداد صياغة رياضية لمجموع متسلسلة حسابية.

مثال **EXAMPLE**: (موضوعات متعددة - هندسة)

Various Topics: لدراسة المستقيمات المتوازية، تصبح قصة قياس الرياضي إراتوستينيس Eratosthenes^(*) لمحيط الأرض مناسبة في توضيح الموضوع (انظر:

Posamentier, Banks, and Bannister, Geometry: Its Elements and Structure, New York: McGraw-Hill, 1977, P.226)

قبل البرهنة على أن زاويتي قاعدة مثلث متساوي الساقين

(*) غليكي يوتاني (194) 276 د.م.

مغالطات تتضمن هذه الموضوعات، وموضوعات أخرى.
إن بعض هذه الكتب:

Ball, W. W. Rouse. Mathematical Recreations and Essays. Revised by H.S. M. Coxeter. New York: Macmillan, 1960

Barbeau, Edward J. Mathematical Fallacies, Flaws, and Flimflam. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

Cipra, Barry. Mistakes and How to Find Them Before the Teacher Does. San Diego, CA: Academic Press, 1989.

Dubnov, Ya. S. Mistakes in Geometric Proofs. Translated by A. K. Henn and O. A. Titelbaum. Boston: Heath, 1963.

Eastway, Rob and Jeremy Wyndham. Why do Busses Come in Threes? New York: John Wiley & Sons, 1998.

Maxwell, E.A. Fallacies in Mathematics. London, England: Cambridge University Press, 1959.

Northrup, E. P. Riddles in Mathematics. Princeton: Van Nostrand, 1944.

مثال **EXAMPLE**: (مقدمة إلى مسائل رقمية - الجبر)
Introduction To digital Problems: أبدأ التقديم بسؤال طلبتك اختيار أي عدد بثلاث أرقام بحيث تكون مراتب المئات والآحاد غير متساوية. بعدها دعهم يكتبون العدد الذي تكون أرقامه معكوس أرقام العدد المختار.

والآن اطلب منهم طرح هذين العددين (العدد الأصغر من العدد الأكبر). ثم اطلب منهم ثانية اختيار الفرق، وعكس أرقامه، ثم إضافة العدد الجديد إلى حاصل الطرح الأولي. وستنتهي جميع الطلبة بالحصول على العدد 1089. على سبيل المثال، افترض أن الطالب قد اختار العدد 934، وعليه فإن العدد بالأرقام المقلوبة هو 439، وستكون الحسابات كما يأتي:

$$934$$

$$439$$

$$495 \text{ (الفرق)}$$

$$594 \text{ (الأرقام المعكوسة)}$$

$$1089 \text{ (المجموع)}$$

عندما يقارن الطلبة بين النتائج سيصابون بالدهشة عندما يكتشفون التشابه في أجوبتهم. في هذه القطعة سيكون الطلبة متلهفين ليكتشفوا "لماذا" أتت جميع الاختيارات بالنتيجة ذاتها. هناك مناقشة تفصيلية لهذه الخاصية الرقمية - غير

Walser, Hans. The Golden Section. Washington DC: Mathematical Association of America, 2001.

4. أدوات القياس القديمة Ancient Measuring Devices

Kline, Morris. Mathematics: A Cultural Approach. Reading, MA: Addison-Wesley, 1962.
Martzloff, Jean-Claude, The History of Chinese Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1997.
Polya, George. Mathematical Methods in Science, Washington, DC: Mathematical Association of America, 1977.

5. أهم الإنجازات في الرياضيات

Major Breakthroughs In Mathematics
Bunt, L., P. Jones, and J. Bedient. The Historical Roots of Elementary Mathematics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.
Smith, David E. A Source Book in Mathematics, New York: McGraw-Hill, 1929.
Newman, James R. The World of Mathematics (4 vols.). New York: Simon & Schuster, 1956.
Struik, D. J. (Ed.). A Source Book in Mathematics. 1200-1800 Princeton, NJ: Princeton University Press, 1986.

6. ملاحظات بيبولوجرافية وثيقة الصلة بالموضوع

Pertinent Biographical Notes
Bell, E. T. Men of Mathematics. New York: Simon & Schuster, 1937.
Biographical Dictionary of Mathematicians. Volumes 1-4. New York: Charles Scribner's Sons, 1991.
Coolidge, Julian L. The Mathematics of Great Amateurs. New York: Dover, 1963.
Gindikin, S. G. Tales of Physicists and Mathematicians. Boston: Birkhauser, 1988.
Perl, Teri. Math Equals Biographies of Women Mathematicians and Related Activities. Menlo Park, CA: Addison- Wesley, 1978.
Schmalz, Rosemary. Out of the Mouths of Mathematicians. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1993.
Turr. bull. Herbert W. The Great Mathematicians. New York: New York University Press, 1961.

7. نوادر وأساطير ذات صلة بالموضوع

Pertinent Anecdotes
Aaboe, Asger. Episodes from the Early History of Mathematics. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1964.

متطابقان قد يجد المعلم أن مناقشة مختصرة لموضوع التطبيق المذكور Pons Asinorum^(*) مناسبة. إن أخبار الطلبة بأن هذا البرهان كان فيصلا بالقرون الوسطى لعزل الطلبة الذين لا يحسنون فهمه عن بقية الطلبة سينجم عنه تحريض الطلبة، وحثهم جميعا باتجاه حل هذه المسألة.

هناك عدد لنهاية له من القصص، التاريخية أو غيرها، والتي يمكن استخدامها لأغراض تحفيز الطلبة، وقد يتضمن بعضها الموضوعات الآتية (سنحاول أن نعرض المراجع بعد كل منها). ويمكن الحصول على كثير من المصادر الأخرى في كتاب بيبولوجرافية الرياضيات الترفيهية

Recreational Mathematics بأجزائه الأربعة، تأليف: William L. Shaaf, Washington, D.C, National Council of Teachers of Mathematics, 1970(2), 1973, 1978).

1. أصول بعض الرموز والاصطلاحات التي ينبغي عرضها:
Cajori, Florian. A History of Mathematical Notations (2 vols). La Salle. IL: Open Court. 1952.
Schwartzman, Steven. The Words of Mathematics. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1994.

2. تاريخ الرمز π :

Beckmann, Petr. A History of π . New York: St. Martin's Press, 1971.
Berggren, Lennart, J. Borwein, P. Borwein. Pi: A Source Book. New York: Springer-Verlag, 1997.

3. المستطيل الذهبي The Golden Rectangle

Duniap, Richard A. The Golden Ratio and Fibonacci Numbers. River Edge, N.J.: World Scientific Publishing, 1997.
Herz-Fischler, Roger. A Mathematical History of the Golden Number New York: Dover, 1998.
Huntley, H. E. The Divine Proportion. New York: Dover, 1970.
Posamentier, Alfred S. Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.
Runion, Garth E. The Golden Section and Related Curiosa. Glenview. IL: Scott, Foresman, 1972.

(*) اصطلاح يطلق على الفرضية القائلة بأن زاويتي قاعدة المثلث متساوي الساقين تكونان متساويتين.

3. ينبغي أن يثير التحفيز الهدف المتوخى من الدرس في طلبة الصف. وبعد هذا الأسلوب معيارا لتحديد الفاعلية للموسمة للتحفيز.
4. ينبغي أن يتناسب التحفيز بمدته مع مستوى الصف من حيث القابليات المتوفرة لدى طلبته والاهتمام السائد لديهم.
5. ينبغي أن يكون التحفيز قادرا على شد الاهتمام القائم فعليا في ذات المتعلم باتجاه مادة الدرس.

بالرغم من طبيعة التحدي الصعب الذي تثيره عملية التخطيط للتحفيز باتجاه الدرس، فإن نتائجها لا قياس لها. وستبرز الجهود الاستثنائية والوقت المستغرق في هذه التقانة بالنتائج المرتفعة لتعلم الطلبة من نشاط التحفيز والذي قد خطط له. ونفذ بدقة وعناية على ساحة الصف الدراسي.

لهذا الغرض، أو أدوات عملية، والتي يمكن توظيفها لعرض وتوضيح مبادئ هندسية معينة. تتوفر كذلك مواد مصنعة تجاريا لخدمة هذه الأغراض تتراوح بين نماذج هندسية Geometric Models إلى أفلام بأنواع متنوعة.

ينبغي استعراض المواد المختارة، بعناية بالغة مع الاهتمام بتخطيط أسلوب عرضها على الطلبة لكي تثير لديهم حافزا باتجاه مادة الدرس دون أن تستغرق انتباههم عنها باتجاه المواد المستخدمة.

خلاصة SUMMARY

أن تذكر بضعة قواعد عامة حول استخدام التقانات التحفيزية الثمانية (آتفة الذكر) سهجل من توظيفهم داخل الدرس أكثر فاعلية وتأثيرا.

1. ينبغي أن يكون التحفيز مختصرا.
2. ينبغي تجنب المبالغة في التحفيز، فيكون طريقا مؤديا إلى غاية محددة، دون أن يكون غاية بذاته.

تمارين Exercises

1. درس تمهيدي حول النظام المترى Metric System.
2. قم بإعداد نشاط تحفيزي آخر لكل من الموضوعات المدرجة في تمرين 2.
3. افترض إعدادك لنشاط تحفيزي شد اهتمام الصف بحيث لم يعودوا يرغبون بترك الموضوع. ماذا ستفعل لكي تجعل هذا النشاط يؤدي الغاية التي حددت له، والتي تتضمن إثارة انتباه الطلبة نحو موضوع الدرس. حاول تبرير إجابتك.
4. اختر موضوعا من المنهج الدراسي لرياضيات المدرسة الثانوية، وقم بتحضير نوعين مختلفين من أنشطة التحفيز باستخدام التقانات التي تم عرضها في هذا الفصل.
5. أعد التمرين الخامس باستخدام موضوع آخر من المنهج الدراسي للرياضيات بالمدرسة الثانوية.
6. قم بإعداد ثلاثة أنشطة تحفيزية للموضوع نفسه في المنهج الدراسي لرياضيات المدرسة الثانوية. بعد دمج هذه الأنشطة في مخطط الدرس نفسه، ابدأ بتعليم الدرس (كل، بالطبع، مع نشاط تحفيزي مختلف بالبدائية) في ثلاثة صفوف مختلفة. وإن لم تكن قادرا على توثيق هذه الدروس بواسطة شريط فيديو كاسيت، احضر معلما متمرسا بالرياضيات لكي يراقب الصفوف الثلاثة. بعد الانتهاء من هذا النشاط قم بتحليل الدروس الثلاثة مع معلم متمرس ذي خبرة عميقة

1. كيف تستطيع أن تحدد مدى نجاح النشاط التحفيزي الذي مارسته؟
2. قم بإعداد نشاط تحفيزي، لكل من الموضوعات الآتية باستخدام إحدى التقانات التي نوقشت في هذا الفصل.
 - أ. درس تمهيدي حول المساحة (هندسة).
 - ب. درس تمهيدي حول حل المعادلات التربيعية-القابلة للتحليل.
 - ج. درس تمهيدي حول اختصار الكسور (حساب).
 - د. درس تمهيدي حول ضرب الأعداد الرمزية Signed Numbers.
 - هـ. درس تمهيدي حول الاستقراء الرياضي Mathematical induction.
 - و. درس تمهيدي حول حل المعادلات الآتية جبريا (طريقة الجمع).
 - ز. درس تمهيدي حول المحل الهندسي Locus.
 - ح. درس تمهيدي حول جداول الصق.
 - ط. درس تمهيدي حول متوازي الأضلاع.
 - ي. درس تمهيدي حول برهنة المتطابقات المثلثية Trigonometric Identities.
 - ك. درس تمهيدي حول الأساس (لغير الرقم 10).

8. اعد التمرين السابع، على أن يكون الذي يقوم بتدريس الدروس الثلاثة، هذه المرة، متطوعاً من المعلمين المتدربين في تدريس الرياضيات، على أن يتم التخطيط لأدوات التحفيز بصورة تعاونية.

بالرياضيات وحدد أي نوع من أنواع التحفيز الثلاثة كان لها التأثير الأكبر، ولماذا نجم عنها هذا التأثير الجيد؟. ينبغي أن يوجه التحليل صوب بيان تأثير جملة من العوامل مثل: مدى ملائمة التقنية، ونوع الصف الذي تم تطبيقها فيه وطبيعة شخصية المعلم الذي استخدم تلك التقنية.

مسألة الصف Classroom Question

يطرح سؤال أحكمت صياغته على طلبة الصف، يشجع المعلم التعلم الناشط من ناحية الطلبة. ويبقى هناك سؤال يفرض نفسه علينا في هذا الموضوع، هو: ما هو الهدف المقصود من طرح هذا السؤال؟.

إن مسألة الصف (طرح السؤال على طلبة الصف) ينبغي أن تثير استجابة الطلبة التي تتألف من المعلومات التي لو لم تثر لعرضها المعلم بنفسه على الطلبة (في بعض الأحيان تستلم بعض التعليقات المبتكرة - القيمة).

بالرغم من أن هذا الأمر، يصعب في الحقيقة إنجازه بصورة متكاملة، لكنه يبقى هدفاً ينبغي أن نكافح من أجل الوصول إليه.

ينبغي أن يوجه اهتمام بالغ صوب إعداد أسئلة جيدة بعيدة عن التوجهات الجنسية أو الثقافية. وإن طرح السؤال الجيد هو فن بحد ذاته وهو أحد الأقطاب الرئيسية للعملية التعليمية البارة. ونتيجة لذلك، فقد ينشأ عنه زيادة في تماسك العمل الصف، أو ضعف خطير ومؤثر. من أجل هذا ينبغي أن تعد الأسئلة بمعيار عقلاني، ووفق ما يملئه الضمير شريطة أن يتم ممارستها وتطبيقها بصبر وروية.

هناك كثير من المآزق والأخطار المحذقة التي ينبغي تجنبها أثناء طرح الأسئلة الصفية، والتي سنحاول معالجتها فيما بعد.

تنمية سمات مسألة الصف

Class Room Questioning Features to develop

ينبغي أن يعتمد المعلمون إلى تنمية عادة الإكثار من طرح الأسئلة، والتي تلعب دوراً مهماً في تعميق أدائهم التدريسي. إن كل الاقتراحات الآتية والمطروحة لغرض تنمية أسلوب فاعل بطرح الأسئلة داخل الصف المدرسي، بحاجة إلى أن تطبق ميدانياً بعناية بالغة، نظراً لفوائدها الجمة التي تمتد خارج نطاق مسألة الصف، كما وتمتلك تأثيراً عميقاً على عملية التعلم/التعليم.

لغة مباشرة وبسيطة Direct & Simple Language

ينبغي أن تكون أسئلة الصف مباشرة وبسيطة في لغتها. وإن يركز الطلبة على محتوى السؤال، وليس على اللغة المستخدمة في أدائه. يعني، إذا صرفت اللغة انتباه الطلبة عن محتوى السؤال، بسبب كونها شديدة التعقيد أو ربما للمبالغة في روح الفكاهة بعبارتها، فإن التأثير الكامن بالسؤال سوف يضع إدراج الربح.

يستطيع المعلم توظيف أسئلة الصف لإشباع الوظيفة المطلوبة باستخدام لغة مباشرة وبسيطة (بمعنى آخر، تتناسب مع مستوى المرحلة الدراسية المقصودة).

معنى محدد وواضح Definite and Clear Meaning

ينبغي أن تكون أسئلة الصف محددة وواضحة لا لبس في معانيها. وإذا كان سؤال ما يؤدي بعبارته إلى تفسيرات متباينة فإن الطلبة قد تضاعف استجاباتهم له. وعليه لأجل زيادة عدد المتبرعين المستجيبين، ينبغي تجنب الضبابية وعدم الوضوح، وسيبقى دائماً السؤال الأقصر هو الأقل إثارة للإرباك وتشوش الأفكار. كما ينبغي أن يثير السؤال نقطة أساسية واحدة أو اثنتين في طريق التفكير والاستنتاج. وعلى المعلم أن يطرح المزيد من الأسئلة بدلاً من محاولة حصرها بعدد محدود وإطالتها، لأن محاولة طرح المزيد من التساؤلات ضمن سؤال واحد، سيؤدي بالمعلم إلى أن يصبح مهالاً إلى طرح أسئلة مركبة أو متراكبة Overlaid ؟ (انظر الصفحات الآتية).

تسلسل منطقي Logical Sequence

ينبغي أن تنشئ المسألة سلسلة من الأفكار بنسق منطقي محكم. وقد يحدث نقاد صبر المعلم محدود الخبرة، إزاء عملية التطوير، به إلى الإسراع صوب السؤال الحيوي (أو الرئيسي) للدرس دون أن يتفقد وقتاً كافياً لكي يرشد طلبته إلى المسألة من خلال أسئلة تمهيدية مختصرة. إن خاصية نقاد الصبر هذه ينجم عنها تقليل ملحوظ في التأثير الجوهري والمتوقع من الأسئلة الحيوية والمهمة.

بما أن الأسئلة الجوهرية تبدو، عموماً، الجزء الأكثر إشراقاً

روح التحدي طيلة فترة الدرس، شريطة أن تكون الأسئلة قصيرة، واضحة، ومرتبطة في سياق منطقي يساعد على تشييد، وإنشاء الغاية المرادة منه.

يمكن أن يتألف سياق الأسئلة من خليط من أسئلة فكرية وواقعية، على أن يكون الجزء الأكبر منها من النوع الأول. وأن تتضمن خليطاً متوازناً من أسئلة قصيرة تحمل طابع التحدي، مع أنواع أخرى تختص بمراجعة مواضيع سابقة أو أسئلة ترابطية. إن هذا الخليط من الأسئلة التي تعالج أكثر من موضوع، ينبغي أن يتفوق وينجح في حث التعلم الفعال بشكل ملموس.

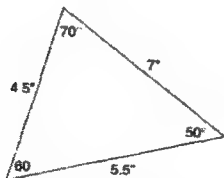
أسئلة مفتوحة Open-Ended Questions

تتيح الأسئلة المفتوحة للطلبة إمكانية الوصول إلى استنتاجات وإصدار قرارات رياضية تتسابق مع فهمهم وقدراتهم. ويستطيع الطلبة، من خلال الامتحان الصفي، إظهار طبيعة، وعمق الاستجابة التي يستحيل تحديدها على أساس اختيار إجابة من قائمة اختيارات متعددة Multiple Choice - أو كتابة عدد ما.

توفر الأسئلة المفتوحة للطلبة، كذلك، إمكانية الوصول إلى مجموعة من الإجابات "الصحيحة" الممكنة.

مثال EXAMPLE:

ناقش مدى إمكانية الحصول على مثلث بالأبعاد البيئية فيما يأتي:



مثال Example:

عرض عليك صديقك المثال الآتي:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} \quad \text{بواسطة اختصار العدد 6.}$$

$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5} \quad \text{كذلك، بواسطة اختصار العدد 6.}$$

من مادة الدرس، لذا فإن من الضروري عدم التكليل من فاعليتها وتأثيراتها المطلوبة. وعليه، ينبغي على المعلمين منح عناية كافية لجميع أجزاء منهج المسألة التي تنمي سلسلة من الأفكار والمفاهيم بتسلسل منطقي. وهذا يعني أن نفس العناية والاهتمام ينبغي أن يمنحاً للأسئلة المبكرة، والعادية، أو المبتدئة تقريباً (أو أسئلة تميد النظر بموضوع ما) بنفس المستوى من الاهتمام المخصص للأسئلة الجهرية والمتقدمة.

تذكر دائماً بأن الأسئلة الجهرية لن تكون فعالة ومؤثرة إن لم تكن قد صيغت، واحكم تطوير مفرداتها، وتنميتها بعناية، وعبر سياق يتألف من أسئلة ثانوية، ويترتب محكم تم اختياره سلفاً.

أسئلة مكيفة بالقياس إلى مقصرة الصف

Questions Keyed to Class Ability

ينبغي أن يكون مستوى قابلية طلاب الصف عاملاً فاعلاً في تحديد اللغة والتعقيد السائد في الأسئلة المستخدمة في داخل الصف. ويسهل على المعلم استخدام نفس الأسئلة خلال فترتي درس متتابعين، وبالأخص عندما يتضمنان المادة الدراسية نفسها.

إذا كانت مستويات القدرة للطلبة الصغين متباينة، ينبغي تجنب هذا الأسلوب من الرمان. أما بالنسبة للصف الأبطأ أو الأقل حنكة، فيمكن استخدام لغة أكثر بساطة، وإقل تعقيداً من تلك التي تستخدم مع صف يضم طلبة أكثر مقصرة. وينبغي أن يحرص المعلمون على عدم استخدام لغة تهيب بعباراتها إلى مستوى لغة الطلبة، بيد أن عليهم في الوقت ذاته تجنب إدارة الصف بلغة ترقى عباراتها، وتتجافى عن مقدرتهم على فهم المعاني الكامنة وراء مفرداتها بسهولة.

إن طرح أسئلة تتناسب مع قدرات المستمعين المقصودين بالمسألة، ستوفر للمعلمين إمكانية تحمين التواصل مع طلبة الصفوف بجميع مستوياتها.

الأسئلة التي تحث على الاجتهاد

Questions That Stimulate Effort

ينبغي أن تنهض الأسئلة بالاجتهاد والمحاولة لدى الطلبة، من أجل هذا يجب على المعلمين بذل جهود استثنائية لإعداد أسئلة تمتاز بصعوبة كافية لإثارة، وحث مسمى مناسب، شريطة أن لا يؤدي ذلك إلى خلق وكبت للمبادرة لدى الطلبة، ويتم تحقيق ذلك من خلال تجهيز مفردات السؤال وعباراته بحيث تتناسب مع مستوى الصف.

ينبغي أن توفر المسألة الصعبة الجيدة مناخاً مناسباً لسيادة

بقية الطلبة لكي يستدل الطالب على الإجابة الصحيحة من خلال محاولة بقية الطلبة بالإجابة عليه. كذلك يمكن أن تترك الفرصة للطلبة بالإجابة عن الأسئلة التي يطرحها زملاؤهم، وأن يبعد المعلم عن دائرة شعوره بأنه الشخص الوحيد المسؤول عن توفير الإجابة على أسئلة طلبته.

قد ينتج عن التفاعل المتكافئ بين الطالب الذي يطرح السؤال وزميله الذي يهرع بالإجابة عليه نتائج ممتعة. فعلى سبيل المثال، إن إجابة أحد الطلبة على سؤال يطرحه طالب آخر، سيجعل الطالب الثاني يتعلم المفاهيم التي تضمنها موضوع السؤال بصورة أفضل.

يتيح التعليم، بصورة عامة، للمعلم فرصة كافية لفهم الفهم الطبيعية للتشبهات الدقيقة للمادة التي يقوم بتعليمها، وطبيعة التعقيد الذي تتصف به الموضوعات، ويصبح الأمر كذلك عندما يقوم أحد الطلبة بتوضيح وبيان مفهوم ما لرفيقه في الصف.

عندما نتوقع استجابة الطلبة للأسئلة المطروحة فيما بينهم، ستمود درجة عالية من اليقظة والحذر خلال فترة الدرس نتيجة لعدم توقع الطلبة، بدقة، متى سهرج إليه بتصحيح ما نخب إليه أحد زملائه من الطلبة أو إجابة سؤاله. وينبغي أن توسع دائرة اليقظة إلى مدى بعيد لكي يبقى الصف مفعماً بالنشاط والحياة.

بعض الاعتبارات الوقائية لتحسين المساءلة الصفية Some Precautionary Considerations For Improving Classroom Questioning

تجنب التكرار Avoiding Repetition

بصورة عامة، ينبغي عدم تكرار سؤال المعلم، ويستثنى من هذا الأمر بعض الأسباب العارضة كعدم إمكانية سماع السؤال بوضوح، عندها تصح عملية تكراره ضرورية. ويمكن توفير خيار إضافي، لتجاوز عقبة عدم سماع السؤال بوضوح، وذلك عن طريق تكليف أحد طلبة الصف بتكرار السؤال المطروح.

إن اعتبار مبدأ تكرار الأسئلة يورث الصف خمولاً، ويبعد طلبته عن اليقظة والانتباه، لأنهم سيعملون على تكرار السؤال. وقد يلجأ الطلاب إلى تعدد الدعوة بإعادة وتكرار السؤال لإضاعة وقت الدرس. بالمقابل، إذا أترك الطلاب بأن عملية التكرار محفوفة بصعوبات جمة ولا يمكن نوالها بسهولة فإن هذا السلوك لن يستمر. وستكون ثمرة هذا الأمر سيادة مبدأ اليقظة في الصف، وغياب أي ضجاج في وقت الدرس.

$$\frac{19}{95} = \frac{1}{5} \text{ بواسطة اختصار العدد 9.}$$

$$\frac{49}{95} = \frac{1}{2} \text{ كذلك، بواسطة اختصار العدد 9.}$$

وبالمثل ذاتة، ادعى، بأن ما يأتي ينبغي أن يكون صحيحاً. اشرح معللاً لماذا لا يصح هذا الادعاء.

$$\frac{12}{23} = \frac{1}{3} \text{ اختصار العدد 2.}$$

$$\frac{15}{55} = \frac{1}{5} \text{ اختصار العدد 5.}$$

$$\frac{28}{81} = \frac{2}{9} \text{ اختصار العدد 8.}$$

إدامة اهتمام الطالب

Maintaining Student Interest

ينبغي أن تديم عملية مساءلة الصف شد اهتمام الطالب طيلة فترة الدرس. وهناك بضعة نقاط بحاجة إلى أن تتضمنها هذه الفعالية باستمرار. فكل جهد مبذول ينبغي أن يعرض، قدر استطاع، على معظم الطلبة خلال فترة الدرس، مع محاولة تجنب توفير فرصة التنبيه بمن سيتوجه إليه بالسؤال. إن خلط عملية التمرير بالسؤال بين من يتطوعون للإجابة عنه، ومن لم يبد اهتماماً بالمشاركة سيجعل كل طالب متيقظاً باستمرار. كما أن ابتداء الفصل الدراسي بتوجيه الطلبة إلى ضرورة إعطاء إجابات كاملة للأسئلة المطروحة في الصف سيساعد في ضمان كون هذا النوع من التطبيق سوف يصبح أمراً مألوفاً داخل الصف. إن إطرار الطلبة (بذوق ولباقة) سيصبح عادة مألوقة وحمسة للإجابة الصحيحة عن سؤال ما. وتمتلك نفس الأهمية، بالنسبة للمعلم، كيفية سهاسة ومعالجة الإجابات الخاطئة بطريقة مناسبة.

إن أفضل معالجة للإجابة الخاطئة تعتمد على السمة المميزة للصف، والوقت المتوفر في الدرس. وبأي حال من الأحوال ينبغي على المعلم عدم معاملة الطالب بغفظة، أو اللجوء إلى التوبيخ بسبب الإجابة الخاطئة. لأن مثل هذا السلوك سيجعل أثراً سلبية معاكسة على تعلم الطالب، وسيثبط ويحبط الاستعداد لديه للاستجابة لأسئلة المعلم في المستقبل، وإذا أتاحت فرصة مناسبة في الدرس يمكن للمعلم أن يرشد الطلبة إلى إدراك ماهية الخطأ من خلال سلسلة أسئلة أعدت بعناية لهذا الأمر. وبالمقابل، يمكن للمعلم أن يختار إحالة السؤال إلى

إن تسجيل الدرس على شريط تسجيل سيساهم في بيان هذا الخلل في أداء المعلم. وأما بالنسبة للمعلم الذي لا يستطيع التغلب على هذا السلوك، وتجنب هذا النوع من التكرار، فينبغي عليه - على الأقل - أن يحاول دمج هذه الإعادة مع العبارة أو السؤال التالي. إن هذه الطريقة لن تبدو كتكرار بسيط لما قد تم قوله.

تتشأ ظاهرة تكرار المعلم لإجابات الطلبة، في أحيان أخرى، نتيجة للمخاوف التي تساوره، والتي مفادها، إنه إذا لم يستخدم المعلم عبارات ذات دلالة حقيقية فإن الطلبة لن يستطيعوا ملاحظتها بصورة صحيحة.

وتتشأ هذه الظاهرة، أيضاً، عندما يسمح المعلم بحدوثها. إن المعلم هو الوحيد الذي يقرر النهج السائد للصف، والأعمال الروتينية، والأسلوب الذي يسوس به مساواة الصف، وإجابات الطلبة التي تنتج عنها.

مناداة الطلبة Calling On Students

إن إحدى الطرق التي تتشأ اهتماماً مستمراً لدى الطالب، هي اعتماد مبدأ مناداة (أو دعوة) طالب محدد للإجابة بعد فترة وجيزة من طرح السؤال:

مثال EXAMPLE: لماذا تكون قطعة المستقيم \overline{AB} عموداً منصفاً لقطعة المستقيم \overline{CD} (توقف قصير)، يا داوود؟
إذا كان الصف متنبهاً على دعوة المعلم لطلب ما لغرض الإجابة على السؤال بعد طرحه مباشرة، فإن كل طالب من طلبة الصف سيكون منتبهاً في حالة دعوته للإجابة على السؤال المطروح.
من جانب آخر، إذا خاطب المعلم داوود قبل طرح السؤال، سيكون داوود الوحيد، بين أقرانه، في يخطئه ومنح انتباهه للمعلم، لأن بقية طلبة الصف قد علموا بأن السؤال لم يطرح عليهم. إن هذا الموقف الأخير لن يعزز المشاركة الفاعلة بالعلية التعليمية. وعليه، فإن على المعلم أن يخاطب طلبة محددين في نهاية السؤال وبالتالي يضمن دوام انتباههم ويقتطع جميعاً طيلة فترة الدرس.

قد يكون مفيداً، في بعض الأحيان، أن تكتشف من من طلبة الصف يحاول تجنب أن يدعى لإجابة السؤال المطروح. وهناك أوقات عندما يكون من الحكمة دعوتهم أو الالتقاء، ببساطة، مع هؤلاء الطلبة بعد انتهاء الدرس لمناقشة مسألة التجنب الجلية لديهم. إن السؤال المطروح هو "كيف يستطيع

في بعض الأحيان، يلجأ المعلم إلى إعادة تكرار طرح سؤال على الصف، بعد إعادة صياغة مفرداته، وقبل أن تتوفر للطلبة فرصة كافية للاستجابة لذلك السؤال. إن أي شك من جانب المعلم بصدد وضوح عبارة السؤال سيجم عنه هذا النوع من التكرار في طرح السؤال. وبصورة عامة فإن المعلم هو الشخص الوحيد الذي يعد السؤال غير واضح!.

قد يكون الصف مهيباً للإجابة على السؤال الأول، بيد أن إعادة صياغة مفرداته من جديد قد توثق الطلبة إرباكاً فتشوش أفكارهم.

إن على المعلم أن يتيح للسؤال الأصلي فرصة كافية للبقاء قائماً لفترة كافية مع إعطاء فرصة كافية للطلبة للإجابة عليه، واختيار مبدأ إعادة صياغة مفرداته، فقط، في حالة عدم توقع وجود إجابة صحيحة - وشيكة للسؤال المطروح.

يمتلك الطلبة قدرة، غير مشكوك فيها، على تفسير سؤال المعلم بصورة صحيحة، بالرغم من عدم وضوحه، وفي مثل هذه الظروف ينبغي على المعلمين أن لا يكونوا نزاعين إلى الانتقاد بإفراط بصدد مضمون أسئلتهم المطروحة.

إن المساواة المناسبة بعبايراتها الواضحة والخالية من اللبس ستدراً هذا الموقف بمرته.

تجنب تكرار إجابات الطالب

Avoiding Repetition of Student Answer

ينبغي على المعلم عدم تكرار إجابات الطالب، لأسباب مماثلة لتلك التي نوقشت قبل قليل. وإذا اتكل الطلبة، وعولوا على المعلم في إعادة جل إجابات الطلبة المهمة على أسئلتهم، فإنهم، في آخر الأمر، لن يصفوا بأسماعهم إلى ما يقوله رفاق صفهم.

إن هذه الظاهرة ستؤدي إلى إحباط آلية التفاعل القائم خلال الدرس. وإذا كانت إجابة الطالب لا يمكن سماعها بوضوح، بحسب تقدير المعلم، آنذاك ينبغي عليه أن يكلف الطالب ذاته، أو أحد زملائه بإعادة الإجابة بصوت مسموع.

إن الالتزام بهذا الإجراء سيكون، بالتأكيد، سبباً موجباً لتحدث الطلبة بصوت عالٍ وعبارات واضحة لتجنب الاضطرار بإعادة إجاباتهم (أو سماع الطلبة وهم يكررون إجاباتهم).

توجد لدى بعض المعلمين عادة "المعالجة العقلية Mentally processing" - لإجابات الطلبة بصوت عالٍ، مما ينجم عنه تكرار إضافي لإجابة الطالب. أن تنبيه معلم المعلمين إلى هذه العادة سيؤدي إلى تقليصها، أو بترها من دائرة سلوكهم اليومي.

بأسلوب نقدي، بالمقارنة مع تلك التي تقل فيها فترات انتظار المعلم بعد طرح السؤال على طلبة عن هذا البعد الزمني (ثلاث ثوان).

وقد وجدت الدكتورة روي، كذلك، إن المعلمين الذين ينتظرون بمعدل يزيد على ثلاث ثوان قبل طلب الإجابة على أسئلتهم القروضة يتمتعون بالنتائج الآتية:

- تزداد فترة إجابات الطلبة بمقدار 800%-400.
- بالرغم من كون عدد المتطوعين للإجابة مقيولاً، فإن هناك زيادة ملحوظة في الإجابات.
- تدني نسبة الإخفاق بالإجابة.
- تزداد ظاهرة الثقة بالنفس.
- يطرح الطلبة المزيد من الأسئلة الرصينة.
- تزداد مساهمة الطلبة الضعفاء والتردد (تتراوح الزيادة بين 1.5% إلى أكثر من 37%).
- ازدياد التفكير الخلاق في الإجابات، فتنوع إجابات الطلبة وتعمد.
- تقل مشاكل القصاص والعقاب.

إن إحدى التقانات الفعالة لتحديد فترة الانتظار التي تلي سؤال المطروح على الصف تكمن في اعتماد مبدأ تسجيل أحداث المرس على شريط تسجيل، ومن ثم يمكن تقدير الفترات الزمنية التي تلت كل سؤال من الأسئلة المطروحة في أثناء إعادة التشغيل. ثم حاول أن تزيد من البعد الزمني لفترة الانتظار (إذا كانت الفترة السابقة قصيرة جداً) وعاود تسجيل أحداث الدرس لتفحص الآثار الناجمة عن زيادة فترة الانتظار. إن مثل هذا التعرّين كفيل بإعطاء نتائج أفضل.

بعد نجاحك في زيادة البعد الزمني لفترة الانتظار التي تلي طرح أسئلتك الصفية، تستطيع محاولة التوقف برهة من الزمن بعد انتهاء الطالب من الإجابة، لإتاحة فرصة مناسبة له بالتفكير، أو تسمح له بإضافة المزيد من المعلومات لإجابته الابتدائية.

إن هذا النوع من وقت الانتظار يمتلك تأثيرات مشابهة لتلك التي تنتج عن النوع الأول من وقت الانتظار على البيئة التعليمية. وقد تم بيان هذا الأمر بوضوح من خلال تحليل أجرته الدكتورة روي على أكثر من 800 شريط تسجيل لدروس أعدت في مدارس البنين، والضحاحي، والأرياف.

التنوع في المسألة Variety In Questioning

قد يكون من أهم عناصر للمساءلة الصفية الجيدة، كما هو الحال في جل جوانب التعليم الجيد هو التنوع. وينشأ التنوع

المعلم اكتشاف هوية الطلبة الذين يحاولون تجنب دعوتهم بالإجابة على سؤال ما؟.

نقد أظهرت الخبرة أن المعلم بعد أن يطرح سؤالاً على الطلبة ويتوقف زمناً قصيراً، لينظر على طلبته تمهيداً لاختيار الذي سيدعوه إلى إجابة السؤال، فإن الطالب الذي يبذل جهداً واعياً لتجنب اتصال نظره بنظر معلمه، هو الذي يقع تحت طائلة افتراض المعلم بأنه لا يرغب أن يدعى للإجابة على ذلك السؤال.

إن هذا التقادي المتعمد، يظهر جلياً في بعض الأحيان، في تظاهر الطالب بأنه منشغل جداً، بحيث أن دعوة المعلم له ستقاطع مع تركيزه المنصب على مادة المعلم.

يمكن للمعلم في بعض الأحيان أن يعمق هذا الأمر عن طريق توجيه عبارة عامة إلى الصف حول هذا النوع من التجنب والتفادي المتعمد، وبأن تنفيذ الأمر بصورة صحيحة سيؤدي بالطلبة إلى اكتشاف طرافة هذا السؤال. (لأن كثيراً من الطلبة قد يكونون ملامين بهذا النوع من السلوك بين حين وآخر) وسيدركون أن مدرّسهم يظن جداً، وذكي، وأن مخادعته ليست بالأمر السهل. من ناحية أخرى، ينبغي على المعلم، فيما بعد، أن يراقب بعناية، وعن كثب أنواعاً أخرى من التجنب، والتي تمتاز بكونها أكثر ذكاء، مثل التقنيات التي يستخدمها الطلبة لتجنب الأسئلة المطروحة (وبالخصوص عندما يشعرون بأنهم ليسوا قادرين على إجابة السؤال بصورة صحيحة).

انتظر - لوقت قصير بعد طرح السؤال

Wait - Time After Asking a Question

إن ترك وقت كاف للطلبة بالتفكير في السؤال الذي طرحه المعلم هو أحد الأمور المهمة بميدان مساءلة الصف.

تعد "ماري بود روي" Mary Bud Rowe إحدى الباحثات التميزت والرائدات في ميدان سلوك المساءلة لدى المعلم. وقد كان للنتائج التي توصلت إليها عبر سني عملها البحثي تأثيرات عميقة على أداء المعلم في الصف المدرسي. فقد وجدت في تحليلها الشامل لموضوع إنجازات الصف، إن معظم المعلمين، عند المتوسط، يتوقعون إجابة الطلبة على أسئلتهم خلال فترة زمنية تقل عن ثانية واحدة، في حين ينتظر بعض المعلمين ما يقارب بمعدل الثلاث ثوان لكي يجيب الطلبة على أسئلتهم. وعندما قامت بمقارنة إجابات الطلبة في ضوء فترات انتظار مختلفة، وجدت أن فترة الانتظار الأطول (مدة ثلاث ثوان أو تزيد) تنتج إجابات تمتاز بتفكير أكثر عمقا، مع زيادة وتعميق مناقشة الصف، وتمكين الطلبة من تحليل الموقف

القائمة في السؤال، فانه قد يحجم عن إجابته بسبب الشك في الجزء الثاني من السؤال، وبالمخصوص، فيما إذا كانت طريقته ستتم عن "حل ممتاز".

إن الطريقة المحسنة في طرح السؤال: "أي طريقة ينبغي أن نستخدمها لحل هذه المسألة (توقف قصير)، يا باربارا؟" هل إن هذه هي الطريقة الأكثر كفاءة لحل هذه المسألة (توقف قصير)، يا كارسا؟".

مثال EXAMPLE: أي من المثلثات متطابق مع الآخر ويقاسمه بزاوية مشتركة بينهما؟

قد يكون الطلبة متأهبين لإجابة الجزء الأول من السؤال، لكنهم قد يترددون بعد سماعهم للجزء الثاني بسبب حاجتهم إلى المزيد من التفكير للتفويض عن "الزاوية المشتركة"، وقد يرتبك بعض الطلبة بسبب السؤال وينفر عنه.

يمكن أن يطرح السؤال بالصيغة الآتية: "أي مثلثين يتشاركان بالزاوية المشتركة ويتطابقان (توقف قصير)، يا ميبيل؟" تستطيع أن تختار طرح السؤال كسؤالين منفصلين، أيضا.

في كل من المثالين اللذين حوى كل منهما سؤالا متراكبا، ظهر بوضوح التعقيد والتوسع الذي اجري على السؤال الأصلي. وإن هذا الأمر قد نجم عنه عكس التأثير المطلوب بالضبط!

سؤال متعدد Multiple Question

ينشأ السؤال المتعدد عن طرح سؤالين مترابطين في سياق محدد، ودون السماح بإجابة الطالب ما لم تستكمل عملية طرح كل من شطري السؤال.

مثال EXAMPLE: أي من المثلثات ينبغي علينا البرهنة على تطابقها، وكيف مستعدنا على برهنة أن قطعة المستقيم AB توازي قطعة المستقيم CD ؟

على الرغم من أن الطالب قد يدرك أي المثلثات بحاجة إلى البرهنة على تطابقها، فانه قد لا يدرك كيف سيسهم المثلث المتطابق بمساعدته على برهنة $AB \parallel CD$. إن هذا الطالب، بالتاكيد، لن يقدم بالإجابة على السؤال.

من ناحية ثانية، فإن طرح السؤال على شكل قسمين، ستتيح الفرصة للإجابة على القسم الأول قبل طرح القسم الثاني، وبالتالي يتوقع إجابة المزيد من الطلبة.

ويعزى إلى أنواع الأسئلة المطروحة، وأسلوب طرحها، وطريقة دعوة الطلبة (متطوعين أو غير متطوعين) للإجابة على الأسئلة، والظرائق الإجرائية التي تتم من خلالها الإجابات.

يقلل التنوع من إمكانية توقع ماهية السؤال الذي سيطرح في المسألة الصعبة، الأمر الذي يعزز دوام الانتباه والاهتمام بين الطلبة. وعندما يعمد المعلمين إلى تغيير الأسئلة المطروحة وتنويعها، يتوجب على الطلبة أن يكونوا أكثر تيقظا في أمور تتجاوز ببساطة محتوى السؤال. وسيكون هذا التيقظ الإضافي سيكون سببا لتحسين التعلم نتيجة إدامة أجواء متجددة داخل الصف. فضلا عن تزويد الطلبة بخبرة أكثر تشويقا، فإن المعلمين أكثر ميلا إلى أن يفعموا بالانشااط نتيجة لروح التحدي التي تبثها الحاجة إلى إبداع المزيد من التنوع في الأسئلة المطروحة على طلبة الصف.

عشرة أنواع من الأسئلة ينبغي تجنبها

Ten Types Of Questions To Avoid

في أي سياق من المسألة، قد تطرح بضعة أسئلة ضعيفة دون أن تحدث ضررا، لكن عددا لا بأس به من الأسئلة الهزيلة سيؤدي بلا ريب إلى إضعاف الحرس وهشاشته.

ندرج أدناه عشرة أنواع من الأسئلة التي ينبغي أن يلتزم المعلم بتجنبها، لأنها قد تكون سببا في غياب الخصوبة التي نتأملها في تبني المسألة الصعبة.

سؤال متراكب Overlaid Question

يجد المعلمون، دوما، عند منتصف طرحهم السؤال على طلبة صوفوفهم أن محتوى هذا السؤال ليس دقيقا بصورة كافية لكي يثير الإجابة التي يرومونها من طلبتهم. وبدلا من أن يدع السؤال الجديد ينطلق مستحذا على ميزاته، ويغطي للطلبة فرصة للإجابة عنه، فإن المعلم قد يضيف على السؤال ويزيد فيه قبل أن تتوفر للطلاب فرصة مناسبة للإجابة عن السؤال الأصلي.

عندما يحدث مثل هذا الأمر، فإن الطلبة الذين استوعبوا السؤال الأصلي وأدركوا اللطوب منه قد يترددون الآن في الإجابة لعدم تفقهم بفهمهم للسؤال بكامله. لذا، فإن توسعهم بالسؤال سيورثهم الشعور بعدم الوضوح، وأن المعلم قد سبب إرباكا عند ما يطرئ على أفكار إضافية.

مثال EXAMPLE: أي طريقة ينبغي أن نستخدمها لحل هذه المسألة والتي ستجعل إجابتنا ممتازة؟

إذا علم الطالب أي طريقة سوف يستخدم لحل العقبة

بسيطاً إذا كان السؤال جزءاً ناتجاً عن نمو سلاسل من الحقائق المتعاقبة، والتي تمتلك أهمية خاصة لحل المسألة قيد الاعتبار. من جانب آخر، فإن الأسئلة الواقعية لن تلعب دوراً ملموساً في تحفيز التفكير لدى الطلبة.

مثال Example: ما هي مبرهنة فيثاغورث؟

لا تتطلب إجابة هذا السؤال بذل المزيد من الجهد الفكري، فالطالب إما أن يكون على معرفة أكيدة بالجواب، أو لا يمتلك ثمة جواب صحيح على هذه المسألة.

إذا كنا متفقين مع مقدمتنا المنطقية بخصوص مسألة الصف، آنذاك وبعبارة أخرى، فإن الأسئلة الواقعية لا تسهم إلا بجزء ضئيل في بيئة التعلم الفعال داخل الصف.

أسئلة موجزة Elliptical Question

لا تقدم الأسئلة غير الواضحة، بسبب ميل المعلم إلى إغفال تفصيل بعض مفرداتها، أية إضافة مفيدة للدرس. وبالرغم من كونها لا تحمل إضراراً مباشرة إلى الدرس، فإن السؤال الموجز (الحذقي) هو ببساطة إشاعة - غير ضرورية - للوقت.

مثال EXAMPLE: ماذا يصدد هاتين الزاويتين؟

كثيراً ما تكون لدى المعلمين عادة التفكير بصوت عالٍ، فقد يبدأون بالنظر إلى زوج من الزوايا وهم يفكرون بمهنية الأسئلة التي سيطرحونها حول هاتين الزاويتين، مثل "ما هي العلاقات القائمة بينهما" أو "ما هي الزاوية التي تمتاز بقياس أكبر؟". في أية حالة من هذه الحالات، يستطيع المعلم، بدلاً من ذلك، في البداية أن يعبر عن الفكرة: "ماذا يصدد هاتين الزاويتين؟" التعبير عن هذه الفكرة في سؤال لا يمتلك جواباً سيفضي إلى إشاعة وقت الصف بدون فائدة. يمكن للمعلم أن يطرح سؤالاً بصيغة "ما هي العلاقة بين هاتين الزاويتين (توقف قصير) يا جيل؟"، حيث يفترض وجود إجابة محددة له.

إذا أراد المعلم أن يقول شيئاً (لكي يتجنب الركود المؤقت في الدرس) عندما كان يفكر بهاتين الزاويتين، يستطيع القول: "تأمل هاتين الزاويتين". إن هذا الأسلوب في طرح السؤال سيفيد في تحقيق الغاية المرجوة ولن يضيع وقت الدرس بالإجابات الباردة التي قد يطرحها الطالب مثل "ماذا بشأن هاتين الزاويتين؟".

يمكن إجراء ذلك كما يأتي "أي من المثلثات ينبغي أن تبرهن على تطابقها (توقف قصير)، هنري؟". كيف ستتمكننا هذه المثلثات المتطابقة على برهنة أن $AB \parallel CD$ (توقف قصير)، ايفيلين؟".

إن هذا النوع من الأسئلة يشابه، إلى حد كبير، السؤال المتراكب في كونه يتألف من قسمين، بيد أنه يختلف عنه بأن كلا من قسمي السؤال يمكن أن يكون مستقلاً بذاته ولا يفترق في الإجابة على أحدهما إلى القسم الآخر.

يلجأ المعلمون، في أحيان كثيرة، إلى الأسئلة المتعددة عندما يشعرون بأن الوقت الباقي من الدرس قد بات قصيراً، أو عندما يضيق صبرهم ويأملون انقضاء الدرس بسرعة أكبر. وكما كان سابقاً، فإنه يسهل على أن يثبط الطلبة من الإجابة على مثل هذا النوع من الأسئلة.

وللحصول على إجابة صحيحة، ينبغي أن يكون الطالب قادراً على الإجابة السليمة لكل من قسمي السؤال. وعليه فإن الطالب الذي يتمكن من إجابة قسم واحد فقط من السؤال بصورة صحيحة، لن يتطوع بالإجابة على السؤال برمته. أن تقليل حجم المساهمة المشتركة للطلبة الذين سيجيبون على الأسئلة المتعددة، سيجعل المعلم مسؤولاً بصورة مباشرة عن نقصان التعلم الفعال خلال فترة الدرس.

مثال EXAMPLE: ما هي مميزات هذه المعادلة (الإشارة

إلى معادلة تربيعية)، وما هي أنواع الجذور التي تمتلكها؟ إن هذا السؤال المتعدد يمكن أن يعامل كمؤالين منفصلين، بيد أنه، على الأكثر، في صفته الحالية لن يشجع الطلبة للإجابة عليه. ويمكن إبراز المعلومات نفسها من خلال السؤال الآتي: "ما هي مميزات هذه المعادلة (الإشارة إلى معادلة تربيعية) (توقف قصير)، يا أليس؟" و بناءً على قيمة هذه الميزة، ما هي أنواع الجذور التي تمتلكها هذه المعادلة (توقف قصير) يا جوردان؟".

عن طريق كبت إجابات الطالب، فإن الأسئلة المتعددة تسهم في تقليل تأثير الدرس وفعاليته، لذا ينبغي تجنب هذه الظاهرة والاعتماد عنها.

أسئلة واقعية Factual Questions

لا يوجد، بالتأكيد، ثمة خطأ في طرح سؤال يملك جواباً واقعياً

مثال EXAMPLE: هل المثلث ABC متساوي الساقين؟

لماذا يطرح المعلم هذا السؤال ان كان المثلث بساقين غير متساويين؟ ما لم يقرر المعلم الاحتمال على الصفر، فإن الطلبة سيكونون على صواب بأن المعلم يبحث عن إجابة بالإيجاب.

لماذا إذن يطرح السؤال؟ سيكون السؤال ذا نتيجة إيجابية، عندما يطرح كما يأتي "ما هو نوع المثلث ABC (توقف قصير) ابرني؟" فتكون هذه الصيغة المستحدثة محاولة ناجحة لتجنب المسألة بـ نعم /لا أو بأسلوب حرز أو تخمين كلما كان ذلك الأمر ممكناً.

أسئلة غامضة Ambiguous Questions

قد يعمد المعلم، في بعض الأحيان، بالبحث عن إجابة تتطلب تفسيراً محدداً لموقف ما . هنا يحاول السائل الحصول على الإجابة المطلوبة عبر سؤال واحد، مما يحدو به إلى طرح سؤال غامض، فيقتصر على جملة من الإجابات المتباينة، وهي مع ذلك صحيحة .

قد يسهل الوصول إلى الإجابة المطلوبة عند طرح سلسلة من الأسئلة القصيرة - المتعاقبة.

مثال EXAMPLE: بماذا يختلف قانون جيوب الزوايا

Sines عن قانون جيوب تمامها Cosines ؟

يمكن إعطاء أكثر من إجابة صحيحة لهذا السؤال . لا ريب بأن السياق البياني للسؤال المطروح سيساعد في توضيح الخيارات بين الإجابات الصحيحة.

سيميل الطلبة إلى التفرع عن الإجابة على هذا السؤال بسبب الارتباك الذي ينجم عن الغموض الذي يلف السؤال. فقد يتساءل الطلبة فيما إذا كان السؤال يشير إلى الاختلاف في مظاهر الصياغة الرياضية لهذين القانونين، أو الاختلاف في مبادئ التطبيقات، أو الاختلاف في الاشتقاق، وهكذا ...

إن إحدى الصيغ الممكنة لطرح هذا السؤال هي: "تحت أية ظروف، أو حالات مختلفة تستخدم قوانين جيوب الزوايا وجيوب تمامها (توقف قصير) ، يا جوان؟".

لأن مثل هذا الإرباك ينتشعب عنه انخفاض ملحوظ في خصوبة الدرس ، بصورة جليلة ، ومن أجل هذا ينبغي تجنب الأسئلة الغامضة والمبهمة في دائرة مسألة الصف.

مثال EXAMPLE: ماذا بشأن هذين المستقيمين المتوازيين؟

شأن المثال السابق، فإن هذا السؤال الموجز يسأل إما عن لا شيء. أو أكثر مما يستطيع معظم الطلبة على تقديمه للإجابة عليه.

إن الأسئلة مهما كان نوعها، تصبح عرضة لإجابات وملاحظات بارعة يصعب التعامل معها نتيجة لإغفال التفاصيل. وقد يرغب المعلم بقول شيء ما مثل: "أي من الزوايا نستطيع البرهنة على تطابقها باستخدام هذين المستقيمين المتوازيين. (توقف قصير) ، يا ليزا؟".

لا يحتاج المعلم إلى أن يهدي ردود فعل شديدة إزاء الهدوء، بل ينبغي عليه التوقف لإعطاء بعض الأفكار المتعلقة بالسؤال، بدلا من أن يسألها بصيغة لا تمتلك إجابة واضحة عليها.

أسئلة نعم / لا أو التخمين

Questions Yes/NO or Guessing

في معظم الأحيان فإن أسئلة نعم /لا ، أو التخمين لا تمتلك سوى قيمة ضئيلة، ويستثنى من ذلك، في بعض الأحيان، إمكانية أن تستثمر أسئلة نعم / لا عن طريق تحويلها إلى أسئلة فكرية جيدة.

مثال EXAMPLE: هل قطعة المستقيم \overline{AB} عمودية على

قطعة المستقيم \overline{CD} ؟

ينال الطالب الذي يحاول الإجابة على هذا السؤال مجازفة بسيطة جداً، لأن فرصته بأن تكون إجابته للسؤال صائبة تزيد، بالحقبة على 50%.

فالمعلم يطرح السؤال بكثرة تفوق نصدانه للإجابة الصحيحة، كذلك فإن الخطط الذي يرتبط السؤال به، سيوفر، أيضاً، دعماً إضافياً لتلمس الإجابة الصحيحة، وعليه يصبح السؤال ذو صيغة بلاغية، ومنمق إلى حد ما. ينبغي تغيير صيغة السؤال بحيث يصبح: "ما هي العلاقة القائمة بين قطعة المستقيم \overline{AB} وقطعة المستقيم \overline{CD} (توقف قصير)، يا هولي؟".

إن هذا الاستفسار سيحدو بالطالب إلى استكشاف العلاقات المحتملة التي يمكن وجودها بين قطعتي هذين المستقيمين، ثم سيعمد إلى اختيار العلاقة التي يشعر بأنها مناسبة لوصف ذلك. إن السؤال ، بصيغته المعدلة، سيفيد في تنشيط التعلم الفعال بين طلبة الصف.

إذا افترضنا بأنه ليس كل من في الصف على علم بالإجابة الصحيحة للسؤال، لذا فإن بعض الطلبة سيقرون أصواتهم بالإجابة الصحيحة.

قد يتوقف أحد الطلبة عن الإجابة، وبدلاً من ذلك، ينصت إلى الجواب الصحيح وقد تقع على مساحة إجابة خاطئة (لأنه قد تصدر إجابة خاطئة عن أحد زملائه القريبين منه)، وبمدها سيجادل أن يتعلم مفهوم أو فكرة جديدة بواسطة عينة خاطئة من المعلومات. إن الوقت المستنفذ في تصحيح هذا الخطأ سيكون بالطبع غير مرغوب فيه.

إن رجحان كافة أسئلة إجابة جميع الطلبة بصوت واحد سوف تسمح لبعض الطلبة بالمرور خلال الدروس دون تعلم مادة الموضوع المطروحة فعلاً. في هذه الحالة لن يكون المعلم قادراً على تتبع العقبات الفردية التي يعاني منها الطالب غير المستفيد، لأن الوضع سيكون ضبابياً بالإجابة الجماعية.

هذا الأمر يعطي مبررات إضافية لتجنب أسئلة الإجابة الجماعية، قدر الإمكان. بيد أن الاستخدام العرضي لهذا النوع من الأسئلة قد يكون مقبولاً إذا كانت الإجابة ليست حاسمة جداً في عملية التطوير، أو كان من الضروري إشراك جميع طلبة الصف، وحتى عند قصد النوع.

إن التغيير في الأسلوب، سيوفر تنوعاً ملحوظاً بالدرس، ويكون منهجاً سليماً.

إن سؤال الإجابة الجماعية ينبغي استخدامه بصورة محدودة حتى في الحالات التي تفيد من هذه الفاية.

أسئلة مستقلة بسرعة وفجأة Whiplash Questions

إن الأسئلة المستقلة بسرعة وفجأة هي بصورة عامة، لم يتم التخطيط لها بواسطة المعلم، ولكنها تحدث عندما يقرر المعلم إعداد سؤال يبعد من خلاله عن منتصف الطريق.

مثال EXAMPLE: ميل المستقيم هو، ماذا ؟

علاوة على إحباط الطلبة وتثبيط عزيمتهم، يأتي حال من الأحوال، فإن ضرراً محدداً ينشأ عن هذا النوع من الأسئلة. فمما لاشك فيه أن العيب الأكبر يعود إلى عدم السؤال وانعدام جدواه.

إن عدم توقع السؤال سيحزنوا بالطلبة أن يكونوا غير متيقظين، فيصبح لزاماً عليه، في البداية، إعادة ترتيب عبارات السؤال ومفرداته، عقلياً، قبل حلول الإجابة عليه.

إن الكلمة المفتاحية Keyword التي يبتدئ بها سؤال ما

مثال EXAMPLE: ما هي العلاقة القائمة بين مساحة الدائرة ومحيطها ؟

مرة ثانية، توجد أكثر من إجابة صحيحة لهذا السؤال. فهل إن السائل مهتم بالعلاقة العددية Numerical، أو العلاقة الفيزيائية Physical، أو العلاقة النسبية إلى بعد من الأبعاد Dimensional، أو علاقة أخرى أقل جلاء؟

بالرغم من أن السياق البياني لطرح السؤال قد يساعد الطلبة في الإجابة على السؤال، فإن من النادر تجنب الارتباك عندما يطرح سؤال غامض أو مبهم. إن إحدى الطرق المميزة في طرح هذا السؤال هي: "ما هي النسبة العددية بين مساحة الدائرة ومحيطها (توقف قصير)، يكارول ؟"

ملاحظة: ليس بالضرورة أن نصف عملية طرح الأسئلة التي تمتلك أكثر من جواب صحيح بأنها موزة سيئة وغير مرغوب فيها. فنحن نعالج موضوع "السؤال الغامض أو المبهم" في هذا المقام، وليس النوع المذكور آنفاً.

وقبل أن تطرح السؤال الذي يحتمل أن يكون غامضاً، حاول أن تحدد الصفات المميزة للوضع، بمدها طرح سؤالاً مختصراً، وسهلاً لتحفيز الإجابة المطلوبة.

أسئلة يجاب عليها جماعياً بصوت واحد

Chorus Response Questions

بالرغم من كون السؤال الذي يتطلب إجابة الجميع بصوت واحد قد يمتاز ببعض المميزات الحسنة، فإن الإجابة الجماعية تزود الدرس، في معظم الأحيان، بقيمة ضئيلة. وعندما يجيب الصف، بأجمعه، بصوت واحد على سؤال ما، لا يستطيع المعلم، وبصورة عامة، تحديد هوية الطلبة الذين لم يجيبوا أصلاً على سؤاله.

فضلاً عن أن الإجابة الجماعية قد تصحح، بالنسبة للطلبة الذين يتوقفون إلى التعلم من جواب غيرهم، غير واضحة ولا يمكن سماع الجواب الصحيح بصورة سليمة.

إن فقدان الجواب على سؤال ما، قد يجعل الطالب يفتقد ارتباطاً مهماً في سلسلة التفكير، فينشأ عنه أذى كبير في عملية التعلم التي يختص بها دون غيره.

مثال EXAMPLE: ما هو نوع الشكل الرباعي ABCD،

أيها الصف؟

أليس كذلك؟

مرة ثانية. ليس شمة حاجة إلى تحويل العبارة "الرقم 7 هو أحد عوامل الرقم 35" إلى صيغة سؤال. ولعل من الأفضل للمعلم إما أن يترك العبارة كما هي (دون تغيير)، أو يطرح سؤال بصيغة: "ما هي عوامل الرقم 35، (توقف قصير)، يا والتر؟"، أو "ياي رقم ينبغي أن يضرب الرقم 7 للحصول على الرقم 35 (توقف قصير)، يالاري؟". إن هذين السؤالين يتطلبان بعض التفكير، من جانب الطالب، قبل الإجابة. فضلا عن استبدال الأسئلة التي تهرح الوقت دون جدوى، فانهما سيستحثان التعلم الفعال.

أسئلة تركز على المعلم

Teacher - Centered Questions

إن من الأمور المرغوب فيها جعل الطالب يمد المعلم جزءا لا يتجزأ عن الصف الدراسي. بالرغم من أن الطلبة على إبداع تام بالاختلاف القائم بين الدور الذي يتبوأه المعلم، وطبيعة الدور الذي يلعبه الطالب، فإن الجانب الأكثر فاعلية لدى المعلم يكمن في استخدامه أسلوب الجمع بصيغة الشخص الأول (مثل: نحن We، أو ضمير المتكلمين نا US) كلما كان مناسباً، عند مخاطبته لطلبة الصف.

فعلى سبيل المثال، التحدث بصيغة "دعنا نبحث فيما يلي..." أفضل من "لدي ما يلي..." لأنها تجعل طلبة الصف يحسون بأنهم جميعاً جزء من فريق يعمل سوية على حل مسألة محددة. ولن يكونوا بحاجة إلى تفكير دائم بأنهم طلبة وأن المعلم يتمتع عنهم. إن الاستخدام المستمر بصيغة الشخص الأول المفرد First Person Singular (أي صيغة أنا، أو ضمير المفرد المتكلم) قد ينشأ عنه حاجز غير مرئي بين المعلم وطلبة الصف، وهو ضرر محتمل التأثير على بيئة التعلم الفعال.

مثال EXAMPLE : اعطني حل المجموعة

$$3x - 5 = 2,$$

إن الطريقة المثلى لطرح المسألة هي "اعطنا حل المجموعة $3x - 5 = 2$ (توقف قصير)، يا الين؟".

مثال EXAMPLE : ماذا ينبغي علي أن أفعل لاحقا لحل هذه المسألة؟ ينبغي أن يطرح هذا السؤال بالصيغة الآتية "ماذا علينا أن نفعل لاحقا في حل هذه المسألة ؟ (توقف قصير)، يا جاك؟".

(مثل: لماذا. متى، ماذا، كيف) تحت الظروف الاعتيادية تضع الطالب في موقف وإعداد نفسي، يجعله جاهزا لتلقي السؤال. ثم معالجة محتوى عبارته. إن السؤال المستل فجأة وبسرعة، لا يوفر قيمة كافية امام عملية التهيئة المؤكدة آنفا، الأمر الذي ينجم عنه إضاعة الوقت، وفقدان الكثير من انتباه الطالب. وإن الطريقة المثلى لطرح هذا السؤال: "ما هو ميل المستقيم (توقف قصير، ياروبرت؟".

مثال EXAMPLE : لدينا الآن قطعة المستقيم \overline{AB} توازي قطعة المستقيم \overline{CD} نتيجة لأية نظرية ؟

لأشك أن السؤال يمكن أن يكون اعمق تأثيرا في حالة وقوع الكلمة المفتاحية التي تثير بيانه إلى بداية عبارة السؤال، فتقرأ كما يأتي "أية نظرية تبرر الحقيقة التي تنص على أن قطعة المستقيم \overline{AB} توازي قطعة المستقيم \overline{CD} (توقف قصير)، يا اديث؟".

من خلال هذه الصيغة، يدرك الطلبة من الكلمة الأولى أن شمة سؤالا يطرح عليه، أما الكلمة الثانية فتجعلهم يركزون على مجموعة من البرهانات التي تعلموها سابقا، عندما يصحون بأساعهم إلى بقية السؤال.

بعد الانتهاء من طرح السؤال سيكون الطلبة على أهمية الاستعداد للإجابة عليه، ودون إضاعة الوقت في إعادة ترتيب مفرداته ذهنيا إن الصيغة الأخيرة للسؤال، تبدو بجلاء، أكثر فاعلية في صيغة الأسئلة المستلة بسرعة، وإن يحتاج المعلم إلى تحويل كل عبارة إلى سؤال من أجل إنشاء مشاركة فاعلة لدى طلبته. إن مثل هذه المحاولة لزيادة مشاركة الطلبة قد تؤدي ببساطة إلى نتائج معكوسة.

أسئلة موجهة Leading Questions

إن السؤال الموجه هو سؤال يشد الإجابة المطلوبة من الطالب. وبصورة عامة لا يؤدي هذا النوع من الأسئلة أية وظيفة معقولة.

مثال EXAMPLE : هل تستطيع القول بأن المثلث ABC متساوي الأضلاع ؟

يذهب معظم الطلبة إلى الإقرار بعدم الاتفاق مع المعلم الذي يطرح مثل هذا السؤال، وعليه فانه لن يثير المزيد من الاهتمام، لأن الطالب، على الأرجح، سيجيب، ببساطة، بالإيجاب.

مثال EXAMPLE : الرقم سبعة هو أحد عوامل الرقم 35،

"لماذا" مثيرة للربح والخاوف!

نحج طالب بالإجابة على تحد لحساب 4 - 5 × بالاجواب 20+، وقد سأل المعلم، "لماذا كان العدد الموجب 20 هو الجواب الصحيح؟" أصيب الطالب بالقلق فأجاب "إن القاعدة تقول عندما نقوم بضرب عددين يحملان نفس الإشارة، يجب أن تكون النتيجة موجبة أيضاً". افترض ان هذا ما يريد سماعه المعلم من طالبه؟ وإذا كان كذلك، فإن المعلم يشجع أسلوب التعلم بالاستظهار ودون أي فهم. وإن لم يكن كذلك، فما سيقوله المعلم، الآن، لتصحيح إجابة الطالب الصحيحة، لكنها غير مقبولة؟.

إن تقانات علم أصول التدريس، وعلم النفس المتفوق سوف تلزم بالتحدي لزوما منطقيا لكي "تفسر وتعلل تفكيرك". وبالنسبة لإجابة الطالب التي لاحظناها في الفقرة السابقة، فإن المعلم يمكن أن يقول "هذا ليس تفكيرك الشخصي. حاول أن تفسر لماذا تعتقد أن حاصل ضرب رقمين سالبين ينبغي أن يكون موجبا؟".

إن الفائدة الثانية التي تنتج عن سؤال الطلبة بتفسير وتحليل تفكيرهم تعود إلى كون معظم الناس يجدون بأن حديثهم حول ما يفكرون به أقل تهديدا بكثير من محاولة تفسير بمانا يفكر الآخرون. أما الفائدة الثالثة لـ "تفسير تفكيرك" فتعود إلى كونها تؤثر إلى أفضل مسار باتجاه الذاكرة - طويلة الأمد، وبالأخص، إعادة إنشاء المعرفة الناتجة عن العمليات الفكرية الذاتية للطلاب.

قارن وقابل Compare and Contrast

صنع أحد الأقسام السابقة بتحذير واضح إزاء الأسئلة الغامضة أو المبهمة، مثل "ما هي العلاقة القائمة بين مساحة الدائرة ومحيطها؟". لأن الطالب قد يصاب بالارتباك، كون هذا السؤال - كما ذكرنا سابقا - يمتلك أكثر من إجابة. يمكن الاحتفاظ بقيمة السؤال والارتقاء بها باستخدام صيغة قارن وقابل التي تخلو من الغموض.

مثال EXAMPLE: قارن وقابل بين محيط الدائرة ومساحتها.

إن جميع استبصارات الطلبة يطلق عليها مندفعة إلى الأمام Forth. ويستطيع الطالب مقارنة محيط الدائرة بمساحتها عبر إيراد مبدأ أن قياساتهما جميعا ترتبط بالدائرة، وتتضمن العدد P، وتعتمد على نصف قطر الدائرة، وغيرها من الأمور ...

إن المثالين السابقين يظهران طبيعة ملاحظات المعلم الذي يريد (وإن لم يكن بصورة واعية) أن يكون بمثابة عن طلبته، وهي ظاهرة لن تصل بالجميع إلى بيئة صافية مناسبة تعليميا.

مسألة الصف وسيلة لتوليد تفكير راق

Classroom Room Questioning As A Means To Generate Higher - Order Thinking

يستخدم المعلم منهج المسألة في الصف التفاعلي - المثالي لمساعدة الطلبة على الفهم، أما الطلبة فيوظفون هذا المنهج للحصول على مرشد يعاونهم في توضيح المسائل المبهمة أو الغامضة. وفرض الارتباك والتشوش المفاهيمي. إن الأدلة التقليدية للمسألة تعالج، على وجه الحصر، موضوع مسألة المعلم. فتنحى قواعدا وصيغا مرشدة لما هو مقبول في دائرة هذا الموضوع، وما يرفض منه.

تمتلك هذه القواعد المرشدة أهمية بالغة هذه الأيام. من أجل هذا ينبغي إثارة جملة من الموضوعات بالاستناد إلى الفهم المعاصر لسيكولوجية الطالب. فعلى سبيل المثال، ليست جميع أشكال الغموض، غير مقبولة، لذا سنحاول استكشاف الطرق التي يمكن أن يوظف خلالها الغموض أو الإبهام، بين الفينة والأخرى، لمساعدة الطلبة في عملية اكتساب فهم أكثر عمقا بالواد والموضوعات الشائعة.

إن بعض الأشكال الجديدة للأسئلة التقليدية، ستقلل، على الأرجح، مستوى القلق لدى الطلبة، ولن تؤثر على جودة التعلم بأي حال من الأحوال. إن جملة من التقانات المستحدثة تمتاز بقدرات متميزة من جانبها.

يثبت قبول الأفكار الجديدة ويوثق أصالة الطرائق القديمة، لأنها (الأفكار الجديدة) تنبثق على هيكل المعرفة الجديدة بالطلبة، وآليات عمل الدماغ، والمسارات التي توظف خلالها المهارات والفهم في دائرة الذاكرة - طويلة الأمد Long - Term Memory. كذلك فإنها تجعل من علم أصول التدريس Pedagogy فنا، وعلمًا، مفعماً بالحياة.

فسر وعلل تفكيرك Explain Your Thinking

إن قيمة الأسئلة التي تمتحن بدقة التعبير العقلاني لإجابة الطالب باتت واضحة وليس ثمة خلاف حول أهميتها. إن من المرغوب فيه أن يكون لدى كل طالب تبرير واضح لكل إجابة من إجاباته، لأن سهولة الوصول إلى الأسس المنطقية ستساعد الطالب على إعادة إنشاء الإجابات الصحيحة، وتخزين المعلومات الجديدة في الذاكرة - طويلة الأمد. ول سوء الحظ فإن كثيرا من الناس، صغارا كانوا أم كبارا، يجدون أسئلة الصيغة

مناسبا للقضية.

مثال EXAMPLE: برهن أو ادحض بأن الكسور يمكن إضافتها، دائما، بإضافة البسوط Numerators والمقامات Denominators.

إن ادحض المتاح لكل طالب هو:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

لأن المجموع هو 1، بينما $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

مادامت كثير من فقرات "برهن أو ادحض" التي تعترض الطالب لا تلبث أن ينتهي بها الأمر لتكون براهين، بينما ينتهي الأمر بواحد من كل ثلاثة منها ليكون دحضاً، فإن الطالب سوف يتعلم كيف يفكر في الدحسيات بالطريقة التي يمدّها كثير من الرياضيين مشكوك بأمرها!.

تعليم الطلبة على طرح الأسئلة

Teaching Students To Pose Questions

يتذكر الناس أسئلتهم الشخصية، بسهولة أكبر، من تذكر الأسئلة التي يطرحها الآخرون. فضلا عن ذلك، فإن عملية صياغة سؤا لك الشخصي تساعد على إضاح مصادر الخبرة والارتباك. تستغرق مسائل الطلبة الشخصية وقتا قصيرا جدا في مساعدتهم على تحسين مهاراتهم، وببساطة، إن يتعلم الطلبة كيفية طرح أسئلة جيدة عن طريق سماعهم لمدرس يطرح أسئلة من هذا النوع. ولكنهم سيتعلمون كيفية طرح أسئلة جيدة بواسطة صياغتهم لأسئلة جيدة على ارض الواقع.

قالب سؤال Question Template: إن إحدى الطرق التي تعمل بنجاح، هي تلك التي تزود الطلبة بمقابل للأسئلة، وتتيح المناقشة اليومية لقيمة كل سؤال عندما يمد المعلم إلى نمذجة الأسئلة داخل غرفة الدرس. وقد يطلب من الطلبة كتابة سؤال والإجابة عليه بالاستناد إلى عمل اليوم، وبجعله جزءا من واجبه البيت. ويمكن استدعاؤهم، في اليوم التالي، لغرض طرح أسئلتهم، والتعريض بها على رفاق الصف. يمكن استخدام لوحة إعلانات لعرض أفضل سؤال لطالب خلال الأسبوع. و ينبغي أن يتضمن كل اختبار سؤالا متميزا أعده أحد الطلبة خلال الأسبوع الماضي.

توفر القائمة الآتية نقطة بداية لقالب سؤال الطالب، ويمكن استنساخها على ورقة مستقلة، وتوزيعها على جميع الطلبة لكي تدرج بوصفها ورقة أول في دفاتر ملاحظاتهم الشخصية. ينبغي أن توفر، أيضا، على حواسيبهم الشخصية، بحيث

قد يستطيع الطالب أن يقيم مقابلة بين المحيط والمساحة بملاحظة إن المحيط هو مقياس لطول (القوس)، بينما المساحة مقياس لامتداد المكان، أو ملاحظة إن المساحة يمكن استنباطها من المحيط بواسطة توسيع الصيغة الخاصة بمساحة متعدد الأضلاع - المنتظم Regular Polygon $A = \frac{1}{2} a p$ حيث a العمود المقام من نقطة منتصف متعدد الأضلاع على أحد أضلاعه. (apothem) p = المحيط .

أو ملاحظة انه بالنسبة للدائرة:

$$A = \frac{1}{2} \times r \times 2\pi r = \pi r^2$$

مثال EXAMPLE: قارن وقابل بين الطرق التي تفكر بها حول جمع الكسور وضربها.

إن من المناسب بالنسبة للطلبة إيراد الخوارزميات، ومناقشة الأسس المنطقية التي تكمن وراء هذه الخوارزميات. كما ينبغي إرشاد الطلبة إلى اعتبار مسألة إضافة وطرح أي صيغتين تتضمن وحدات (لأنه، وبعد كل شيء، فإن المقام هو وحدة). إن الطالب الذي يستطيع، بنفاذ بصيرته، مقارنة، ومقابلة الأسس المنطقية التي تكمن وراء إضافة 5 أرتال إلى 4 أقدام، وضرب 5 أرتال بـ 4 أقدام، وإضافة 5 بوصات إلى 4 أقدام، وضرب 5 بوصات بـ 4 أقدام، هو بحق على المسار الصحيح باتجاه فهم كل من الرياضيات والعلوم بعمق وتكامل افضل.

برهن أو ادحض Prove or Disprove

إنه من المفيد للطلبة، التعرض إلى بنية البرهنة أو الدحض، مبكرا، عند تعريفهم بموضوعات البرهان. ومخيرهم التوجه صوب البرهان بأن القضية المطروحة تصح بصورة عامة. ولكي يكونوا ماهرين بالبرهنة، فإن على الطلبة أن يدركوا بأن جل القضايا، أو العبارات التي يقومون بصياغتها، بأنفسهم، لن تكون قابلة للبرهان. إن بنية البرهنة، أو الدحض تسهم في تشجيع الطلبة على محاولة إيجاد مثال مضاد Counter Example لتوكيد سهول قبل محاولة إيجاد البرهان.

مثال EXAMPLE: برهن أو ادحض أن أي شكل رباعي الأضلاع بقطرين، متعامدين، ومتساويين هو مربع. إن مخططا بسيطا بطائرة ورقية سوف ينفع بوصفه دحضاً

- تحت أية ظروف سيسمح لنا باختصار الكميات المتشابهة في مقام أو يسط كسر ما؟
إن صياغة بعض هذه الأسئلة ستكون خطوة أساسية لفهم رصين للمفاهيم الرياضية الرئيسة.

صندوق السؤال The Question Box

إن إحدى الطرق التي تساعد الطلبة على متابعة أسئلتهم الشخصية، في ظل تحسين قدراتهم على صياغة الأسئلة وتنظيم عملية التفكير لديهم، تكمن في تشجيعهم على الاحتفاظ بصندوق السؤال. سيحتفظون، كذلك، بصندوق بطاقة الفهرس Index Card، في البيت، والتي يستخدمونها في إعداد ملف الأسئلة اليومية - الشخصية حول المدرسة والتعلم.

سراجع الطلبة، كل اجازة نهاية أسبوع، الأسئلة التي تم إدراجها خلال تلك الفترة، والكتابة على ظهر بطاقة الفهرس أي جواب باستطاعتهم إضافته الآن. كذلك ستوفر أمامهم فرصة شحذ الأسئلة التي لم تحظ بإجابة، أو لتفريق هذه الأسئلة إلى مجاميع أكثر بساطة.

إن أي إلغاء، في عملية التفريق، التي تمارس على صندوق السؤال للإجابة على أسئلة قديمة، يمكن الآن توجيهها - بنجاح - مع رفع بطاقات الفهرس التي تضم الأسئلة المجاب عليها، والتي باتوا على إدراك تام بمحتواها.

بمرور السنوات، سيصبح صندوق السؤال موردا هاما وأداة استعراض يمكن توليفها بميدان مشاريع البحوث. يساعد صندوق السؤال الطلبة على تعزيز التعلم، والتفكير حول ماذا يحتاجون معرفته، وماذا يحتاجون استمراره، ولتطوير مبادئ التحري والبحث المستقبلي. كذلك فإن هذا الصندوق يساعد الطلبة - الأصغر سنا - على أن يستشعروا المسؤولية إزاء تعليمهم الذاتي.

خلاصة Summary

تذكر، عند طرح سؤال على الصف، " أن تنصت إلى سؤالك - بأذن صاغية ناقدة، فقد تكون أحد أفضل النقاد لتلك. وينبغي أن يكون التحليل الذاتي - الحذر واليقظ هدفا شامخا أمامك، وستكون عملية تسجيل شريط فيديو ذات فائدة كبيرة.

إن التقييم - الذاتي المستمر لأدائك التعليمي سوف يثمر عن نتائج مشجعة.

يتاح لهم تأشير، وقص، ولصق السؤال الذي ينوون استخدامه.

ما هي (أو ما يعد في) أوجه التشابه بين _____ و _____؟

ما هي (أو ما يعد في) الفروق بين _____ و _____؟

أعط مثالا لـ (شيء ما) يكون _____ لكن غير _____.

تحت أية ظروف يسمح لنا بـ _____.

لماذا يكون من الصعب جدا أن _____ أكثر من _____.

ما هي الصلة بين (موضوع تم تعلمه سابقا) و (مهارة جديدة، أو إجراء، أو مفهوم)؟.

متى ينبغي علي استخدام (مهارة جديدة، إجراء، أو مفهوم) بدلا من (مهارة قديمة، إجراء، أو مفهوم)؟.

إذا (أي ظرف أو عدد في مسألة ما) تم تغييره إلى _____، كيف ستتغير الطريقة التي نستخدمها؟

اختبر التخمين _____ في الحالة القصوى حيث _____.

كيف سأقرر أي من الأشكال التالية هو الأفضل للاعتبار بصد (مسألة، أو تخمين، أو بيانات) _____؟

كيف سأكون على معرفة _____ بدلا من _____ في هذه النقطة (مسألة، أو برهان، أو منظر)؟

كيف سأقرر ماذا سأفعله أولا عند محاولة (حل، أو برهان) _____؟.

أمثلة Examples

كيف سأكون على معرفة بوضع معادلة تربيعية تساوي صفرا بدلا من تجميع كل المتغيرات في أحد جانبي علامة المساواة، وجميع الثوابت في الجانب الآخر (كما فعلت مع المعادلات الخطية)؟

• ماذا يؤخذ به في الفروق بالتقواعد عند جمع الأعداد ذات الإشارة، وعند ضربها؟.

• كيف سأقرر ماذا سأفعل أولا عند محاولة البرهنة بأنه في حالة تساوي أطوال منصفتي أضلاع مثلث، فإن المثلث متساوي الساقين.

تمارين Exercises

1. "ما هو أطول ضلع في هذا المثلث (مشيراً إلى الجهة التي تعني من المثلث ABC)، أيها الصف؟".
 2. "بماذا يختلف حل المعادلة الخطية عن حل معادلة تربيعية، يا كريستا؟".
 3. "هل يصح تقسيم كل من طرفي هذه المعادلة (على السبورة) على العدد 5 (توقف قصير)، يا سو؟".
 4. "ما هو الجذر التربيعي للعدد 196، أيها الصف؟".
 5. "إذا قمنا بتطبيق مبرهنة فيثاغورث على هذا المثلث، سنجد بأن المستقيم AB يساوي ماذا، يا اليس؟".
 6. "لماذا يوجد حل واحد مقبول لهذه المسألة، يا فريد؟".

7. اعد صياغة سؤال تمرين (1) والذي يعد سؤالاً صغياً غير جيد.
 8. وضح لما يبدو بأن المناسب استدعاء الطالب بعد طرح السؤال بدلاً من فعل ذلك قبل طرح السؤال؟.
 9. كيف ستجواب مع إجابات الطلبة التالية لسؤال المطروح؟.
 10. أ. "لم احسن سماع السؤال".
 11. ب. "كنت متعباً يوم أمس".
 12. ج. "لا أدري".
 13. د. صمت.
 14. اختر موضوعاً مختصراً من المنهج الدراسي لرياضيات المدارس الثانوية. ثم اعد سلسلة من الأسئلة التي قد تستخدمها في تطوير هذا الموضوع (خلال "الاكتشاف الموجه") مع صفك الدراسي.

1. شر إلى الجيد من الأسئلة الصغية الآتية وإلى غير الجيد منها مع ذكر السبب:
 أ. ما هي مجموعة الحل للمعادلة $3x-5=8$ ، وكيف يمكنها أن تساعدنا على حل المسألة (توقفت في مرحلة مبكرة مع الصف)، يا ليزا؟.
 ب. "ماذا حول هذه المجموعة من الأعداد (توقف قصير)، يا دانيال؟".
 ج. "لماذا كان المثلث $\triangle ABC$ متساوي الساقين، يا دافيد؟".
 د. "يا يولندا، هل تستطيعين القول بأن هذين المثلثين متطابقان؟".
 هـ. "أيها الطلبة، هل أن هذا المنحنى هو قطع مكافئ؟".
 و. "ما هي طبيعة الموز في هذه المعادلة؟".
 ز. "ما هي خطوتي التالية على طريق حل هذه المسألة؟".
 ح. "ما هو المضاعف المشترك الأكبر لهذين العددين، وكيف تستطيع التأكد من عدم وجود مضاعف مشترك أكبر منه. يا جوشوا؟".
 ط. "كيف نستطيع تغيير المعادلة $\frac{2}{3} + \frac{5x}{7} = 2$ إلى معادلة أخرى بدون كسور، يا هنري؟".
 ي. "في أي ظروف ستكون جذور هذه المعادلة (التأثير على السبورة) خيالية، وكيف يساعدنا هذا الأمر على حل مسائلنا، يا إيفلين؟".
 ك. "من يستطيع إخباري ما هو حل هذه المسألة (مشيراً إلى السبورة)؟".

استراتيجيات لتعليم دروس أكثر تأثيراً

Strategies for Teaching More Effective Lessons

يتوفر لدى المعلمين الجيدين مدى واسع من استراتيجيات التعليم المحددة، وخصوصاً بموضوع الدروس الحبيوة. أن تحديد أفضل الاستراتيجيات المطلوبة لنموك المدرسة تحتل مكانة مهمة بدورك الخلاق في الصف الدراسي .

إن معظم الاستراتيجيات التي ستوضح خلال الصفحات القادمة سوف يتم العمل خلالها مع أمثلة أخرى غير التي تم وضعها، يضاف إلى ذلك، إن التخطيطات والأشكال المذكورة لن تؤول مجموعة كاملة لكل هذه الأمثلة أو الاستراتيجيات، لسبب بسيط يرتكز إلى صيغة عدم إمكانية حصر عدد الاستراتيجيات التي يلجأ لتوظيفها المعلم المبدع داخل الصف.

يتضمنه) لذا لا يمكن اعتباره عدداً أولياً، بينما يظهر بوضوح إن العدد 7 ينطبق عليه هذا التعريف بدقة.

3. العدد الذي لا يقع في دائرة الأعداد الأولية يطلق عليه العدد المركب Composite.

ب. اشر إلى إن العدد 2 يعد اصغر عدد أولي.

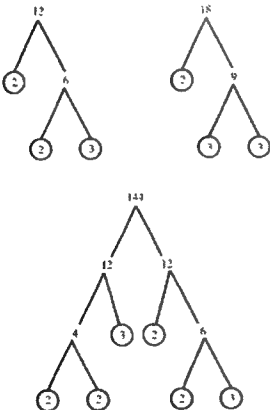
اطلب من طلبة الصف إدراج جميع الأعداد من 2 إلى 50 مع وضع دائرة حول الأعداد الأولية.

الجواب: الأعداد المحاطة بالدوائر ستشمل: 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29، 31، 37، 41، 43، 47.

أما بقية الأعداد فهي أعداد مركبة.

ج. والآن، اذكر للصف بأن من المرفوب فيه، في بعض الأحيان، إيجاد "العوامل الأولية"، فقط، للعدد. على سبيل المثال، عندما تريد احتساب القام المشترك الأصغر Least common denominator لبضعة كسور فإن إحدى الاستراتيجيات المتاحة أمامك لإيجاد العوامل الأولية ستكون باستخدام طريقة "المفرعات" المدرجة في أدناه. وحيثما ظهر أمامك عدد أولي في نهاية الفرع، قم بوضع دائرة حوله.

ينبغي أن نعرض للطلبة، في هذا الوقت، كيفية استخدام طريقة المفرعات لوصف الأعداد 12، 18، و 144 بوصفها حاصل ضرب عواملها الأولية:



استخدام المخططات الشجرية أو المتفرعات

Using Tree Diagrams Or Branching

تمتاز كل المخططات الشجرية، أو المتفرعات بأهميتها البالغة عندما يواجه الطالب جملة من الخيارات والبدائل. حيث توفر هذه الأشكال مناخاً مناسباً لنفاذ البصيرة في لب المنظور الكلي للمسألة قيد الدرس وقد تعرض توجهاً، كما هو الحال في القرارات التي ينبغي أن تؤخذ بنظر الاعتبار في حلول هذه المسائل.

إن هذه الاستراتيجية يمكن أن تنشأ فعلياً بأي فرع من فروع الرياضيات، ومع ذلك، فليس من الضروري أن تصلح لكل موضوع من الموضوعات إن الأشكال التوضيحية المعروضة، في هذا المقام، تعرض موضوعات في الجبر، والاحتمالات، والتباديل، ونظرية المجموعات، والهندسة.

مثال EXAMPLE (1) (الجبر): تحليل العدد الصحيح

إلى عوامل

أ. ابدأ الدرس بتعريف وتوضيح التعاريف الثلاثة الآتية:

1. إن عامل أي عدد من الأعداد يتألف من عددين أو أكثر ويكون حاصل ضربها مساوياً للعدد الأصلي، ونظراً لكون حاصل ضرب الأعداد 2، 3، و 4 هو 24، ينتج إن الأعداد 2، 3، 4 هي عوامل لعدد 24، بمعنى آخر:

$$24 = 2 \times 3 \times 4$$

اطلب من الطلبة كتابة العدد 15 بوصفه حاصل ضرب

عاملين. سيحيون، بدون شك، كما يأتي

$$15 = 3 \times 5$$

وقد يجيب بعضهم كما يأتي:

$$15 = 1 \times 15$$

ولكن عليك الإشارة إن العدد "1" هو حالة خاصة لأننا

نستطيع كتابة أي حاصل ضرب يتألف من صف متكامل من رقم 1 بوصفها عوامل، بيد أن مثل هذا العمل لن يكون ذا معنى.

2 العدد الأولي Prime Number هو ذلك العدد الذي تتألف

عوامله من العدد 1 والعدد نفسه. وعليه فإن العوامل

الوحيدة للعدد 7 هي 1، 7، لذا فإن العدد

$$7 = 1 \times 7$$

ونود الإشارة إلى أنه بالرغم من صحة العلاقة

$$15 = 1 \times 15$$

فإن العدد 15 ليس العامل الوحيد (لوجود أكثر من عامل

لتوضيح التباديل الممكنة لخمس أو ستة أشياء. لاحظ إن الأعداد تصبح كبيرة، لذا اعمد إلى تقديم رمز الضروب Factorial Notation

$$n! = (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times n - 1) \times n$$

استخدام أسلوب طي الورقة أو قصها

Using Paper Folding Or Cutting

إن أسلوب طي الورقة أو قصها هو أحد الاستراتيجيات التي تستخدم، في أحوال كثيرة، في المدارس المتوسطة – والثانوية Middle and Junior High Schools. توظف هذه الطريقة لبيان المفاهيم والنظريات التي تتطلب إلى مستوى عال من النضج والإدراك الرياضي يزيد على ما يتوقع أن يحققه طلبة بالسن نفسه.

ومع ذلك، فإن المعلم البارح سوف يكون متيقظاً لأي موقف في أي مرحلة من مراحل المرسدة، عندما تبرز أهمية قطع الورق أو طيها بوصفها وسيلة ملائمة لـ: إلقاء الضوء، والتوضيح، والتحفيز. إن الأشكال التوضيحية الآتية تعرض هذه النقاط بوضوح.

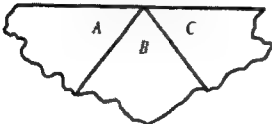
مثال 1 EXAMPLE: (هندسة)

اثبت مستعيناً بوسائل توضيحية النظرية القائلة "مجموع قياسات زوايا المثلث هي 180° ".

1. اقطع ورقة كرتون Cardboard على شكل المثلث ABC.



2. اقطع الزوايا الثلاثة واعد ترتيبهم على خط مستقيم:



وهاهي الإجابات الصحيحة:

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

أو

$$12 = 2^2 \times 3$$

أو

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

أو

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

لأغراض التطبيق والتدريب، اطلب من الطلبة استخدام طريقة المتفرعات لوصف الأعداد الآتية كحاصل ضرب عواملها الأولية:

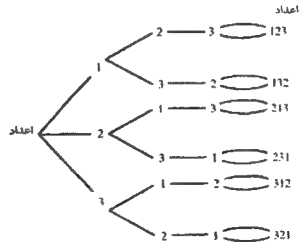
48; 36; 108; 72; 400; 125; 1024; 1215.

مثال EXAMPLE: (2) (الاحتمالات): التباديل

عرف التباديل من مجموعة الأشياء Objects بوصفها نسقا مرتباً من جميع أو بعض الأشياء.

اسأل الطلبة: ما عدد الأعداد ثلاثية المراتب Three digits والتي نستطيع أن نؤلفها بواسطة ثلاثة أرقام تم تأشيرها بالأرقام 1، 2، 3 على التوالي؟

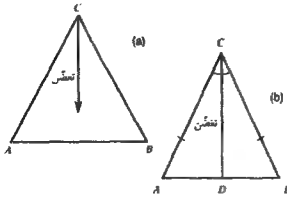
بعد أن يدرج الطلبة إجاباتهم على السبورة، بطريقة عشوائية، اعرض لهم كيفية "تنظيم" انساق الأعداد بواسطة الخطط الشجرية الآتية:



إن المعادلة $3 \times 2 \times 1 = 6$ تقترح قاعدة لإيجاد عدد التباديل دون الحاجة إلى رسم الشجرة.

استخدم شكلاً توضيحياً جديداً لبيان وجود 24 تبديلة $(4 \times 3 \times 2 \times 1)$ أو نسقا لحروف الكلمة five.

لأغراض التدريب، اطلب من الطلبة أعداد نسق شجري



3. ذكر الطلبة بأن مجموع قياسات الزوايا على خط مستقيم هي 180° ، لأن الزاوية المستقيمة Straight Angle تنشأ بواسطة الخط المستقيم. وبذلك يستكمل العرض التوضيحي.

مثال 2 EXAMPLE 2: (هندسة)

برهن النظرية القائلة "إذا تطابق ضلعاً مثلث، فإن الزوايا المقابلة لهذين الضلعين تكون متطابقة" (تعرف أيضاً بـ "زوايا قاعدة المثلث المتساوي الساقين متطابقة").

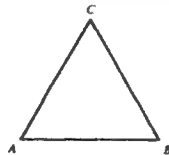
بصورة عامة هذا هو الدرس الأول الذي يطلب فيه من الطلبة كتابة برهان صوري من عبارة لفظية.

ابداً باستعراض صيغة إذا - فإن (If-Then) المستخدمة في القضايا، مع العبارة التي تلي لفظة "فإن" والتي يطلق عليها اصطلاح "الاستنتاج أو الحكم Conclusion".

وعليه، فإن الفرضية Hypothesis السائدة في هذا المثال هي "ضلعاً مثلث متطابقان" وأن الاستنتاج هو "الزوايا المقابلة لهذين الضلعين متطابقة".

ارسم مخططاً ثم ثبت رموزه، ثم ضع قائمة "بالمعطيات"، وأخرى بالطلوب إثباته استناداً إلى الرموز المستخدمة في المخطط (انظر المخطط التوضيحي).

$$\begin{array}{l} \text{المعطيات:} \\ \overline{ABC\Delta} \\ \overline{AC} \equiv \overline{BC} \end{array}$$



$$\angle A \equiv \angle B \quad \text{اثبت أن:}$$

حاول توجيه الطلبة باتجاه الحاجة إلى استخدام مستقيم مساعد في عملية إنشاء البرهان الصوري، وكما يأتي:

1. اقطع مثلثاً متساوي الساقين.
2. امسك الضلعين المتطابقين (معاً) ثم اعمد إلى طيهما مع إبقاء جزء من الثاني Crease إلى أسفل، ومبتدئاً برأس المثلث - (انظر الشكل 5a). (لاحظ أن الثاني هو في الواقع منتصف زاوية رأس المثلث).

3. أبسط الثاني (منصف الزاوية) حتى يصل إلى الضلع المقابل، فينشأ عنه مثلثان (شكل b).
4. برهن إن المثلثين متطابقان بواسطة SAS⁽¹⁾، كما موضح بالشكل (b).
5. إن زاويتي القاعدة متطابقان الآن، وهو المطلوب إثباته.

الصورة تكافئ ألف كلمة

A Picture Is Worth A Thousand Words

في الأمع الأغلب، فإن هذه الاستراتيجية مقبولة بغير استثناء لدى جميع الرياضيين وجميع مستويات الإنجاز والتفكير، لأن الصورة تساهم في توجيه تفكير الطلبة عبر توفير البصيرة صوب حلول المسائل، وكذلك صوب تعميم هذه المسائل.

عرضت هذه الآراء هنا على مستوى بسيط مع أشكال توضيحية تم انتخابها من مجموعة مسائل في: الجبر، والاحتمالات، ومخططات فين Venn Diagrams.

وإن القيمة التي تمتلكها الصورة، أو المخططات في ميدان الهندسة باتت معروفة لدى جميع ولا غبار عليها. وقد أتاح التوسع في عمق منظور الصور من ثنائية إلى ثلاثية الأبعاد فرصة كافية للرياضيين في التجزؤ بالتفكير بدلالة أبعاد ذوات مرتبة عالية.

مثال 1 EXAMPLE 1

ستتم عملية تحسين خواص 3 جالونات من خليط الكحول المائي بتركيز 20% عبر إضافته إلى كمية محددة من المحلول نفسه وتركيزه مقاداره 70%.

كم عدد الجالونات المطلوب إضافتها من محلول الكحول المائي بتركيز 70% لغرض الحصول على المحلول الجديد، والذي سيصبح تركيزه 40%؟

(1) تعني (ضلع - زاوية - ضلع) - الترجمة.

تمت عملية درجة زوج من زهر الطاولة Dice (أحدهما أحمر اللون والآخر أخضر اللون)، فما هي احتمال الحصول على فرق بين الأعداد الظاهرة بحيث تقل عن (1) أو تساوي (1)؟

يظهر الشكل الآتي المجموعة الشاملة لستة وثلاثين احتمالا. إن النقطة التي قيمة إحداثياتها (4، 5) تقابل النتيجة: الزهر الأحمر يظهر الرقم 5، بينما يظهر الزهر الأخضر الرقم 4.

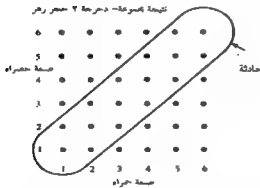
إن النتيجة المفضلة قد تم تحديدها بالواقع المحدد والذي يتألف بمجموعة من 16 حدث.

نظرا لأن جميع النتائج الـ 36 محتملة على حد سواء، فإن كلا منها أعطى احتمالية $(\frac{1}{36})$. وبما إن الحدث يمتلك 16 نتيجة، لذا فإن احتماليته ستكون $(16/36)$ ، أو $(4/9)$.

ولهذه المسألة يمكننا أن نستخدم القاعدة الآتية:

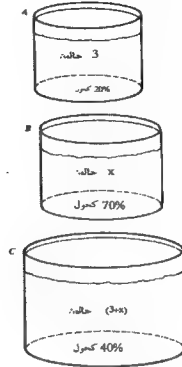
$$\frac{\text{عدد النتائج المفضلة}}{\text{العدد الكلي للنتائج المحتملة}} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

نظرا لأن جميع النتائج محتملة على حد سواء.



مثال 3 EXAMPLE 3: (الجبر) مخططات فين Venn Diagrams

يمكن حل أنواع محددة من المسائل التي تتضمن مجموعات من العناصر تحليلات منطقية، بصورة أفضل، وذلك باستخدام مخططات فين، والتي تتألف ببساطة من مجموعة من الدوائر التراكبية. إن مجموعة التقاطع Intersection Set هي أصغر مجموعة من جميع العناصر المشتركة، أما مجموعة الاتحاد Union Set فتشمل أصغر مجموعة من جميع العناصر المختلفة. وعليه، في ضوء المخطط، نقول إذا كانت A، B مجموعتين، فإن تقاطع $A \cap B$ يمثل مجموعة التقاطع، وأن اتحاد $A \cup B$ يمثل مجموعة الاتحاد:



الحل SOLUTION

إن تصوير الأوعية التي ستحتوي الخليط سيعب دورا حاسما وسيقرب المسألة إلى الأنهان. ابدأ برسم الأوعية الثلاثة، وسيتمكن الآن تحديد كمية مادة الكحول في كل من هذه الأوعية بسهولة ويسر:

$$A: (0.20)(3) \quad B: (0.70)(x) \quad C: (0.40)(3+x)$$

وبالطريقة نفسها، ستكون كمية الماء في كل منها:

$$A: (0.80)(3) \quad B: (0.30)(x) \quad C: (0.60)(3+x)$$

نظرا لأن كمية الكحول الموجودة في الوعاء C تساوي مجموع كميات الكحول في كل من الوعاء A، والوعاء B، فإنه يمكن الحصول على معادلة الكحول التالي، كما يلي:

$$(0.20)(3) + (0.70)(x) = (0.40)(3+x)$$

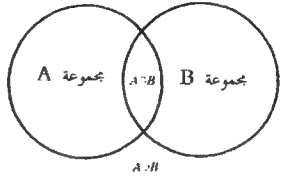
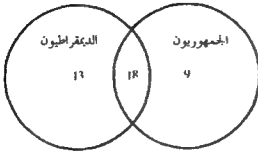
كذلك، بما أن كمية الماء في الوعاء C تساوي مجموع كميات الماء في الوعاءين A، B، يمكننا الحصول على معادلة الماء التالي، كما يأتي:

$$(0.80)(3) + (0.30)(x) = (0.60)(3+x)$$

وسنحصل من كلا المعادلتين على قيمة المتغير $x = 2$.

مثال 2 EXAMPLE 2: (الجبر) التصور Visualization

بالرغم من كون المسألة التالية ليست تمرينا نموذجيا حول الاحتمالات، فإن حلها يتضمن مبدأ تصويريا قابلا للتطبيق في بضعة ميادين بالرياضيات، مثل هندسة الإحداثيات، (التحليلية) والإحصاء، والطوبولوجيا Topology، والنطق، ونظرية الأعداد، فضلا عن الاحتمالات:



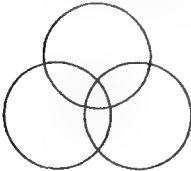
تظهر في أدناه بعض مسائل التطبيق الإضافية:

1. ظهر في اقتراع أعدته مجلة المدرسة، بأن 110 طلاب قد صوتوا بأنهم موالون إلى اللغة الإنجليزية، بينما صوت 150 طالباً بأنهم موالون إلى الرياضيات، وذكر 50 واحداً بأنهم موالون إلى كليهما. إذا كان كل طالب تمت مقابلته قد أدلى بصوته في اقتراع المجلة، فكم عدد الطلبة الذين تمت مقابلتهم؟

2. أظهر المسح الميداني على السيارات بأن 12 مواطناً موال إلى الأنموذج X، وأن 18 موال إلى الأنموذج Y، و 20 موال إلى الأنموذج Z.

كذلك فإن 5 من هؤلاء المواطنين موالون إلى X، Y، و 8 موالون إلى Y، Z، وكذلك هناك 7 موالون إلى X، Z. بينما هناك مواطنون موالون إلى النماذج الثلاثة.

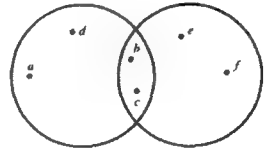
فكم عدد المواطنين الذي شملهم المسح الميداني؟
إشارة: استخدم المخطط التالي:



مثال 4 EXAMPLE: (الجبر) ضرب ثنائية الحدود
Multiplying Binomials
إن الإثبات البصري الذي ينص على أن:
 $(a+b)(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)$
يخالف بصورة صارمة البرهان التقليدي الذي يستخدم الخصائص التوزيعية. وسيظهر الإثبات لاحقاً.

مخطط توضيحي Illustration

لديك مجموعتان $\{a, b, c, d\}$ و $\{e, b, c, f\}$. ارسم مخطط فون لهاتين المجموعتين وبين مجموعتي التقاطع والاتحاد.



مجموعة الاتحاد = $\{a, b, c, d, e, f\}$

مجموعة التقاطع = $\{b, c\}$

والآن تستطيع اطلاع صفوفك المدرسية على كيفية الحل ببساطة نسبية المسائل "الحسابية Counting" مثل ما يأتي.

مسألة PROBLEM

عرض على طالب مبلغ 50 سنتاً يتقاضاها عن معلومات يقدمها عن كل شخص من مجموعة أشخاص، تتضمن ذكر ميولهم إلى سياسات الجمهوريين أو الديمقراطيين، فقدم تقريراً فيه أن 27 شخصاً موال إلى الجمهوريين، و 31 شخصاً موال إلى الديمقراطيين، وأن 18 شخصاً يميل إلى الطرفين. فكم سيتقاضى الطالب من النقود؟

الحل SOLUTION

أظهر مخطط فون وجود 40 عنصراً فقط $(13+18+9=40)$ في مجموعة الاتحاد، فيستحق الطالب \$20.00 دولاراً.

ومعتدا على العمود الذي يقع فيه.

وباتباع هذا النمط سيمنتج الطلبة ما يأتي:

$$2^0 = 1 \quad 3^0 = 1 \quad 4^0 = 1$$

إن الاستقرار بالعمل على هذا النمط، سيجتج للطلبة فرصة

توسيع الجدول إلى الحد الذي يجعله يبدو كما يأتي:

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \quad 3^{-1} = \frac{1}{3} \quad 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} \quad 3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} \quad 4^{-2} = ?$$

$$2^{-3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \quad 3^{-3} = ? \quad 4^{-3} = ?$$

$$2^{-4} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} \quad 3^{-4} = ? \quad 4^{-4} = ?$$

يستطيع الطلبة، الآن، إنشاء القواعد التالية وتعميمها:

$$\text{إذا كان } x \neq 0 \text{ فإن } x^0 = 1 \text{ و } x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

مثال 2 EXAMPLE: (الهندسة)

مجموع زوايا الشكل متعدد الأضلاع

Angles of A Polygon

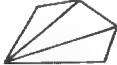
دع طلبة الصف يتأملون السؤال "ما هو مجموع قياسات الزوايا في الشكل متعدد الأضلاع مهما كان عدد أضلاعه؟"

باعتماد مبدأ تقسيم متعدد الأضلاع إلى مثلثات، تستطيع أن تنشئ نمطا قد يرشد طلبة الصف إلى الإجابة المطلوبة.

4 أضلاع



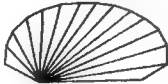
5 أضلاع



6 أضلاع



16 أضلاع



ينبغي أن يكون طلبة الصف على إدراك تام بأن قياس الزاوية المستقيمة يساوي 180° .

• مجموع زوايا متعدد الأضلاع بأضلاع أربعة يكافئ 2 زاوية مستقيمة = 360° .

• مجموع زوايا متعدد الأضلاع بأضلاع خمسة يكافئ 3 زاوية مستقيمة = 540° درجة.

نظرا لأن مساحة المربع هي حاصل ضرب $(a+b) \cdot (a+b)$ وأن مجموع مساحات المقاطع الأربعة، $a^2 + ab + ab + b^2$ ، سنحصل على ما يأتي: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

	a	$+$	b
a	a^2		ab
$+$			
b	ab		b^2

تعميم الأنماط Recognizing Pattern

بعد تمييز الأنماط واستبقاؤها أحد القوى القاعلة في السلوك الإنساني، لأنه يؤسس الثبات والسر على وتيرة واحدة في عمل الأشياء، وهو أمر يحتاجه البشر، وبالأخص الناشئون. وبالنسبة للرياضي، فإن تمييز الأنماط يوفر مفتاحا سحريا يفتح المغاليق أمام بسط امتدادات الأفكار إلى حقول وميادين جديدة. إن الأشكال والتخطيطات المعروضة، في هذا المقام، تبدو بسيطة أو قد تصل لحد تافه، وعلى الرغم من ذلك فإن هدفها الحقيقي يتوجه صوب دعم آلية نشوء الأفكار عوضا عن المعلم، لغرض إتاحة الفرصة أمامه في التفكير والتخطيط بموازاة الخطوط العامة المقترحة.

مثال 1 EXAMPLE: (الجبر)

الأسس الصفرية والسالبة

Zero and Negative Exponents

دع الطلبة يتأملون الأنماط السائدة في هذا الجدول، وقم بإبدال كل علامة "؟" بالعدد المناسب.

$$2^5 = 32 \quad 3^5 = 243 \quad 4^5 = 1024$$

$$2^4 = 16 \quad 3^4 = 81 \quad 4^4 = ?$$

$$2^3 = 8 \quad 3^3 = ? \quad 4^3 = ?$$

$$2^2 = 4 \quad 3^2 = ? \quad 4^2 = ?$$

$$2^1 = 2 \quad 3^1 = ? \quad 4^1 = ?$$

ينبغي أن نبسط هذا الجدول قليلا. وعندما سيجاول الطلبة توسيعه بالاتجاه السفلي لكي يتضمن علامة الاستفهام Question Mark، سيدركون بأن كل عدد هو عبارة عن نصف، ثلث، ربع العدد، ... الخ الذي يقع في أعلاه،

الناتج = عامل 2 × عامل 1

$$-9 = -3 \times 3$$

$$-6 = -3 \times 2$$

$$-3 = -3 \times 1$$

$$0 = -3 \times 0$$

$$? = -3 \times -1$$

$$? = -3 \times -2$$

$$? = -3 \times -3$$

وعليه ستكون القاعدة المقترحة:

عدد سالب × عدد سالب = عدد موجب

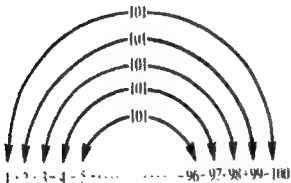
مثال 4: EXAMPLE (الجبن)

Sum of An Arithmetic Progression

عندما كان العالم الرياضي كارل فريدريش كاوس صبياً ناشئاً، بدت ميوله الرياضية تظهر بوضوح لا لبس فيه، وبالأخص في حل مسألة الصف التي تحولت فيما بعد إلى حكاية كلاسيكية حول محاليل الذكاء. فعندما طلب المعلم من الطلبة إيجاد مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100، كافح الطلبة بالكتابة على ألواحهم المتواضعة لكي يظفروا بحل المسألة. أما رفيقهم كارل فقد لفت انتباهه وجود نمط واضح يمكن استثماره في حل المسألة بسهولة كبيرة، وبوقت قصير.

لاحظ كارل بأنه إذا لجأ إلى عمل أزواج من الحدود الخاصة بالأرقام من 1 إلى 100 كما في الشكل التالي، ثم قام بإضافتها، فسيحصل على 50 زوجاً مجموع كل منها 101. وعليه سيكون المجموع الكلي، ببساطة:

$$50 \times 101 = 5050$$



• مجموع زوايا متعدد الأضلاع بأضلاع ستة يكافئ: "°"
زاوية مستقيمة = "°" درجة.

لإيجاد مجموع زوايا متعدد الأضلاع بـ 16 ضلعاً، ملاحظ وجود 14 مثلثاً، وعليه فإن مجموع زواياه هو "°" زاوية مستقيمة.

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على استنتاج أن متعدد الأضلاع الذي يبلغ عدد أضلاعه n، يمكن تقسيمه إلى (n - 2) مثلث، وعليه فإن مجموع قياسات زواياه يكافئ (n - 2) زاوية مستقيمة، أو $180 \times (n - 2)$ درجة.

مثال 3: EXAMPLE (الجبن)

Product of Two Signed Numbers

في حقل الرياضيات، تسهم الرغبة في الإبقاء على الأنماط ببث حافظ دائم باتجاه توسيع وابتكار أساليب رياضية جديدة، وكما سيظهر بوضوح في سعينا بالحصول على قواعد عامة تتناول موضوع ضرب الأرقام الإشارية.

قبل البدء بهذا الموضوع، ينبغي أن يكون الطلبة قد ألفوا التعامل مع خط العدد Number line، كذلك ينبغي أن يكونوا مدركين بأن الأعداد الموجبة يمكن كتابتها بإشارة موجبة أو بدونها. دع الطلبة يدرسون النمط السائد في الجدول الآتي مع إبدال كل علامة استفهام "°" بالعدد المناسب.

الناتج = عامل 2 × عامل 1

$$9 = 3 \times 3$$

$$6 = 3 \times 2$$

$$3 = 3 \times 1$$

$$0 = 3 \times 0$$

$$? = 3 \times -1$$

$$? = 3 \times -2$$

$$? = 3 \times -3$$

عند مباشرة تحليل النمط مع طلبة الصف، قد يكون من المفيد توسيع الجدول قليلاً نزولاً إلى اسفل.

إن النمط سوف يقترح علينا قبول القضية الآتية بوصفها قاعدة رياضية:

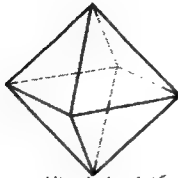
عدد موجب × عدد سالب = عدد سالب

وستقترح علينا خاصية التبديل Commutative Property بعد ذلك ما يلي:

عدد سالب × عدد موجب = عدد سالب

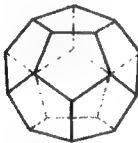
وبالطريقة نفسها تماماً، فإن الأسلوب في تمييز الأنماط سيوفر عن قاعدة عامة لضرب عددين سالبين.

والآن حاول تعميم التقنية التي وظفها كاوس لإيجاد صيغة تصلح لجمع "n" من حدود متوالية حسابية.

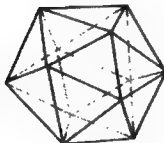


شكل ثنائي السطوح للثلاثية
(ثمانية مثلثات متساوية)

استثمر الأشكال المبينة أعلاه كي تساعدك على تصور الأنماط السائدة بين هذه الكميات لكل من المجسمات متعددة السطوح - المنتظمة، الخمسة، وتحقق من صحة الصيغة $V - E + F = Z$ لكل حالة من الحالات:



دو الاثني عشرو وجهاً
(12 شكل مجسم منتظم)



دو العشرين وجهاً منتظم
(20 مثلثاً متساويًا)

V	E	F	الاسم
		4	رباعي السطوح
		6	المكعب
		8	المجسم الثماني
		12	دو الاثني عشر وجهاً
		20	دو العشرين وجهاً

افترض a الحد الأول من المتوالية، وأن d هو الفرق المشترك بين الحدود (أساس المتوالية). وعليه، فإن مجموع (n) من حدود المتوالية الحسابية سيكون:

$$a + [a+d] + [a+2d] + [a+3d] + \dots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$$

بإضافة الحد الأول والحد الأخير من المتوالية، ينتج:

$$a + [a+(n-1)d] = 2a + (n-1)d$$

وبإضافة الحد الثاني والحد - ما قبل الأخير - $(1 - n)$

ينتج:

$$[a+d] + [a+(n-2)d] = 2a + (n-1)d$$

وبإضافة الحد الثالث والحد $(2 - n)$ من المتوالية:

$$[a+2d] + [a+(n-3)d] = 2a + (n-1)d$$

استمر بهذه العملية حتى تستكمل إضافة جميع أزواج

المتوالية. إذا كان هناك $\frac{n}{2}$ من هذه الأزواج، فإن مجموع الحدود سيساوي:

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

وهي الصيغة المطلوبة.

اسأل طلبتك كيف تسهم هذه الطريقة في حساب الوسيط بمتوالية تتألف من عدد فردي من الحدود.

مثال 5 EXAMPLE: (الهندسة)

المجسم متعدد السطوح Polyhedra.

اكتشف الرياضي ليونهارد إيولر Leonhard Euler (1707 - 1783) علاقة طريقة بين رؤوس المجسم ذي السطوح المتعددة، ووجوهه، وحافته. وقال إذا اخترت مجسماً متعدد السطوح منتظماً أو غير منتظم، وافترضت:

$$V = \text{عدد الرؤوس.}$$

$$E = \text{عدد الحافات.}$$

$$F = \text{عدد الوجوه.}$$

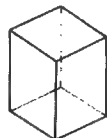
فستجد أن في كل مجسم من هذا النوع، تكون العلاقة:

$$\text{ثابت} = V - E + F$$

(خمسة مجسمات منتظمة متعددة السطوح)



شكل رباعي السطوح للثلاثية



شكل سداسي السطوح الرباعي أو مكعب

استخدام النماذج الرياضية والتشكيلية

Using Mathematical Models And Manipulatives

يستمر الرياضيون والفنانون بمحاولاتهم لإنتاج نماذج فيزيائية تحاكي النماذج التجريدية Abstract Models التي تنشأ في العقل الإنساني. وتتوفر فرص كافية أمام الطلبة والمعلمين بمحاولة إنشاء نماذج يمكن تصنيحها منزلياً، مثل المجسم الخماسي بسطوحه المنتظمة، وفن الخيوط، وعجلات الروليت، والمعار (جهاز المسح والكشف)، وأي شئ آخر يستطيع الخيال البشري أن يستحضره إلى ساحته. وكذلك المواد التي تستخدم بكثرة مثل: المساطر، والفجار، والمنقلة، والتي تعد شواهداً على النماذج الرياضية.

مثال 1 EXAMPLE: (الاحتمالات، الجبر)

النماذج الاحتمالية Probability Models

من بين النماذج الأكثر شيوعاً، والمستخدمة في إيضاح مبادئ الاحتمالية هي: زهر الطاولة، والقرص الدوار Spinner، وأوراق اللعب، و الجرة الملونة بكرات مختلفة الألوان التي يمكن الحصول عليها بسهولة لأغراض استخدامها كوسيلة إيضاح صغية.

بالرغم من أن مفهوم "احتمالية أن واقعة ما سوف تحدث" يبدو أنه أمر حدسي Intuitive بين عدد من الطلبة الأحداث، بيد أن هذا المفهوم لا يمتلك بعداً كلياً شاملاً، ما لم تتم صياغته صورياً منذ البداية.

إن نسبة الاحتمال P لحدوث واقعة ما، هي:

$$P = \frac{\text{عدد طرق وقوع الحدث}}{\text{عدد الطرق الكلية}} = \text{نسبة الاحتمال}$$

يستطيع المعلم استخدام النماذج المذكورة سابقاً في توضيح التعريف والتوسع في بيان أسسه البرهنة والتطبيقية.

إن زهر الطاولة، مألوف لدى الجميع، وهو عبارة عن جسم مكعب بستة أوجه، ويطلق عليه المكعب Cube. إن كل وجه من أوجه المكعب هو عبارة عن مربع، وقد تم ترقيم الأوجه الستة برمز النقطة Dot، فأوضحت تحمل الأرقام 1,2,3,4,5,6 كما في الشكل الآتي:

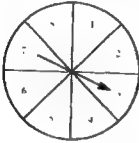


جد احتمالية الحصول على الرقم 5 عند رمي زهر الطاولة.

$$\text{الجواب ANSWER: } p(5) = \frac{1}{6}$$

إن القرص الدوار Spinner هو عبارة عن أنموذج يحاكي قرص لعبة الروليت، ويحتوي هذا القرص - على سبيل المثال - على ثمانية مناطق Regions، متساوية المساحة، ومرفقة بالأرقام من 1 إلى 8.

يتمتع السهم بنفس الفرصة في الوقوف فوق أي منطقة من المناطق الثمان للقرص الدوار. فإذا افترضنا عدم وقوف السهم فوق الحد الفاصل بين المناطق الثمان، فكم هو مقدار احتمالية وقوفه فوق المنطقة رقم 3؟.



$$\text{الجواب ANSWER: } p(3) = \frac{1}{8}$$

تحتوي مجموعة بطاقات اللعب القياسية على 52 بطاقة. تنقسم أوراق اللعب إلى أربع مجاميع: المسحة Spade، والمعين Diamonds، والقلوب Hearts، والمضرب Clubs. تحوي المجموعة الواحدة على 13 بطاقة: 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، والولد Jack، والملكة Queen، والمالك King، والواحد Ace.

إن ألوان بطاقات المسحة سوداء، وألوان بطاقات المعين حمراء. عند سحب بطاقة، بصورة عشوائية، وضح لماذا ستكون احتمالية سحب (أ). اثنين من علامة المعين، (ب) أية اثنين، أو (ج) - أية بطاقة علامتها المعين.

الجواب ANSWER:

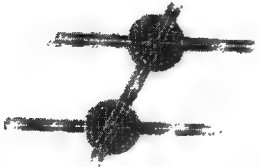
$$1. \quad P(\text{اثنين من المعين}) = 1/52$$

$$ب. \quad P(\text{اثنان}) = 4/52 = 1/13$$

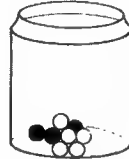
$$ج. \quad P(\text{معين}) = 13/52 = 1/4$$



- أقطار متوازي الأضلاع ينصف بعضها الآخر.
- الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.
- الزوايا المتتالية في متوازي الأضلاع متكاملة.



تحتوي جرة 8 كريات زجاجية، 3 كريات منها لونها احمر، و 5 كريات باللون الأبيض. تم اختيار كرية زجاجية واحدة، بطريقة عشوائية، من داخل الجرة، فما هو مقدار احتمالية أن تكون هذه الكرية حمراء اللون؟

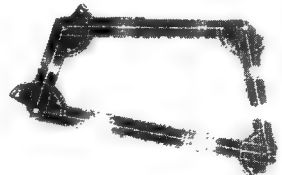


الجواب **ANSWER**: $\frac{3}{8}$ = (الأحمر) P

لاحظ إمكانية تطوير هذه المسائل، وإدخال تغييرات، أو إضافات على مضامينها بحيث يمكن استخدامها مع الصفوف وبمراحل دراسية متعددة بدءاً بالطلبة الصغار، إلى طلبة المراحل المتقدمة بالمدارس الثانوية، ومن دروس الرياضيات المتقدمة لغاية الدروس المتقدمة في الرياضيات. لا ريب بأنه سيكون لكل مرحلة من المراحل الدراسية نوع من التعقيد والمعالجة المتخصصة في ضوء متطلبات منهج التدريس السائد في صفوفها.

مثال 2 EXAMPLE: (الهندسة) الربط Linkage

تتوفر في السوق نماذج متعددة مصنوعة من معادن ذوات نوعية جيدة، أو من مادة البلاستيك الشفاف، يمكن



للمعلم أن يستخدمها مع جهاز الإسقاط العلوي الضوئي، أو بدونه. لتوضيح النظريات الآتية:

- الزوايا الداخلية – المتبادلة لخطين متوازيين يقطعهما خط مستعرض، تكون متطابقة.
- الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية ومتطابقة فيما بينها.

يطلق على الشكل الرباعي Quadrilateral اصطلاح "الشكل الرباعي المرن Flexible"، ويوفر للمعلم أنموذجاً، واضحاً، وسهلاً، حيث يستطيع المعلم أن يمسك به أمام طلبته، فيحرك أضلاعه مغيراً قياسات زواياه حسب متطلبات مادة الدرس.

يستطيع الطلبة اقتراح قائمة من خصائص متوازي الأضلاع في ضوء التشكيلات على الأنموذج.

يبدو واضحاً من التشكيلات على أنموذج متوازي الأضلاع بأن قطريه ينصف بعضها الآخر، وليس من الضروري تطابقهما. تسهم لوحة الرسوم التخطيطية – الهندسية Geometric Sketch pad بدور تعليمي يشابه أنموذج متوازي الأضلاع المرن.

مثال 3 Example: (الهندسة)

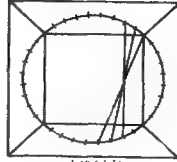
تصاميم الخيط String Designs

يقترح مقطع الخط المستقيم الذي يظهر في الأشكال الآتية مجموعة من المنحنيات التي تعرف بـ "الأطواق أو الأغلفة Envelopes". إن الغلاف هو المنحني الذي يمس كل مستقيم من مجموعة الخطوط المستقيمة.

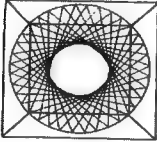
يمكن استخدام خطوط بألوان متباينة، لأعداد الخطوط المستقيمة، وسنشأ عن هذه الخطوط تشكيلة مختلفة من أنماط الأغلفة بألوان جميلة وزاهية. وستسهم هذه الأشكال البراقة في تحفيز الطلبة وبفهم باتجاه الاهتمام في دراسة مادة الهندسة، وعلى وجه الخصوص، مستويات الناشئة في المدارس الثانوية، الصفوف 7 و 8.

يمكن اقتراح مشروع درس يتضمن وحدة تعليمية في التصميم الهندسي في صفوف الرياضيات. إن المفاهيم والعبارة الآتية هي جزء من الفقرات التي سيتم إيضاحها ومناقشتها، وتشمل: دائرة ومماس، وشكلا خماسيا Pentagon، وشكلا سداسيا Hexagon، وشكلا معينيا Rhombus، ومنحنى القطع المكافئ Parabola (انظر الأشكال والمخططات الآتية).

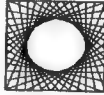
دائرة في مربع



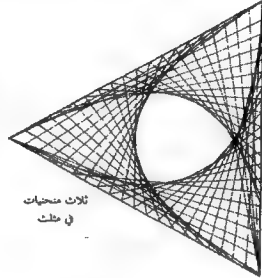
المخططة الأولى



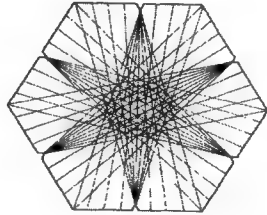
خطوة ٢



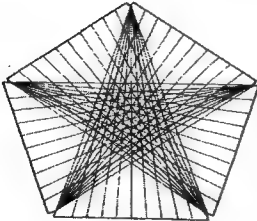
خطوة ٣

ثلاث منحنيات
في مثلث

قطع مكافئ



نجمة في شكل سداسي



نجمة في شكل خماسي

ضع الدائرة بحيث يكون $\overline{AB} \parallel n$ ويقع \overline{AC} على K ، كما في الشكل السابق.

$$m\angle A = \frac{1}{2}m\widehat{BEC}$$

$$m\angle A = m\angle p$$

إذن:

$$m\angle p = \frac{1}{2}m\widehat{BEC} = \frac{1}{2}(m\widehat{BE} + m\widehat{EC})$$

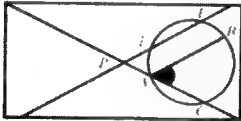
لكن:

$$m\widehat{BE} = m\widehat{AF}$$

إذن:

$$m\angle p = \frac{1}{2}(m\widehat{AF} + m\widehat{EC})$$

2. إن قياس الزاوية الناتجة عن القاطنين Secants خارج الدائرة، يساوي نصف الفرق بين الأقواس المحصورة.



ضع الدائرة بحيث يكون $\overline{AB} \parallel n$ ويقع \overline{AC} على k ، كما في الشكل السابق.

$$m\angle A = \frac{1}{2}m\widehat{BC}$$

$$m\angle A = m\angle p$$

إذن:

$$m\angle p = \frac{1}{2}m\widehat{BC} = \frac{1}{2}(m\widehat{FBC} - m\widehat{FB}).$$

لكن:

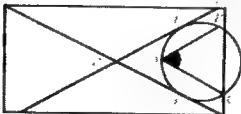
$$m\widehat{FB} = m\widehat{AE}$$

إذن:

$$m\angle p = \frac{1}{2}(m\widehat{FBC} - m\widehat{AE})$$

يمكن إعداد مناقشة مشابهة للأمثلة الآتية:

3. زاوية نشأت عن مماسين:



يحتوي الكتاب التالي على تشكيلة متنوعة من التعليمات الخاصة بأعداد مخططات الخيوط، وبإعداد رسومية ثنائية وثلاثية.

How To Enrich Geometry Using String Diagram, by: Victoria Pohl (NCTM, 1986).

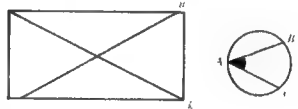
بوصفها جزءاً من متطلبات أي مشروع، قد تميل إلى مشاركة مدرس حاسوب أو فنون جميلة لد يد العون في المجالين الفني والتقني. فضلاً عن ذلك قد تظهر الحاجة إلى مدرس للغة الانجليزية لتوجيه الطلبة على قراءة التعليمات، بنفاصلها الدقيقة، واتباعها بدقة لتنفيذ التصميم المطلوب.

مثال 4 Example: (الهندسة) جد العلاقة بين قياس

الزاوية والقوس الذي تقطعه في دائرة ما.

افترض بأن الطلبة قد تعلموا مسبقاً، بأن قياس الزاوية الماسة لدائرة Inscribed Angle يكافئ نصف قياس قوس تقاطعها مع الدائرة.

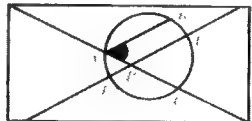
ابدأ باقتطاع قطعة مناسبة للقطعة مستطيل من مادة الكرتون ودائرة من المادة نفسها. اغرز قطعتين من الخيط على المستطيل بحيث ينشأ عنها زاوية مناسبة قرب المنتصف، ثم ارسم زاوية بنفس القياس (مثل قياس الزاوية الناتجة عن قطعتي الخيط) كزاوية تماس للدائرة.



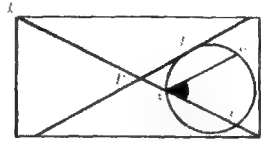
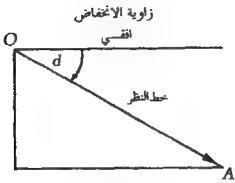
إن نقل الدائرة إلى مواضع مختلفة بالنسبة للمستطيل، ستوضح بالتفصيل جميع النظريات ذات الصلة بالدائرة وأنواع مختلفة من الزوايا، (وستسهل كذلك في البرهنة عليها).

1. إن قياس الزاوية الناشئة عن تقاطع وترين في دائرة

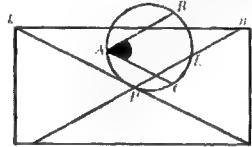
يكافئ نصف مجموع الأقواس المحصورة Intercepted Arcs.



4. زاوية نشأت عن معاس وقاطع:



5. زاوية نشأت عن قاطع ووتر:



تمتاز هذه التمارين بتقاربها في طريقة المعالجة، كما وتتيح إمكانية البرهنة على جميع هذه النظريات، بسرعة خلال الدرس نفسه. وترتكز أهمية هذه الممارسة الرياضية على أهمية ترك فرصة مناسبة للطلبة لكي يستيقوا موضع الدائرة اللاحق، وموضوع المناقشة الذي يتساقط منطقياً معه.

مثال 5 Example: (حساب المثلثات)

زوايا الارتفاع والانخفاض

Angles of Elevation and Depression

قبل البدء بهذا الدرس، ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة مسبقة بالتعريف الاصطلاحي لزاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض.

تعريف: إذا رصد الكائن A من النقطة O، فإن زاوية الارتفاع أو الانخفاض هي الزاوية التي تصنعها قطعة المستقيم OA (من عين الناظر إلى الكائن) مع المستقيم الأفقي في المستوى نفسه.

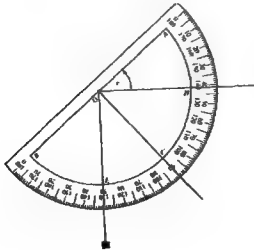
وإذا كان الكائن واقفاً بموقع أكثر ارتفاعاً من الراصد، فإن الزاوية هي زاوية ارتفاع، أما إذا كان منخفضاً عنه، فالزاوية هي زاوية انخفاض، كما في الشكل.

إن المعيار Transit هو عبارة عن أداة يستخدمها كثير من المهندسين في قياس زوايا الارتفاع والانخفاض، ويمكن اعتماد استخدامها في دروس مادة المثلثات، بيد أنها غالية الثمن لحد ما.

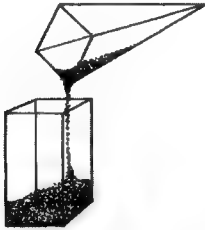
يستطيع الطلبة تعلم طريقة أكثر سهولة لإنشاء أداة مشابهة لقياس أي من هذه الزوايا بواسطة منقلة الطالب التقليدية Protractor، مع قطعة من الخيط، وقطعة طاشير لتسليط وزن على نهاية الخيط.

حاول توجيه الطلبة إلى برهنة أن زاوية الارتفاع e لشيء ما يمكن قياسها كما يأتي:

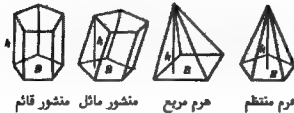
قم بتثبيت المنقلة في وضع رأسي كما في الشكل الموضح أدناه بحيث يكون امتداد قطعة المستقيم BO، والنظر من خلالها كـ "ممدد" Sight.



سيفتقع الطلبة بأن الخبرة التطبيقية، بالإضافة إلى بعض النماذج الفيزيائية سوف تقودنا إلى استنتاج عقلائي بأن حجم الجسم مستطيل الشكل يساوي حاصل ضرب أبعاده الثلاثة (الطول \times العرض \times الارتفاع) $[V=lwh]$ ، أو إن الحجم يساوي حاصل ضرب مساحة قاعدته في ارتفاعه $[V=Bh]$. ويمكن توضيح علاقة جميعه أخرى من خلال استعراض الأجسام في الشكل الآتي. حيث يمتلك كل من الهرم والمنشور مستطيل الشكل نفس مساحة القاعدة والارتفاع. فإذا علمه الهرم بمسائل ما، ثم قمنا بتقريب هذا السائل في منشور مستطيل الشكل، فإن محتوى الهرم سيتوسع تلك حجم المنشور مستطيل الشكل فقط!.



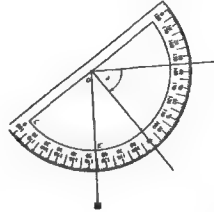
وبعد إجراء مجموعة من التجارب نجد هنا كذلك ان حجم متوازي المستطيلات يساوي حاصل ضرب مساحة قاعدته مع ارتفاعه $(V=Bh)$. وكذلك الأمر بالنسبة لحجم الهرم الذي يساوي ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته مع ارتفاعه $(V=1/3Bh)$. إن الصيغة السابقة صالحة للاستخدام في احتساب حجوم المنشور حتى لو كانت مائلة Oblique.



هرم منتظم هرم مربع منشور مائل منشور قائم

وبالحقيقة، فإن هذه الصياغات تنطبق على حجوم الأجسام، حتى عندما تكون قاعدتها ليست متعددة الأضلاع بل عبارة عن منحنى، كالدائرة مثلا.

امسك بثقل الفادن Bob Plumb (الفادن عبارة عن أداة مؤلفة من خيط في طرفه قطعة رصاص يسير بها غور المياه، أو تمتحن بواسطته استقامة الأشياء) بواسطة مسمار صغير Nailor مثبت في النقطة O، ويقطع القوس BC في النقطة E. تقاس زاوية الارتفاع بقوس EC على المنقلة، وينفس الطريقة يستخدم القوس C'E' لقياس زاوية الانخفاض d. قم بأعداد برهان لزاوية الانخفاض أيضا.



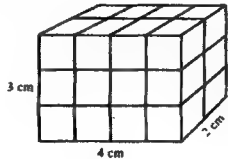
في كل من البرهانين السابقين، ينبغي استخدام نظرية "الزوايا المتمة Complement Angles لزاوية ما تكون متطابقة". ولم نلاحظ بأن الطلبة قد عانوا من صعوبة في متابعة هذه البراهين واستيعابها.

مثال 6 EXAMPLE

Intuitive Geometry (الهندسة الحدسية)

Volumes الحجوم

حاول تذكير الطلبة بأن المساحة السطحية تقاس بوحداث مربعة. أما الحجوم فتقاس بوحداث مكعبة، مثل المستمتر المكعب والانتش المكعب. وعليه إذا كانت أبعاد هذا الصندوق (المنشور مستطيل الشكل) هي $2 \times 3 \times 4$ سم على التوالي، فإن هذا الصندوق سيحوي على 24 مستمرا مكعبا، كما يوضح الشكل الآتي:

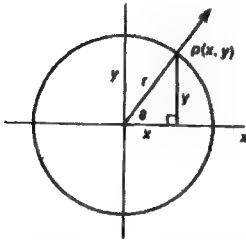


$$(\sin \theta) \frac{y}{r} = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \theta \text{ جا}$$

$$(\cos \theta) \frac{x}{r} = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} = \theta \text{ جتا}$$

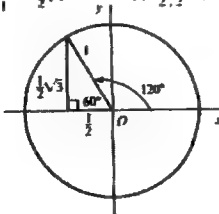
$$(\tan \theta) \frac{y}{x} = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} = \theta \text{ ظا}$$

لاحظ أن r تستخدم دائماً بوصفها قيمة موجبة.

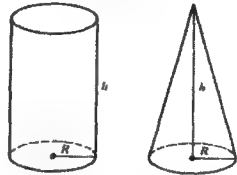


ارتكزت هذه التعاريف على تعاريف الزاوية الحادة في الربع الأيمن. وإذا حولنا تدوير شعاع الزاوية على محور السينات بحيث تصبح الزاوية θ حادة، منفرجة، مستقيمة، أو سالبة واتفق على تطبيق التعاريف ذاتها على الزوايا الجديدة، آنفة الذكر، فسوف نصل إلى نتائج "فذة". بعد الانتهاء من دراسة الأشكال والمخططات الآتية، سيلاحظ الطلبة، بسهولة، ما يأتي:

$$\sin 120 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \theta = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$$



وعليه، فضلاً عن المنشور، تستطيع أن نمالج موضوع الاسطوانة الدائرية، والمخروط Cone.



حيث نلاحظ انطباق الصيغ ذاتها في حسابات حجم هذه الأشكال، وبعد أن تقوم بإجراء تعديلات طفيفة على حسابات مساحة القاعدة الدائرية والتي ستساوي:

$$B = \pi r^2$$

اذن ستكون صيغة حجم الاسطوانة الدائرية:

$$V = \pi r^2 h$$

أما حجم المخروط فسيساوي:

$$V = 1/3 \pi r^2 h$$

(انظر الشكل رجاء)

توسيع مفاهيم مألوفة

Extending Familiar Concepts

مثال 1 EXAMPLE: (حساب المثلثات) دوال الزاوية المنفرجة Obtuse Angle:

قبل البدء بالدروس ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالدوال المثلثية الأساسية الثلاث للزاوية الحادة في المثلث قائم الزاوية Right Triangle، حيث سيمالج الدرس موضوع توسيع هذه الدوال بحيث تصبح صالحة للاستخدام مع الزاوية المنفرجة. كذلك ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة جيدة بخصائص المثلثات (30 - 60 - 90) و (45 - 45 - 90).

تأمل زاوية في موقع معياري "Standard Position"، حيث يكون الشعاع الأولي منطبقاً على المحور السيني، ورأس القمة في نقطة الأصل Origin.

افترض بأن تقاطع نهاية الشعاع والدائرة التي نصف قطرها r ويقع مركزها في نقطة الأصل، سيكون في النقطة (x, y) (انظر التخطيط الآتي).

باستخدام التعاريف التقليدية لدوال الزاوية الحادة نحصل

على:

باستخدام مبرهنة فيثاغورث في المثلث $\Pi\Delta$ ، نحصل

$$a^2 = h^2 + (c-s)^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2cs + s^2$$

فإن

$$a^2 = (h^2 + s^2) + c^2 - 2cs \dots (1)$$

بالمقابل، إذا استخدمنا مبرهنة فيثاغورث، ثانية، في

المثلث $I\Delta$ ، نحصل على:

$$h^2 + s^2 = b^2 \dots (2)$$

وكذلك

$$\frac{s}{b} = \cos A$$

أو

$$s = b \cos A \dots \dots (3)$$

بتمويض المادتين (2 و 3) في المعادلة (1)، نحصل على:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

وهذا هو قانون جيب التمام للمثلث حاد الزاوية.

استمر بتوسيع هذا التمرين عبر رسم، مثلث منفرج

الزاوية، وزاوية منفرجة C.

مثال 3 EXAMPLE 3: (الجبر)

التوزيعية Distributivity:

سيستغل الطلبة، في هذا الدرس، معرفتهم السابقة بالحساب لاستنتاج أن عمليتي الضرب والقسمة تتوزع على عمليتي الجمع والطرح، وأن الأسس والجذور تتقدم على عمليتي الضرب والقسمة. كما سيحجز الطلبة هذه الاستنتاجات بعد أن يكمل المعلم استعراض ترتيب العمليات، ورموز المجاميع، تلويها التوضيحات الحسابية الآتية:

$$(I) \quad 3(4+5) = 3.4 + 3.5?$$

الجواب **ANSWER**: نعم (عملية الضرب يمكن أن تتوزع على عملية الجمع).

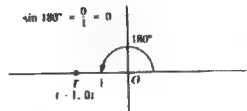
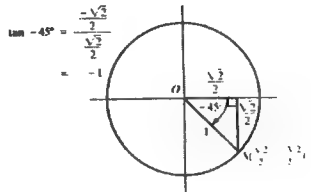
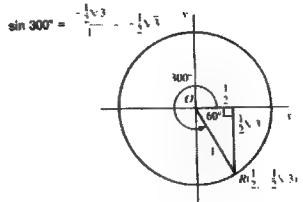
$$5(3-2) \quad ? \quad 5.3 - 5.2$$

الجواب **ANSWER**: نعم (عملية الضرب تتقدم عملية الطرح).

$$(II) \quad \frac{36-4}{4} \quad ? \quad \frac{36}{4} - \frac{4}{4}$$

الجواب **ANSWER**: نعم (عملية القسمة يمكن أن تتوزع على عملية الطرح).

$$\frac{40+15}{5} = \frac{40}{5} + \frac{15}{5}?$$



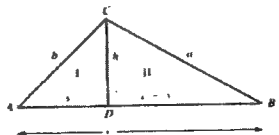
ينبغي إعطاء المزيد من التمرينات للطلبة وترسيخ هذه المبادئ والمفاهيم في أذهانهم.

مثال 2 EXAMPLE 2: (المثلثات، الهندسة)

قانون جيب التمام Law of Cosine:

إن إحدى الطرق التقليدية والبسيطة في تقديم قانون جيب التمام تكمن في معالجتها امتدادا مباشرا لمبرهنة فيثاغورث المشهورة.

تأمل المثلث حاد الزاوية ΔABC ، والذي ارتفاعه CD :



مثال 4 EXAMPLE : (الجبر) تقسيم متعددات الحدود :Dividing Polynomials

لتقسيم متعدد الحدود على آخر، ينبغي أن نسترجع في أنهاننا، أولاً، كيفية قسمة عددين في الحساب.

عندما نقسم العدد 806 على 26، فإننا نحاول، بالحقيقة الكشف عن عدد تكرر وجود العدد 26 في العدد 806 باستخدام آلية الطرح المتكرر. وعند استخدام النهج نفسه وآلية الاستنتاج نفسها، نجد بأننا عندما نقسم المعادلة x^2+5x+6 بالمعادلة $(x+3)$ فإن اعتماد مبدأ آلية الطرح المتكرر يظهر لنا أن $(x+3)$ هو عامل في المعادلة (x^2+5x+6) قد تكرر $(x+2)$ مرة.

وعليه، نستطيع توسيع مفهوم خوارزمية التقسيم الحسابي Arithmetic Division Algorithm باتجاه التقسيم الجبري لمتعددات الحدود.

إن المقارنة المباشرة بين طريفي هذا النهج، ستكون ذات آثار مفيدة للطلبة.

ولفرض تعميق الفائدة المتوخاة من هذه المقارنة ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة جيدة بجملة من العبارات والاصطلاحات الرياضية مثل: المقسوم Dividend، المقسوم عليه Divisor، خارج القسمة Quotient.

إن عملية التقسيم في مادة الحساب تصل إلى نهايتها عندما يكون باقي القسمة يساوي صفراً، أما بالنسبة لمادة الجبر فإن القسمة تصل إلى نهايتها عندما يكون الباقي من القسمة أقل من المقسوم عليه.

الجواب ANSWER: نعم (عملية القسمة يمكن أن تتوزع على عملية الجمع).

(III) $2+3)^2=2^2+3^2$ ؟
الجواب ANSWER: كلا (الأسس لا تتوزع على الجمع)
 $(2.3)^2=2^2.3^2$ ؟

الجواب ANSWER: نعم (الأسس يمكن أن تتوزع على عملية الضرب).

(IV) $\sqrt{4+9}=2+3$ ؟
الجواب ANSWER: لا (الجزور لا تتوزع على عملية الجمع).

$\sqrt{4.9}=2.3$ ؟
الجواب ANSWER: نعم (الجزور قد يمكن أن تتوزع على عملية الضرب).

$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ ؟
الجواب ANSWER: نعم (الجزور يمكن أن تتوزع على عملية القسمة).

(V) $\frac{3.5+2}{3}=?$ $5+2$ تحدد
الجواب ANSWER: لا

ينبغي على المعلم أن يوضح بإسهاب عن طريق إيراد أمثلة، وأمثلة أخرى على نحو معاكس Counter - Example، مثل:

$2 \times (3 \times 4)$ لا يساوي $(2 \times 3) \times 4$ مضروباً في (2×4) .
وبالطريقة نفسها، عند ضرب $(2000-x)$ في 0.3 فإن
عاملاً واحداً فقط يضرب عامل واحد فقط في الرقم 100، وليس
كلاً العاملين.

الحساب

$$26 \overline{)806}$$

$$26 \overline{)806} \begin{array}{r} 3 \\ \end{array}$$

$$26 \overline{)806} \begin{array}{r} 3 \\ 78 \\ \hline \end{array}$$

$$26 \overline{)806} \begin{array}{r} 3 \\ 78 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$26 \overline{)806} \begin{array}{r} 31 \\ 78 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$26 \overline{)806} \begin{array}{r} 31 \\ 78 \\ \hline 26 \\ 26 \\ \hline 0 \end{array}$$

الجواب: 31

الجبر

$$x+3 \overline{)x^2+5x+6}$$

$$x+3 \overline{)x^2+5x+6} \begin{array}{r} x \\ \hline \end{array}$$

$$x+3 \overline{)x^2+5x+6} \begin{array}{r} x \\ x^2+3x \\ \hline \end{array}$$

$$x+3 \overline{)x^2+5x+6} \begin{array}{r} x \\ x^2+3x \\ \hline 2x+6 \end{array}$$

$$x+3 \overline{)x^2+5x+6} \begin{array}{r} x+2 \\ x^2+3x \\ \hline 2x+6 \end{array}$$

$$x+3 \overline{)x^2+5x+6} \begin{array}{r} x+2 \\ x^2+3x \\ \hline 2x+6 \\ 2x+6 \\ \hline 0 \end{array}$$

الجواب: (x+2)

الملاحظة

1. التقسيم الطويل - المألوف Usual Long Division.

2. تقسيم العدد الأسير من المقسوم على العدد الأسير من المقسوم عليه للحصول على عدد خارج القسمة.

3. اضرب المقسوم عليه كله بالعدد الأول من خارج القسمة.

4. اطرح هذه النتيجة من المقسوم، ثم أضف العدد التالي من المقسوم للحصول على مقسوم جديد.

5. قم بتقسيم العدد الأسير من المقسوم الجديد على العدد الأسير من المقسوم عليه، واحصل على العدد الجديد لخارج القسمة.

6. قم بتكرار الخطوة 3، وكذلك الخطوة 4 بضرب جميع المقسوم عليه بالعدد الثاني من خارج القسمة. ثم اطرح النتائج من المقسوم عليه الجديد. وسيكون الباقي النهائي في هذه الحالة صفراً.

مثال 5 EXAMPLE 5: (الجبر)

حل مسائل الرقم العشري Solving Digit Problems:

ينبغي تذكر الطلبة بمعاني أعداد المئات (h)، والعشرات (t)، والآحاد (u)، ثم يصار إلى إرشادهم إلى كيفية وصف أعداد بمرتبتين، أو ثلاث مراتب عشرية بدلالة ذلك. حدد تمريناً فكرياً وتطبيقياً.

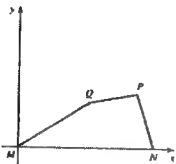
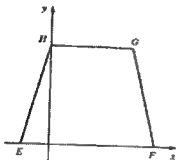
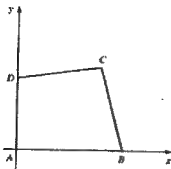
اطلب من الطلبة اختيار عدد يتألف من ثلاث مراتب عشرية، شريطة أن تكون أرقامها مختلفة. ثم دعنا نقوم باختيار العدد 365، ثم دع الطلبة يشارون بكتابة جميع الأرقام المحتملة (بمرتبتين عشريتين)، وباستعمال الأعداد 3، 6، 5. ابدأ الآن بجمع جميع الأعداد التي قام الطلبة بإحصائها:

$$\begin{array}{r} 36 \\ 35 \\ 63 \\ 53 \\ 65 \\ 56 \\ \hline 308 \end{array}$$

قم، الآن، بتقسيم المجموع على مجموع الأعداد الثلاثة = 3 + 6 + 5 = 14

$$\frac{308}{14} = 22$$

سيصاب الطلبة بالدهشة، عندما يلاحظون بأنهم جميعاً قد حصلوا على النتيجة نفسها، ومهما كانت طيحية أعداد المراتب العشرية الثلاثة قد اختارها كل واحد منهم بطريقة عشوائية.

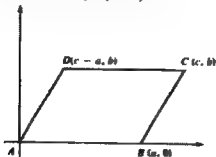


الحل SOLUTION:

ثبت الرأس A من متوازي الأضلاع ABCD على نقطة الأصل، واحد أضلاعه على محور السينات. استخدم الإحداثيات (a,0) لوصف النقطة B، والإحداثيات (c,b) لوصف النقطة C. وستكون إحداثيات النقطة (b, c).

باستخدام صيغة نقطة المنتصف، يمكن احتساب منتصف قطعة المستقيم \overline{AC} $\left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ، أما منتصف المستقيم \overline{BD} فيكون

$$\left(\frac{a+c-a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$$



إن تبرير هذه الظاهرة سيقود إلى فتح باب المناقشة حول طبيعة المسألة التقليدية، والتي يطلق عليها "مسائل الرقم العشري".

التبرير Justification:

اعتمد في وصف العدد المؤلف من ثلاث مراتب عشرية بالمعادلة $100h + 10t + u$. وفي ضوء هذه الصيغة ستكون الأعداد الستة المحتملة كما يأتي:

$$\begin{aligned} 10h + t \\ 10t + h \\ 10h + u \\ 10u + h \\ 10t + u \\ 10u + t \end{aligned}$$

سيكون المجموع أعداد هذه الاحتمالات:

$$20(h+t+u) + 2(h+t+u) = 22(h+t+u)$$

والآن، إذا طلب منا تقسيم هذا المجموع على مجموع قيم مراتبها الثلاث $(h+t+u)$ ، سنحصل على:

$$\frac{22(h+t+u)}{(h+t+u)} = 22$$

وعند استخدامنا مثل هذا الأسلوب، ينبغي أن ندعم التركيز بوضوح على الغاية المتوخاة من طرح هذه "السمة المميزة".

مثال 6 EXAMPLE: (الهندسة): استخدام طرائق هندسة الإحداثيات للبرهنة على أن قطري متوازي الأضلاع ينصف أحدهما الآخر.

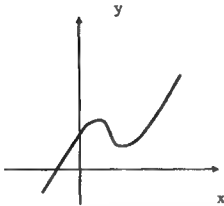
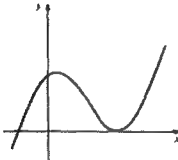
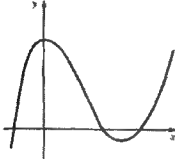
توفر طرائق هندسة الإحداثيات مناخاً مناسباً لبرهنة جملة من تمارين الهندسة المستوية، وبخطوات أكثر سهولة من تلك التي تتطلبها هندسة المستويات التقليدية. عند الشروع بحل تمرين ما باستخدام هندسة الإحداثيات، فإن نصف المالحة الرياضية المطلوبة لإنشاء البرهان تكتمل عند أعداد البيئة الهندسية للمسألة بصورة دقيقة.

وكثيراً ما يساعد استخدام نقطة الأصل Origin، واحد الإحداثيات (السيني أو الصادي) بوصفهما رأس Vertex، وضلع، على التوالي.

(يظهر أدناه مجموعة نماذج من الأشكال الرباعية وبمواضع مختلفة) بالنسبة لهذا التمرين، ينبغي على الطالب أن يمتلك معلومات كافية عن مبادئ هندسة الإحداثيات، مثل رسم النقاط على مستوى الإحداثيات، وصيغة نقطة المنتصف، وتعريف متوازي الأضلاع وبيان خصائصه.

بعدها، احصل على صورة دالة متعددة الحدود من الدرجة الثالثة (دالة تكعيبية Cubic Function)، وبالصيغة الآتية:

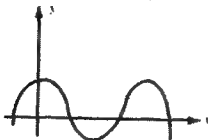
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
 (لاحظ المواقع المحتملة لهذه الدالة)



في النهاية، ستكون صورة دالة متعددة الحدود من الدرجة الرابعة (دالة تربيعية)، وبالصيغة الآتية:

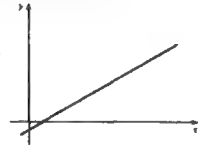
$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

كما في الشكل الآتي (لاحظ المواقع المحتملة لهذه الدالة)



بما أن منصفات كل من قطري متوازي الأضلاع تمتلك إحداثيات متساوية، لذا نستطيع الاستنتاج بأن كل منهما ينصف الآخر.

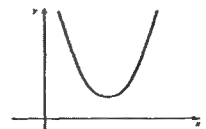
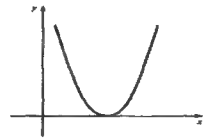
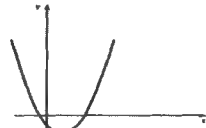
مثال 7 EXAMPLE 7: (حساب التفاضل والتكامل)
 استخدم آلة حاسبة رسومية للتحقق من عدد نقاط النهايات الصغرى والعظمى النسبية في دالة متعددة الحدود من الدرجة n .
 قبل البدء بعملية التحقق، ينبغي قيام الطلبة برسم مخطط لمعادلة الخط المستقيم $y = ax + b$. ويتوجب عليهم معرفة أن هذه المعادلة هي من الدرجة الأولى First Degree، والتي تأخذ الشكل الآتي:



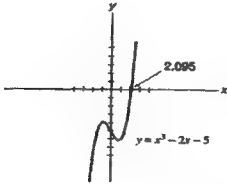
الآن، ابدأ برسم منحنى الدالة من الدرجة الثانية، وبالصيغة الآتية:

$$y = ax^2 + bx + c$$

 والذي سيبدو قريب بالشبه بالقطع المكافئ (لاحظ المواقع المحتملة لهذه الدالة).



الدالة مع المحور السيني، بعدها نباشر بعملية تكبير متكررة للقطع المحدد لحين الوصول إلى الدقة المطلوبة إن القيمة التقريبية للجذر هي 2.095، والتي ستظهر بوضوح على شاشة الآلة الحاسبة - الرسومية.
(انظر الشكل الآتي)

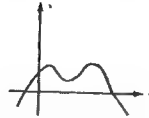
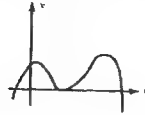


خلاصة Summary

لقد قيل في عصور سابقة أن قطعة طباشير وسبورة هي كل ما يحتاجه المعلم لعرض درس مفيد. وهذه القول لا تصح في عصرنا الراهن، وعلى الخصوص، بعد أن تعودنا جميعاً على مشاهدة إنجازات مثالية على شاشات التلفزيون، وعلى شاشات العرض بصورة مستمرة.

وإذا كان المعلمون يأملون جذب انتباه الطلبة، ينبغي عليهم أن يتنافسوا مع الصورة التي يصنعها أهل الخبرة والمتخصصون، ومع الفنانين والفنانات ذوي الدخل العالي! لذا يحتاج المعلم، في وقتنا الراهن، تلك الأدوات والمهارات التي يمكن استخدامها في كل إنجاز (مهما كان نوعه). ومن بين هذه الاحتياجات تبرز القدرة على الإجابة وتوضيح النقاط، والمواضع التي تثير الإرباك لدى الطلبة اليافعين، وعلى وجه الخصوص، المفاهيم الرياضية التي تنتم بصورة ملحوظة، وأن تكون رياضياً ماهراً قد خبر الرياضيات بعلومها وتاريخها، وتمتلك القدرة على إجابة أي سؤال يقع في دائرة الرياضيات. يستطيع المعلم المبدع، أيضاً، أن يصمم، ويصنع أوراق جهاز العرض الضوئي وتحمضها، ويتقن فن الخيوط، وتصنيع النماذج، وصياغة المسائل الرسومية المناسبة.

لقد أوضح هذا الفصل بعض الاستراتيجيات والأدوات التي يستطيع المعلمون استخدامها لتهيئة المناخ المناسب لدرس مثير ومؤثر. إن التفاعل بين الطلبة الذين يجلسون معاً في غرفة الدرس، صغيرة كانت أم كبيرة، وتحت توجيه المعلم الفطن، سينتج عنه إثارة وتحفيز عقلي، لا يمكن الظفر بهما عند الجلوس منفردين أما الشاشة الصماء!.



- قم بدراسة جميع الأشكال التخطيطة لاستنتاج ما يأتي:
الدالة من الدرجة الأولى تمتلك (صفر) نقطة لنهايات عظمى أو صغرى نسبية.
 - الدالة من الدرجة الثانية تمتلك (1) نقطة لنهايات عظمى أو صغرى.
 - الدالة من الدرجة الثالثة تمتلك (كحد أعلى) نقطتين لنهايات عظمى أو صغرى.
 - الدالة من الدرجة الرابعة تمتلك (كحد أعلى) ثلاث نقاط لنهايات عظمى أو صغرى.
- ينبغي أن يكون الطلبة، الآن، قادرين على تعميم هذه الاستنتاجات في تحديد الحد الأعلى من نقاط النهايات العظمى أو الصغرى النسبية التي تمتلكها دالة متعددة الحدود من الدرجة n .
- ويمكن أن يجري تحليل إضافي بحساب التفاضل والتكامل فيتناسب مع الموضوع الطروح في هذه الفترة.

استخدام آلة حاسبة - رسومية

Using A Graphing Calculator

مثال 1 EXAMPLE: (حساب التفاضل والتكامل)

استخدم آلة حاسبة رسومية في إيجاد الجذر الحقيقي - الموجب للمعادلة $x^3 - 2x - 5 = 0$ مقرباً إلى ثلاث مراتب عشرية.

بعد اكتمال ظهور الشكل على شاشة الآلة الحاسبة، فإن جذر المعادلة (قيمة الصفر في الدالة) يمكن الحصول عليها عند احتساب نقطة تقاطع الدالة مع المحور السيني. ويمكن تحديد النقطة الصغرى على منحنى بالدقة التي نريدها عن طريق وضع المؤشرة Cursor في أقرب موقع ممكن من نقطة تقاطع منحنى

تمارين Exercises

1. بأعدادها) كقاعدة لصياغة خمسة أسئلة جديدة، تشابه الأولى إلى حد ما.
6. قم بإعداد درس يناقش قضية "إن مجموع زوايا المثلث، والشكل رباعي الأضلاع، والشكل خماسي الأضلاع، ... الخ تكافئ قيمة ثابتة. لكل نوع من أنواع الأشكال متعددة الأضلاع" مستخدماً تقانة طي الورق أو/ و النماذج الفيزيائية).
7. قم بتطوير درس يستخدم فيه اللوح الهندسي Geoboard.
8. اكتب درساً صفياً متكاملًا حول مادة حساب المثلثات والذي يعرض منحنيات الدوال المثلثية (مقترح: استخدم آلة حاسبة - رسومية).

1. اكتب درساً باستخدام أنماط الأعداد، ومثلث باسكال Pascal Triangle لكل من المراحل الآتية:
- أ. الصف الثامن.
- ب. الصف الثاني عشر.
3. اكتب درساً عن خصائص المعين Rhombus.
4. اكتب درساً عن الاحتمالات، مع / أو بدون مساعدة الآخرين مما يجعل الطلبة ينهمكون في تفكير ذي مستوى متقدم. حاول أن تدافع عن أفكارك.
5. أ. قم بأعداد درس يحوي ثلاث مسائل لفظية لغرض حلها في مادة الجبر المخصصة للسنة الأولى (اقتراح: استخدم عارضة ضوئية، وآلة حاسبة رسومية).
- ب. اطلب من الطلبة استخدام المسائل اللفظية (التي قمت

أياً من النشاط الصفّي (يجري بصورة عامة، على أساس دائم)، أو خبرات الطلبة عندما يعملون على واجباتهم اليومية المحددة. والصفحة الثانية للكتابة هي سجل يومية الطالب، حيث يلاحظ اختلاف هذه الصفحة عن سابقتها بكونها أكثر تفصيلاً، وتتضمن الفقرة على الفهم، وآراء الطالب حول المادة التي تم تغطيتها، بينما لا يزيد سجل أداء الطالب عن كونه تقريراً حول المادة التي تم تغطيتها ليس إلا.

يعد أسلوب العرض Exposition أكثر الصيغ توسعاً في الكتابة، وفيه يعد الطلبة إلى الكتابة حول الموضوعات الرياضية المختارة، أو العامة. قد تتضمن هذه الفعالية التحريات فضلاً عن أعداد التقارير.

سجلات الطالب Student Logs

إن سجل الطالب، هو التقرير الرسمي والأساسي لوصف نشاط التعلم لديه. قد يتألف هذا السجل من تبويبات وتصميمات مركبة، مع مجموعة عناوين فرعية لكي يسهل الوصول إلى تفاصيلها.

يمكن أن يزدود الطلبة بصحائف تدرج عليها الفئات المختلفة مثل: التاريخ، والعنوان، والعلاقات الجديدة التي تم تعلمها والتعاريف الجديدة، وكيف تفعل شيئاً جديداً، وأمر مهم ينيغي تذكرها، فيكون كل ما ينيغي عليهم فعله هو الإجابة على كل فئة من هذه الفئات.

في معظم كتابات المهام المحددة، ينيغي أن يشجع الطلبة

الكتابة في درس الرياضيات Writing in the Mathematics Classroom

يجابه عدد كبير من معلمي الرياضيات اقتراح دمج كتابة الواجبات ضمن فترة الدرس بدعشة بالغة، مدعياً بأنه لا يكاد يوجد وقت كاف لممارسة تمارين إضافية بمادة الرياضيات، فكيف يكون هناك متسع من الوقت لممارسة مثل هذه الأنشطة في نفس الوقت. تكمن فائدة الكتابة بالسماح للطلبة في التفكير ملياً بالأفكار المطروحة في الصف، لأن هذه العملية تتطلب آلية تفكير أكثر بطقاً مما تطلبه عملية التعبير الشفوي.

أظهرت الكثير من الأدبيات العلم نفسية بأن الطلبة الذين يحسنون التعبير بالألفاظ عن معرفتهم، يمتلكون قابليات جيدة على استدعاء تلك المعرفة، وأن الطلبة الذين يميلون إلى كتابة المفاهيم الجديدة التي تعلموها وبصورة أكثر دقة من الطلبة الذين لا يمارسون أيًا منها.

من أجل هذا، تبدو الكتابة عاملاً مهماً يسهم في تقوية التعلم وتعميق أسسه في المتعلم ذاته.

يستعرض هذا الفصل مجموعة من الطرائق التي يمكن من خلالها نزع الكتابة داخل ساحة درس الرياضيات. وستسهم الأمثلة التوضيحية في توفير توضيحات أكبر لهذه الاقتراحات. يوجد هناك أكثر من صيغة يمكن أن تتبد من الكتابة في درس الرياضيات، إحداها سجل أداء الطالب. ويلخص هذا السجل

الاحتمالية؟" وفي أي الحالات يُستخدم الجمع في حساب الاحتمالات وهناك مثال آخر يصلح أن يكون موضوعاً لكتابة الاستعراضية التي يحددها المعلم مثل "اربط مفهوم الحل الهندسي LOCUS باستخداماته السائدة في الحياة اليومية"، أو "أشرح أهمية نظرية فيثاغورث في علم المثلثات".

شرح خوارزمية (أو وصف عملية) Exploring An Algorithm (Or Describing A Process): يمكن أن يطلب من الطلبة عرض شرح، أو تفسير مكتوب عن كيفية إجراء عملية حسابية ما، مثل قسمة الكسور، أو تبسيط بعض الصيغ الجبرية. إن هذا النوع من النشاط يجذب الطلبة ويلفت انتباههم إلى ضرورة جرد أفكارهم وصياغتها بطريقة منطقية لجعلها واضحة وجلية عندما يطلعها الآخرون.

شرح نظرية Explaining Theorem: في هذا المقام، ستم دعوة الطلبة بعدم الاقتصار على شرح وتوضيح نظرية محددة فحسب، بل إلى محاولة تبريرها والبرهنة على الفقرات المتعلقة بها.

قد تكون نظرية بسيطة أو معقدة، مثل "الخط المستقيم الذي يصل بين نقطتي منتصف ضلعي مثلث يوازي ضلعه الثالث ويساوي نصفه". ينبغي تشجيع الطلبة على شرح النظرية وتوضيحها بمباراتهم الشخصية دون الحاجة إلى إعادة صياغة الفاظها، شريطة المحافظة على المعنى.

وصف أو تفسير رسم بياني Describing Or Interpreting A Graph: يمكن أن يعطى للطلبة منحنى رياضي ويطلب منهم محاولة توضيح انعطاف المنحنى Curve Inflection، ونقاط الانقلاب (Turning Point)، والميل Slope، أو أية خاصية يمكن استثمارها في وصف المنحنى.

وبالمقابل يمكن أن يعرض على الطلبة رسم وصفي Descriptive Graph، مثل رسم تخطيطي - إحصائي يتم انتقاؤه من إحدى الصحف، ويدعى الطالب إلى بيان وشرح ما يحمله هذا الرسم من معلومات للقارئ.

ينبغي أن لا تقتصر مساهمة الطالب على قراءة الرسم التخطيطي والشرح المباشر لما يراه، بل يجب تشجيعهم على تصوير ما يعرضه التخطيط.

وقد توفر الآلة الحاسبة - الرسومية مناخاً يساعد الطلبة على تفسير الرسم التخطيطي للدوال متعددة الحدود أو الدوال التسامية. Transcendental.

مناقشة حل إحدى المسائل Discussing The Solution To A Problem: بعد الانتهاء من حل مسألة من المسائل،

على كتابة عبارات تامة بدلاً من كتابة كلمات مفتاحية فقط لأن هذه المهام الكتابية - المحددة - سوف تجبر الطلبة على صياغة المفاهيم بعبارات واضحة ودقيقة، الأمر الذي ينجم عنه تعميق واضح في فهمهم، واستيعابهم الموضوع.

سجلات يومية الطالب Student Journals

قد يصبح سجل يومية الطلبة أكثر الأساليب المباشرة لتواصله واتصاله مع المعلم. وقد يكون هذا السجل ذا طابع يومي، ويميل إلى أن يكون تقريراً أقل التزاماً بالمظاهر الشكلية والرسوم التي تسود سجل الطالب.

يشجع الطلبة على الكتابة حول ما قد تعلموه في الفترة الأخيرة، وتدوين ملاحظات حول الحقائق المهمة، والتعليق على خبرة التعلم الجديدة.

تصبح عملية قراءة المعلم للسجلات اليومية، من الأمور المرغوب فيها، كذلك الاستجابة للطلبة بالكتابة حول الموضوعات التي قرؤوها في الفترة الأخيرة.

فضلاً عن إهانة الطلبة الذين يعانون من صعوبة صياغة فهمهم للموضوعات الرياضية الجديدة بعبارات واضحة، توفر عملية كتابة المهام المحددة في سجل يومية الطالب للمعلم فرصة ثمينة في تخمين، وتحديد فهم الطلبة للمبادئ والمفاهيم التي عرضت داخل الدرس. وسيجد الطلبة التعلم قد عزز وأن لديهم سجل كامل بما تعلموه.

سيبدأ الطلبة، الآن، بإدراك مشاركتهم في اتصال يومي ومباشر بالمعلم. إن العمل الإضافي الذي تتطلبه الكتابة في سجل اليومية هو أكبر من أن يكون وسيلة توفر للمعلم قدرة كافية لتلمس كثير من جوانب شخصية الطالب وعادات التعلم لديه.

العرض التفصيلي Exposition

إن الكتابة التي تستعرض التفاصيل هي أحد الأنشطة التي تستخدم لاستكشاف الزيد عن المواد التي يتم عرضها داخل الصف الدراسي، وذلك بفرض: مساعدة الطلبة على الفهم الأفضل للمواد المعروضة داخل الصف، وتوسيع أو زيادة حجم المادة التي أخذت بنظر الاعتبار في الصف (انظر الفصل السابع حول "إثراء تدريس الرياضيات" للتمييز بين كلمتي "توسيع" و"زيادة").

يمكن استخدام بعض الأمثلة عن الكتابة الإيضاحية في سياق متابعة تدريس الرياضيات.

شرح مفهوم Explaining Concept: قد يطلب من الطلبة شرح مفهوم من المفاهيم الرياضية بأسلوبهم الشخصي، مثل "في أي من الحالات تستخدم عملية الضرب في حساب

قد نشأ عن هذه الظاهرة، يستطيع أن يقترح على الطلبة إعادة كتابة التفسير بألفاظهم وعباراتهم الشخصية، وبأسلوب يسهل تناوله عند استخدام الكتاب المنهجي في درس قادم .
لذا سيكون على الطلبة أن لا يتوقفوا عند حدود التأكد من فهمهم المفهوم، بل ستوفر لهم فرصة إعادة صياغة ألفاظ الموضوع، الأمر الذي سيزيد من تعميق فهمهم وإدراكهم لتفاصيل المفهوم المطروح.

وصف شكل هندسي Describing A geometric Figure: إن أفضل طريقة لأعداد مهمة محددة - مكتوبة تصف شكلاً هندسياً، ستكون بجعل الطلبة يتخيلون بأنهم على وشك وصف ذلك الشكل لصديق ما على الهاتف.
ينبغي أن يطلب منهم، بعد ذلك، أعداد عبارات واضحة تعبر عن وصفهم للرسم الهندسي.
يتطلب هذا النشاط، من الطلبة، التفكير بطريقة منطقية، وعميقة، وانتقاء الكثير من الأفكار المهمة.

تعميم مفهوم Generalizing A Concept: كثيراً ما يعرض مفهوم ما، ويبقى حبيساً في صيغة مختصرة concise. يتم التعميم بمحدودية استخدامه داخل الصف بسبب المحددات الزمنية. وقد يبعث المعلم روح التحدي، داخل الصف، بتأمل موضوع اليوم (على سبيل المثال، التحليل الماملي للعامل ثلاثي الحدود Trinomial) ودعوة الطلبة إلى تعميم الموضوع (على سبيل المثال، التحليل الماملي).

قد يطلب من الطلبة تأمل مبرهنة فيثاغورث وتحديد إمكانية تعميمها إلى أساس يزيد على 2 (مبرهنة فيرمات الأخيرة)، أو أن اعتبار الأبعاد الثلاثة قد يوفر فرصة للمبرهنة على الوضوح Enlightening، أو فيما إذا كان يمكن التعميم على المثلثات بدلا من المثلثات قائمة الزاوية (قانون جيبس التمام). في أي حالة من الحالات السابقة، ينبغي أن يكون التحدي مفتوحاً وغير محدد، على أن يكون موضوع التعميم خياراً شخصياً للطلاب. وقد تكون بعض التعميمات صحيحة، بينما تكون أخرى بعيدة عن الصحة. قد لا يتوقع المعلم بعض تعاميم الطلبة بين التقنية والأخرى (تبرهن، علاوة على ذلك، على كونها إلتفاتة مدسدة له).

إن هذا النوع من الواجبات المفتوحة ستؤدي إلى بعض التحريات الممتعة للطلبة، والتي تمنح جميع طلبة الصف منافع متعددة نشأت عن الخيال الشخصي للطلبة.

تقرير الرياضيات The Mathematics Report: يوجد حشد من الأنشطة التي يمكن أعداد التقارير عنها. فقد

يمكن أن يطلب من الطلبة كتابة شرح واضح للمسألة. وإن تقتصر فوائد هذا النشاط على إعطاء فرصة للطلاب، أو لمجموعته، في التمتع بالنجاح في حل المسألة، ولكنها ستمنحهم عزماً أكيداً على تأسيس هذا النجاح في التعبير عنه بألفاظ دقيقة. ولأن هذا الوصف اللفظي لتفاصيل حل المسألة سيساعد على ترسيخ فهمهم للحل.

كتابة مسألة Writing A problem: تعد عملية كتابة مسألة. وبالأخص المسألة التي يعبر عنها بالكلمات Word Problem. إحدى التحديات الكبيرة التي توضع أمام الطلبة، ومما ينعكس بشكل ملموس على موقفهم من هذا النشاط لذا ينبغي تجميعهم على كتابة المسائل، وأعداد إجابات لها.

يمكن أن تكون المسألة باللغة البساطة، مثل رسم أمثلة من الحياة اليومية، أو قد تغطي موضوعات عولجت داخل الصف في مراحل سابقة.

ينبغي عدم قصر تشجيع الطلبة على تغيير أرقام المسائل المنتشرة في الكتاب المنهج الدراسي، بل التوجه نحو دفعهم إلى اقتناص موضوع المسألة من خبراتهم اليومية، والتي ترتبط بصلة وثيقة مع الثقافات والموضوعات التي تدور في درس الرياضيات بالدرسة.

ربط الدلالة الرياضية مع مقالة محددة في جريدة أخبار **Connecting the mathematical significance with a particular newspaper article:** أما أن يطلب من الطلبة إيجاد مقالة تستخدم بعض الجوانب الرياضية لوصف موقف ما، أو قد يلجأ المعلم إلى اختيار بعض المقالات النموذجية من جرائد الأخبار المحلية ويكلف الطلبة بالكتابة عن الرياضيات الموجودة في تلك المقالات، وستكون هناك فوائد ملموسة من هاتين المهمتين.

ينبغي تشجيع الطلبة على التعبير بحرية عما يعتقدونه، وعن المكان الذي لاحظوا وجود تطبيق رياضي بين ثناياه. وعليه، سيكون عملهم مستمراً دون أن تحدد له نهاية معلومة. الأمر الذي يسبغ على المهمة المحددة مزيداً من الإثارة والتشويق.

إعادة كتابة تفسير "غامض" بكتاب منهجي Rewriting An "Unclear" Textbook Explanation: قد يحدث في بعض الأحيان، بأن تفسير وشرح كتاب منهجي لمفهوم معين يتصف بغموض واضح بحيث يصعب على الطلبة فهمه.

وعندما يحس المعلم بأن عدم قدرة الطلبة على فهم الموضوع

- التفاصيل سوف يزجج القارئ ذي المعرفة العميقة بالموضوع.
2. قد لا يدرك الطلبة الفرق القائم بين الشروط الكافية والضرورية عند وصف شيء ما.
3. قد يذهب الطلبة إلى تضمين ما يعده صحيحا أو محتوما دون تبرير مناسب للأمر.
4. قد لا يدرك الطلبة ماهية مكونات البرهان الصحيح .
5. قد يقوم الطلبة بأعداد أشكال غير دقيقة، وبالغة الصغر بحيث لا يمكن العمل عليها، أو تقتصر إلى مؤشرات كافية توضح محتوياتها.
- إن مجمل ما ذكر سابقا، لا يزيد عن كونه جزءا يسيرا من الأمور التي يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار عند معالجة موضوع كتابة الطلبة.
- وهناك الكثير من مواطن الضعف الأخرى الكامنة والتي ينبغي علينا الاهتمام بها في بداية المهام الكتابية - المحددة، وعلى المعلمين أن يساعدوا الطلبة على الكتابة حالا يلاحظون إمارات ضعف ظاهرة لدى طلبتهم.
- يبقى السؤال المطروح حول تقييم الكتابة من وجهة نظر نحوية ولغوية يفتقر إلى إجابة حاسمة.
- لستين عديدة رقع الطلبة شعار "الصف الكامل هو الصف الذي يتقن اللغة الإنجليزية" " Every Class is English Class"، وهناك الكثير من المعلمين الذين يذهبون هذا الذهب وما زالوا يشاركون في تبني هذه الفلسفة.
- وكذلك يوجد آخرون في مجتمع تعليم الرياضيات ممن يعتقدون بأن إيلاء قواعد اللغة اهتماما زائدا سوف ينجح عنه إبعاد الطلبة عن الضمون الرياضي، لذا تجدهم لا يأبهون بالضعف الموجود في البنية النحوية مبنى أو معنى والتي تسود في كتابات طلبتهم.
- وإذا كان الأمر كذلك، ينبغي أن يوضح المعلم لطلبتهم بأن عدم التعليق على صرف الجملة ونحوها، ومباني عباراتها، ووضوح معانيها، لا يدل حتما على سلامة لغة الكتابة بمعايير العلوم النحوية والصرفية والدلالية، ولكن هذه العوامل قد تم تجاهلها لغرض تركيز الاهتمام كليا بالضمون الرياضي الذي تمالجه.

فوائد أنشطة الكتابة في درس الرياضيات

Benefits Of Writing Activities In The Mathematics Classroom

قد تكون الكتابة حافزا على تنشيط المحادثة داخل الدرس، والتي بدونها لن يكون مثل هذا الأمر ممكنا. من أجل

يناقش الطلبة موضوعات من السجل التاريخي للرياضيات، مثل نمو وتطور أحد فروع هذا العلم (على سبيل المثال، هندسة الإحداثيات، أو الهندسة اللاقليدية) أو تتبع تاريخ تهذيب قيمة π ثابت رياضي مثل π .

ويستطيع الطلبة، كذلك، إجراء تحريات في تاريخ الرموز الرياضية.

هناك المزيد من موارد المفاجأة والدهشة المطورة في هذا الموضوع. والتي تجعل منه موضوعا مقربا.

إن أحد الموضوعات السائدة في تاريخ الرياضيات يمكن في دراسة مختصرة لسيرة أحد مشاهير هذا العلم .

توفر الرسوم التخطيطية للوصف النقدي المتصل بمجموعة الكتب والمؤلفات في حقبة من الحقب صورة معيرة عن الرياضيات، فضلا عن تفاصيل ممتعة من قصة حياة ذلك العلم الرياضي.

وقد يناقش الطلبة الجدول والخلاف الذي ظهر عبر مراحل نمو الرياضيات وتطورها. فعلى سبيل المثال، هناك الكثير من النظريات التي أطلق عليها أسماء أناس لم يشاركوا في اختراعها - نظرية سيمسون Simson's Theorem في الهندسة التي لم يكن يعرفها ألمع اختصاصي الهندسة في القرن السابع عشر روبرت سيمسون، لكنها على الأرجح قد نشأت على يدي العالم الرياضي ولیم ولانس Wiliam Wallace في عام 1797، بعد فترة طويلة من وفاة الأول!.

هناك جدل كبير يتركز حول هوية الرجل الذي قام بصياغة وتطوير حل مناسب للمعادلة التكعيبية غير القابلة للتحليل، هل هو كاردانو Cardano أم تارتاجليا Tartaglia؟.

يستطيع الطلبة، أيضا، أعداد تقارير تناقش الاكتشافات الجديدة في حقول الرياضيات، مثل الحل الأخير لمسألة الخريطة ذات الألوان الأربعة Four Color Map Problem، أو برهان نظريات فيرمات الأخيرة .

يوفر تاريخ الرياضيات بيئة شديدة الخصوبة لمن يريد استكشافها وإبداع مكنوناتها التاريخية والعلمية في كتاباته، لذا ينبغي توظيف هذا الموضوع داخل الصف واستثمار كنوزه القيمة.

معايير تقويم نماذج كتابات الطالب

Criteria for Evaluating Student Writing Samples

1. يميل معظم الطلبة إلى الإيجاز مبتعدين عن الاستيعاب، وتنسم الكتابة لديهم أما بالغموض والالتباس، أو تقتصر إلى الدقة . ينشأ الإيجاز لديهم، عن الاعتقاد بأن الإيجال في

سؤال Question: ماذا نتوقع من معلمك خلال الفصل الدراسي الحالي، وماذا يستطيع المعلم أن يتوقع منك؟

إجابات Replies

جوان: أنا أتوقع أن أتعلم أشياء جديدة وكيفية حل المسائل كذلك أتوقع المشاركة في بعض الرحلات. وكذلك أتوقع إن قمت بأداء جيد داخل الصف بأنك ستقوم بإخبار والدي بالأمر.

باتريشا: في الصف، أتوقع أن يكون معلمي متفتح الذهن ومدركا لأسلوبنا في حل المسائل، ولا يقتصر على تعليمنا لنمط واحد من الطرق بحيث يجعل الطلبة محصورين داخل هذا النمط المفرد. وينبغي أن تكون مدركا بأن لا تكلفنا بواجبات يتيهه كثرة، بل بكمية معقولة منها بحيث نستطيع عند عودتنا إلى البيت استبقاء الموضوعات التي تلقيناها حاضرة في أذهاننا. الاختبارات ينبغي أن تكون كل بضعة أسابيع، وليمت بصورة دائمة.

جامعي: سيكون الاحترام على رأس قائمة الموضوعات التي يتوقعها المعلم مني، وكذلك تقديم إجاباتي اليومية في مواعيدها، وأن أكون لطيفة مع زميلاتي بالصف، وأن أقدم إلى الصف وقد أكملت تحضير الدروس، وأكون متهيئة له، وأن أصغي بانتباه إلى ما تقوله المعلمة.

فنزنت: ما نتوقعه مني هو بذل جهد متميز ومكرس، والمشاركة الفاعلة داخل الصف، وإذا احتجت إلى مساعدة ما فإني سألجأ إلى إخبارك بالطبع.

تم اقتطاع الفقرات الآتية من سجل يومية جملة من الطلبة بوصفها هيئة يمكن الاستفادة منها.

طالب 1: تعلمت كيفية حل المعادلات الجذرية، في هذا اليوم. الجذر في المعادلة يعني الجذر ذا القيمة الموجبة فقط المعادلة التي تحوي جذرا يطلق عليها معادلة جذرية على سبيل المثال، $\sqrt{x} = 7$.

يمكن حل المعادلة الاعتيادية بالإضافة، أو الطرح من كلا طرفي المعادلة. لكن ينبغي التأكد من المعادلة الجذرية لأن الأجوبة قد لا تكون صحيحة على الدوام.

1. عرض المعلم الأمثلة الآتية:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-5} &= 7 \\ (\sqrt{2x-5})^2 &= 7^2 \\ 2x-5 &= 49 \\ 2x &= 54 \\ x &= 27\end{aligned}$$

الجواب:

هذا. وتساوقا مع معايير NCTM، ستكون مهام الكتابة - المحددة ضربة البداية لاستهلال هذا النوع من النشاط الإيجابي.

قد تصبح بيئة درس الرياضيات التي يقل الاهتمام فيها بالأمور الشكلية والرسومية، ومع زيادة وشائج الاتصال بين الطلبة ومعلمهم، أكثر ملائمة وتوافقا مع احتياجات الطلبة. لذا، قد يستمتع الطلبة بعرض تقديمي للرياضيات اعد خصيصا لإشباع حاجاتهم، وسيكون المعلم أكثر إدراكا بمستوى التعلم لدى طلبته، وطبيعة احتياجاتهم، ومقومات شخصياتهم، وعمق إدراكهم للموضوع.

إن استعراض المواد التي تم تعليمها في مراحل سابقة، قد يصبح أعمق تأثيرا في المناخ التعليمي الذي تسوده أنشطة الكتابة يصيغ سجل الطالب، أو سجل اليومية، لذا استمر باعتماد استعراض المفاهيم التي تم تدريسها سابقا.

يمكن استخدام تقويم النظراء Peer Evaluation عند تبني آلية مهام الكتابة المحددة، سواء كانت المهام من نوع سجل اليومية، أو استعراضا تفصيليا، حيث يتم تبادلها بين الطلبة عند القيام بعملية تقويم كتابات نظرائهم.

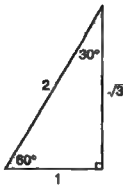
على الرغم من أن هذا النوع من النشاط قد ينشعب عنه مستوى جديد من التلق، وبخاصة لدى المراهقين، فإن حسن التعامل معهم واحتواء آثاره الجانبية سيغدو من هذا النشاط بوصفه مصدر انتعاش، وتكوين معرفي للصف.

إن معلمي الرياضيات هم الفئة الأقل اقتناعا بجدوى وقيمة الكتابة في درس الرياضيات. وبعد كل هذا، ليس واضحا بأن المنهج الدراسي لمادة الرياضيات قد اثقل وأثخن بموضوعات أقرت رسميا في ضوء الحاجات التربوية للولاية؟

إن جل المعلمين يعمدون إلى تقييم تقدم كل طالب من طلبتهم على طريق المتعلم، ومن خلال الخبرة اليومية داخل الصف. إن استجابات الطلبة لهذه الاختبارات في سجلاتهم، وسجل اليومية، والتقارير، والأشكال الأخرى من الاستجابات المكتوبة، ستعكس بصورة ملموسة قدراتهم على الفهم، والإبداع، ومستوى الإنجاز المتحقق داخل الصف.

إن عينة الإجابات - المدونة الآتية، والخاصة بالمهام المحددة لليوم الأول من عمل الصف في درس الهندسة ستوفر بعض العلامات التوضيحية لجميع المعلمين، سواء كانوا ممن يمتلكون الخبرة والدراية، أو ممن يباشروا بالخطوة الأولى على هذا الطريق.

التحقق :



بعدها قامت الدرسه بعرض مثالين استطعت تتبهما وفهم مشاهمتها، ضمن الأول إن الضلع الذي يقابل زاوية 30° يساوي نصف قياس وتر المثلث، والثاني تضمن إن الضلع المقابل لزاوية 60° يساوي نصف قياس وتر المثلث مضروباً في $\sqrt{3}$.

أنا احب درس الهندسة لأنه يستخدم المخططات التوضيحية والرسوم بحيث تستطيع مشاهدة الأمور التي تقوم بها.

طالب 3: تعلمت في درس اليوم إيجاد مساحة متعدد الأضلاع المنتظم Regular Polygon بواسطة الصيغة $A = \frac{1}{2} \times (\text{العاعد}) \times (\text{محيط الشكل})^{(1)}$ لقد عرض لنا المعلم طريقة اشتقاق هذه الصيغة باستخدام صورة لمتعدد الأضلاع المنتظم، ثم عمد إلى تقسيمه إلى مثلثين متساويي الساقين تتطابق قاعدتهما وارتفاعاهما.

وبما أن مساحة كل مثلث منهما $= \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$ ، فإن مجموع جميع المساحات الصغيرة يساوي المساحة الكلية لمتعدد الأضلاع المنتظم.

SUMMARY خلاصة

إن الكتابة في دروس الرياضيات قد اكتسبت قبولاً وباتت أكثر شهرة خلال السنين الأخيرة. يضاف إلى ذلك، إن اعتبار عملية الكتابة مورداً حصياً لا يمكن إهماله أو غش الطرف عنه ضمن الأنشطة التي تسود الصف المدرسي، أصبح مصدراً يعود بالفائدة على المعلم الذي يحصل عليه من سجلات طلبته بأشكالها المتعددة.

ستوفر للمدرسين فرصة عظيمة ومفيدة، في هذا المقام، لكي يباشروا عملية إنشاء اتصال منتظم مع طلبتهم من خلال هذا المورد المهم

(١) العائد Apothem: هو نصف قطر الدائرة التي تحيط بالشكل متعدد الأضلاع - المنتظم.

$$\sqrt{2x-5} = 7$$

$$\sqrt{2(27)-5} \quad ? \quad 7$$

$$\sqrt{54-5} \quad ? \quad 7$$

$$\sqrt{49} \quad ? \quad 7$$

$$7 = 7$$

2. بعدها قام المعلم بعرض مثال آخر علينا، لكننا في هذه المرة لم نستطع التحقق من إحدى الإجابات.

$$\sqrt{4x-3} = -4$$

$$(\sqrt{4x-3})^2 = (-4)^2$$

$$4x-3 = 16$$

$$4x = 19$$

$$x = \frac{19}{4}$$

التحقق :

$$\sqrt{4x-3} = -4$$

$$\sqrt{4(\frac{19}{4})-3} \quad ? \quad -4$$

$$\sqrt{19-3} \quad ? \quad -4$$

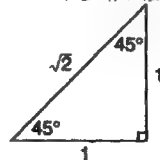
$$\sqrt{16} \quad ? \quad -4$$

$$4 \quad ? \quad -4$$

كلا

أستاءل لماذا حصل هذا؟

طالب 2: دار درسنا، هذا اليوم، حول مثلثين من نوع خاص هما مثلث 45 - 45 - 90، ومثلث 30 - 60 - 90 وهذه هي القواعد التي تنطبق عليهما:



إن المثلث أعلاه هو الذي يطلق عليه مثلث 45 - 45 - 90 لأنه عبارة عن نصف مربع.

والمثلث التالي هو 30 - 60 - 90 لأنه يشبه الشكل الرباعي - المثلث. وقد وضحت المعلمة موضوع مكافئة المثلث الأول لنصف المربع، والثاني النصف المستطيل لكنني لم استطع فهم ذلك.

تمارين Exercises

العادي إلى الأفضل. اتسمت بعض الأوراق التي قدمتها الطالبة بكونها هزلة، ومكتوبة بأسلوب روتيني تسوده اللامبالاة، وتكسب بوضوح افتقارها إلى أي جهد صادق أو حقيقي. ما هو طبيعة التصرف الذي ستقوم به إزاء هذه الحالة؟

5. قام طالب، لفته الأم ليست اللغة الإنجليزية، بتقديم ورقة بحث تحوي شرحا يمتاز بمحتوى علمي رصين لكنه يعاني من أخطاء نحوية كبيرة، وأخطاء إملائية، ودلالية، وأمور لغوية مقاربة. هل ستقوم بتصحيح عبارته الإنجليزية؟ ولماذا؟

6. اختر مقطعا صعبا من أي فصل من كتاب دراسي يستخدمه طلبك. ثم ادعهم إلى إعادة كتابته بالطريقة التي يرونها أكثر وضوحا للقارئ. ثم دع، جميع الطلبة، يشاركون في مناقشة المقاطع التي أعادوا كتابتها في مجاميع صغيرة، واترك الفرصة لكل مجموعة تقرر أي مقطع من المقاطع المطروحة للمناقشة هو الأكثر وضوحا.

1 كيف ستستجيب إلى التعليق الآتي، والذي طرح من تلميذ في أحد دروس الرياضيات "إننا لا نقوم بأية عملية حسابية داخل درس اللغة الإنجليزية، فلماذا نلجأ إلى الكتابة داخل درس الرياضيات؟"

2 اختر موضوعا قد قمت بعرضه أثناء تعليمك مادة الرياضيات في أحد الصفوف. قارن واعمد إلى توضيح المادة التي قد دونها طالب من الطلبة في السجل مع آخر قد أودعها في سجل يومياته حول نفس الموضوع الرياضي.

3 طلبت إحدى طالباتك مساعدة في تخطيط مقطع من شرح توضيحي تود تدوينه حول سلسلة فايبوناتشي Fibonacci Sequence، أو مثلث باسكال Pascal Triangle. تأمل الطالبة أن تقدم بحثها إلى مجلة الرياضيات بالمدسة لاحتمال الموافقة على نشرها. ما هي طبيعة المقترحات التي ستقدمها لهذه الطالبة؟

4 حددت مهمة حول كتابة بحث يستهدف شرح أحد دروس الرياضيات التي قمت بأعادها، تتدرج من الطالب

مراجع مقترحة Suggested References

- التحفيز Motivation**
Ames, Carole and Russell Ames, Eds. Research on Motivation. San Diego, CA: Academic Press, 1989.
Carr, Martha. Motivation in Mathematics. Hampton Press, 1995.
Henson, Kenneth T. Secondary Teaching Methods. Lexington, MA: D.C. Heath, 1981, 165 - 167.
Johnson, David R. Motivation Counts: Teaching Techniques That Work. Dale Seymour Publications, 1997.
LaConte, R. T. Homework as a Learning Experience. Washington, DC: National Education Association, 1986.
McEntire, Arnold, and Anita Narvarte Kitchens. "A New Focus for Educational Improvement Through Cognitive and Other Structuring of Subconscious Personal Axioms." Education 105, no. 2 (Winter 1984).
Orlich, Donald C., et al. Teaching Strategies: A Guide to Better Instruction. Lexington, MA: D. C. Heath, 1985, chap. 6.

- Sobel, M. A., and E. M. Maletsky. Teaching Mathematics, A Sourcebook of Aids, Activities, and Strategies, 2d ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice - Hall, 1988.
Stipek, Deborah J. Motivation to Learn: From Theory to Practice. Englewood Cliffs, NJ: Prentice - Hall, 1988.
Weinert, Franz, and Rainer Kluwe, eds. Metcognition. Motivation, and Understanding. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987.
Wlodkowski, R. J. Motivation. Washington, DC: National Education Association, 1986.

المساءلة Questioning

- Cangelosi, James S. "Increasing Student Engagement During Questioning Strategy Sessions." Mathematics Teacher 77 (1984): 470.
Costa, Arthur. "Teacher Behaviors That Enable Student Thinking." In Developing Minds: A Resource Book for Teaching Thinking. Arthur Costa, Ed. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development, 1985, 125 - 137.

- Fey, James T. *Patterns of Verbal Communication in Mathematics Classes*. New York: Teachers College Press, 1970.
- Gavelek, James, and Taffy Raphael. "Metacognition, Instruction, and the Role of Questioning Activities." Chap. 3 of *Instructional Practices*. Vol. 2 of *Metacognition, Cognition, and Human Performance*. D. L. Forrest - Pressley, G. E. MacKinnon, and T. Gary Waller, eds. Orlando, FL: Academic Press, 1985.
- Henderson, Kenneth B. "Anent the Discovery Method." *Mathematics Teacher* 50(1970): 287.
- Interactive Mathematics Program. *Introduction and Implementation Strategies for the Interactive Mathematics Program*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press, 1998.
- Kilpatrick, Jeremy. "Inquiry in the Mathematics Classroom." *Academic Connections*. New York: The College Board, Summer 1987.
- Orlich, Donald C., et al. *Teaching Strategies: A Guide to Better Instruction*. Lexington, MA: D. C. Heath & Co., 1985, pp. 161 - 200.
- Redfield, Doris, and Elaine Rousseau. "A Meta - analysis of Experimental Research on Teacher Questioning Behavior." *Review of Educational Research* 51, no. 2 (1981): 237 - 245.
- Swing, Susan, and Penelope Peterson. "Elaborative and Integrative Thought Problems in Mathematics Learning." *Journal of Educational Psychology* 80, no. 1 (1988): 54 - 66.
- Walsh, Debbie. "Socrates in the Classroom." *American Educator* (Summer 1985): 20 - 25.
- Wilen, W. W. *Questioning Skills for Teachers*. Washington, DC: National Education Association, 1987.
- _____. *Questions, Questioning Techniques, and Effective Teaching*. Washington, DC: National Education Association, 1987.
- Wolf, Dennis Palmer. "The Art of Questioning." *Academic Connections*. New York: The College Board, Winter 1987.
- Wong, Bernice. "Self - Questioning Instructional Research: A Review." *Review of Educational Research* 55, no. 2 (Summer 1985): 227 - 268.
- ### الاستراتيجيات الفعالة Effective Strategies
- Bauer, Madeline J., and Joseph P. Fagan. "MATHCOUNTS." In *Developing Mathematically Promising Students*. Linda Sheffield, Ed. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1999, 297 - 302.
- Bennett, Albert B., Jr., and Eugene Maier. "A Visual Approach to Solving Mixture Problems." *Mathematics Teacher* 89, no. 2 (February 1996): 108 - 111.
- Bezuszka, Stanley. *Tessellations: The Geometry of Patterns*. Creative Publications, 1977.
- Bidwell, James K. "Humanizing Your Classroom with History of Mathematics." *Mathematics Teacher* 86, no. 6 (September 1993): 461 - 464.
- Blank, Rolf K., Doreen Langesen, Marty Bush, Suzanne Sardina, Ellen Pechman, and David Goldstein. *Mathematics and Science Content Standards and Curriculum Frameworks*. Washington, DC: Council of Chief State School Officers, 1997.
- Boles, Martha, and Rochelle Newman. *Universal Patterns*. Pythagorean Press, 1990.
- Brandon, Paul R., Barbara J. Newton, and Ormrod W. Hammond. "Children's Mathematics Achievement in Hawaii: Sex Differences Favoring Girls." *American Educational Research Journal* 24, no. 3 (Fall 1987): 437 - 461.
- Britton, Jill, and Dale Seymour. *Introduction to Tessellations*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications 1989. Palo Alto, CA.
- Brookhart, Clint. *Go Figure! Using Math to Answer Everyday Imponderables*. Lincolnwood, IL: Contemporary Publishing Group, 1998.
- Coxeter, H. S. M. *Introduction to Geometry: 2nd ed.* New York: John Wiley & Sons, 1969.
- Crowley, Mary L. "Student Mathematics Portfolio: More Than a Display Case." *Mathematics Teacher* 86, no. 7 (October 1993): 544 - 547.
- Davis, Robert, Elizabeth Jocksuch, and Curtis McKnight. "Cognitive Processes in Learning Algebra." *Journal of Children's Mathematical Behavior* 2, no. 1 (Spring 1978).
- Dossey, John A., Ed. *Confronting the Core Curriculum: Considering Change in the Undergraduate Mathematics Major*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1998.
- Educational Psychologist* 23, no. 2 (Spring 1988).
- Ellis, Arthur K. "Planning for Mathematics Instruction." *Teaching Mathematics in Grades K - 8*, 2d ed. Thomas R. Post, ed. Boston: Allyn & Bacon, 1992.
- Geometry Center Hyperbolic Geometry Exhibit Welcome Page:
www.math.ubc.ca/~robles/hyperbolic/index.html. World Wide Web.
- Greenberg, Marvin Jay. *Euclidean and Non - Euclidean Geometries*. New York: W. H. Freeman, 1993.
- Gurkewitz, Rona, and Bennett Arnstein. *3 - D Geometric Origami*. New York: Dover Publications, 1995.
- Lefrancois, Guy R. *Psychology for Teaching*. 8th ed. Belmont, CA: Wadsworth, 1994.
- Leinhardt, Gaea, and Ralph T. Putnam. "The Skill of Learning from Classroom Lessons." *American Educational Research Journal* 24, no. 4 (Winter 1987): 557 - 587.
- Mathematical Sciences Education Board - National

- Research Council. High School Mathematics at work: Essays of Examples for the Education of All Students. Washington DC: National Academy Press, 1998.
- Mitchell, Julia H., Evelyn F. Hawkins, Pamela M. Jakwerth, Frances B. Stancavage, and John A. Dossey. Student Work and Teacher Practices in Mathematics. Washington, DC: National Center for Education Statistics, 1999.
- Mu Alpha Theta. www.mualphatheta.org.
- Owens, Douglas T. Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics. New York: Macmillan, 1993.
- Piez, Cynthia, and Mary H. Voxman. "Multiple Representations: Using Efficient Perspectives to Form a Clearer Picture." *Mathematics Teacher* 90, no. 2 (February 1997): 164 - 166.
- Reed, Stephan K., and Michael Ettinger. "Usefulness of Tables for Solving Word Problems." *Cognition and Instruction* 4, no. 1 (1987): 43 - 59.
- Riley, Mary S., and James G. Greeno. "Developmental Analysis of Understanding Language about Quantities and of Solving Problems." *Cognition and Instruction* 5, no. 1 (1988): 49 - 101.
- Schattschneider, Doris. *Visions of Symmetry: Notebooks, Periodic Drawings & Related Works of M. C. Escher*. W. H. Freeman, 1990.
- Sommers, Kay, John Dilendik, and Betty Smolansky. "Class Activities with Student - Generated Data." *Mathematics Teacher*, 89, no. 2 (February 1996): 105 - 107.
- Stigler, James W., and James Hiebert. *The Teaching Gap*. New York, NY: The Free Press, 1999.
- Swing, Susan R., Karen C. Stoiber, and Penelope L. Peterson. "Thinking Skills Versus Learning Time: Effects of Alternative Classroom - Based Interventions on Students' Mathematics Problem Solving." *Cognition and Instruction* 5, no. 2 (1988): 123 - 191.
- Takahira, Sayuri, Patrick Gonzales, Mary Frase, and Laura H. Salganik. *Pursuing Excellence: A Study of Twelfth - Grade Mathematics and Science Achievement in International Context*. Washington, DC: National Center for Education Statistics, 1998.
- Venters, Diana, and Elaine Krajczek Ellison. *Mathematical Quilts*. Key Curriculum Press, 1999.
- Zhu, Xinming, and Herbert A. Simon. "Learning Mathematics from Examples and By Doing." *Cognition and Instruction* 4, no. 3 (1987): 137 - 166.
- Writing Strategies استراتيجيات الكتابة**
- Azzolino, Aggie. "Writing As a Tool for Teaching Mathematics: The Silent Revolution." 1990 Yearbook, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1990.
- Barnes, Julia A. "Creative Writing in Trigonometry." *Mathematics Teacher* 92 (September 1999): 498 - 503.
- Becker, Jerry P., and Shigeru Shimada. *The Open - Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1997.
- Countrymen, Joan. "Writing to Learn Mathematics." In *Functions*. Princeton, NJ: Woodrow Wilson National Fellowship Foundation, 1985.
- Davison, David M., and Daniel L. Pearce. "Using Writing Activities to Reinforce Mathematics Instruction." *Arithmetic Teacher* 36 (1988): 42 - 45.
- Dougherty, Barbara J. "The Write Way: A Look at Journal Writing in First Year Algebra." *Mathematics Teacher* 89 (October 1996): 556 - 560.
- Elliot, Portia C., Ed. *Communication in Mathematics, K - 12 and Beyond*. 1996 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1996.
- Elliot, Wanda Leigh. "Writing a Necessary Tool for Writing." *Mathematics Teacher* 89 (February 1996): 92 - 94.
- Evans, Christine Sobray. "Writing to Learn Math." *Language Arts* 61 (December 1984): 828 - 835.
- Goldberg, Dorothy. "Integrating Writing into the Mathematics Curriculum." *The Two - Year College Mathematics Journal* 14 (November 1983): 421 - 424.
- Havens, Lynn. "Writing to Enhance Learning in General Mathematics." *Mathematics Teacher* 82 (October 1989).
- Hurwitz, Marsha. "Student - Authored Manuals As Semester Projects." *Mathematics Teacher* 83 (December 1990): 701 - 703.
- Keith, Sandra. "Exploratory Writing and Learning Mathematics Classroom." *Mathematics Teacher* 81 (December 1988): 714 - 719.
- Le Gere, Adele. "Collaboration and Writing in the Mathematics Classroom." *Mathematics Teacher* 84 (March 1991): 166 - 171.
- Macintosh, Margaret E. "No Time for Writing in Your Class?" *Mathematics Teacher* 84 (September 1991): 423 - 433.
- Mett, Coreen L. "Writing As a Learning Device in Calculus." *Mathematics Teacher* (October 1987): 534 - 537.
- Miller, L. Diane. "Writing to Learn Mathematics." *Mathematics Teacher* 84 (October 1991): 516 - 521.
- Nahrgang, Cynthia L., and Bruce T. Peterson. "Using Writing to Learn Mathematics." *Mathematics Teacher* 79 (September 1986): 461 - 465.
- Powell, Arthur B. "Capturing, Examining and Responding to Mathematical Thinking Through Writing." *Clearing House* 71, no. 1, (September - October 1997): 21 - 25.
- Pugalee, David, "Promoting Mathematical Learning

- Through Writing." *Mathematics in School*, no. 1, Jan. 1998: 20 - 22.
- Pugalee, David K. "Connecting Writing to the Mathematics Curriculum." *Mathematics Teacher* 90 (April 1997): 308 - 310.
- Robinson, Donita. "Student Portfolios in Mathematics." *Mathematics Teacher* 91 (April 1998): 318 - 325.
- Schmidt, Don. "Writing in Math Class." In *Roots in the Sawdust: Writing to Learn Across the Disciplines*, Anne Ruggles Gere, Ed., Urbana, IL: National Council of Teachers of English, 1985, 104 - 116.
- Self, Judy. "The Picture of Writing to Learn." In *Plan Talk About Learning and Writing Across the Curriculum*. Richmond, VA: Virginia Department of Education, 1987.
- Socha, Susan C. "Math Class Logs." *Mathematics Teacher* 82 (October 1989): 511 - 513.
- Williams, Nacy B., and Brian D. Wynne. "Journal Writing in the Mathematics Classroom: A Beginner's Approach." *Mathematics Teacher* 93 (February 2000): 132 - 135.

The Role of Problem Solving

منذ سنين عدة برز موضوع حل المسائل بوصفه أحد الأمور التي تستأثر باهتمام بالغ في جميع مستويات الرياضيات المدرسية أشار المجلس الوطني لخبراء الرياضيات (The National Council of Supervisors of Mathematics NCSM) إلى "أن تعلم حل المسائل هو المهر الأساسي لدراسة الرياضيات" (NCSM, Position Paper on Basic Mathematical Skills, 1977) لم تتغير هذه المقولة المنطقية كثيرا في هذه الأيام، بل أصبحت مسألة ومطلبا أكثر إلحاحا من السابق. وقد عبر المجلس الوطني لدرسي الرياضيات (NCTM) بعبارة واضحة في "مبادئ ومعايير لرياضيات المدرسة" (NCTM, 2000) بأن "حل المسائل ليست الهدف الوحيد لتعلم الرياضيات فحسب، ولكنها أداة أساسية من أدواتها". وقد ذهب المجلس بعيدا في هذا الشأن بحيث ذهب إلى القول بأن "استراتيجيات حل المسائل قد تم تعلمها مع مرور الوقت، وطبقت في سياقات محددة، فأصبحت أكثر تهديبا، واشد إككاما، ومرونة نتيجة لتعدد استخداماتها في مسائل ومواقف معقدة". ولقد أصبحنا، بالحقبة، على اتفاق شبه تام، بأننا قادرين على أن نخطو خطوة إضافية، بحيث نستطيع القول بأن حل المسائل هي ليست مهارة ينبغي تدريسها وتوظيفها في ميدان العلوم الرياضية، ولكنها منطق محكم يصلح لأن يوظف في تجاوز "المشاكل" اليومية التي تعترضنا على أرض الواقع، أو عند صنع القرار في مختلف الأنشطة، لذا فإنها ستسهم، دون شك، في خدمة الإنسان طيلة فترة حياته!

وهذا هو بالحقبة الموضوع الأساسي الذي سنتبناه طيلة رحلتنا مع مفردات هذا الفصل وفقراته المختلفة.

في حالات متعددة، يبدو بأن الطلبة يظنون (نتيجة لقلة خبرتهم وعدم كفايتها) بأن المسألة يمكن أن تحل بطريقة واحدة فحسب، وعلى وجه الخصوص، "النوع" الذي تمت دراسته داخل الصف المدرسي (يعني مسائل الحركة، ومسائل العصر، ومسائل المزيج، وهكذا).

ويشعر الطلبة، في أحيان كثيرة، بأن المعالجة الجبرية هي الوسيلة الوحيدة التي تنتج بالوصول إلى حل صحيح.

بيد أن التطورات التقنية المذهلة، خلال الأعوام القليلة الماضية، قد أحدثت تغييرا ملموسا في طريقة معالجتنا وزاوية منظورنا صوب الرياضيات، بحيث أصبح منظورنا السابق مهجورا وبحاجة إلى إعادة جوهريّة في صياغاته.

فالكثير من أدلة المنهج الدراسي للولايات، بدأت الآن تشجع الطلبة على التفكير "خارج الصندوق" الذي أسرتنا فيه المعالجات القديمة". وتحت هذه الظروف المستحدثة فإن الحل الجبري لمسألة ما لم يعد الحل الوحيد أو الإجراء المقبول، ولا الحل الذي يستخدم أنماطا مدركة، أو ذاك الذي ينشأ عن مخطط رسومي. وسيعرض هذا الفصل رسوما توضيحية لحلول متعددة.

في بعض الأحيان، لا يكون المعلمون على إدراك تام بالعدد الكبير من استراتيجيات حل المسائل، التي يمكن استخدامها للحصول على حلول فعالة ورائعة لكثير من المسائل الشائعة. فيقوم هؤلاء - دون قصد- بنقل مفهوم القائل "يعدم وجود سوى حل فريد للمسألة باستخدام المنهج الجبري" إلى

طلبتهم. في حين أننا نتفق على أن الجبر هو أحد الأدوات الأكثر فاعلية، وأنه لا زال طريقاً من بين حشد كبير من الطرائق التي ينبغي أن يأخذها الطلبة باعتبارهم عندما يتقنون عن حل ناجح لمسألة ما. لقد صمّم هذا الفصل للمعلم في أثناء الخدمة In Service، أو من يرغب بأن يكون في ملك الخدمة قريباً، والذي يمتلك رغبة صادقة في مساعدة الطلبة على السير باتجاه أن يكونوا ممن يحل المسائل الرياضية وما وراءها بنجاح وتميز.

سوف نقوم باختيار عشرة استراتيجيات، تستخدم على نطاق واسع بميدان حل المسائل في كل من الرياضيات وصنع القرارات في الحياة اليومية، أو مواقف حل المسائل المختلفة.

وستوفر هذه الاستراتيجيات، داخل قاعة الدرس، خطة بديلة لحل مجموعة من مواقف المسألة والتي تنشأ خلال المنهج الدراسي المقرر. لقد بالغنا في اختيار مسائل منتقاة لتوضح هذه الاستراتيجيات، متوقعين بأن المعلمين سوف يستمتعون بالأمثلة الموضحة، ثم سيشارون في تطبيق هذه الاستراتيجيات في برنامجهم التدريسي المنتظم.

ولتحقيق ذلك، فإن نوصي باستعراض ودراسة الأمثلة الخاصة بكل استراتيجية، بمثابة، بحيث تصبح الاستراتيجية جزءاً لا يتجزأ من عمليات التفكير لدى المعلم، أو يمكننا القول، بأن تكون جزءاً مركزاً ونشطاً للأدوات المستخدمة في حل المسائل.

لقد نص المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM) في مبادئ ومعاييرها الخاصة بالرياضيات المدرسية (2000) على أنه "حالياً يصل الطلبة إلى المراحل المتوسطة، ينبغي أن يكونوا ماهرين بتمييز متى تكون مجموعة الاستراتيجيات المطروحة مناسبة للاستخدام، وأن يكونوا قادرين على حسم موضوع: متى، وأين، وكيف يمكن استخدامها.

في المدارس الثانوية، ينبغي أن يكون الطلبة على احتكاك دائم بجملة واسعة من الاستراتيجيات، وقادرين على اختيار الاستراتيجية المناسبة للمسألة، وقادرين على تكييف وإبداع استراتيجيات". كيف سنستطيع الوصول إلى هذه الأهداف المقصودة، هو هدف هذا الفصل، والغاية التي يصبو إلى تحقيقها على أرض الواقع.

على الرغم من أن حل المسائل يمكن حلها باستخدام تقانات التجريب - و - الصدق - Tried and True - للجبر والهندسة (وقد قمنا بعرض هذه الحلول أيضاً)، فإن المنهج الميكانيكي البحت يمتاز بالكفاءة، والجمال، والأناقة التي تتصف بها الرياضيات. وفي حالات كثيرة، تم عرض استراتيجيات حل المسائل كطرائق بديلة تسهم في جعل حلول المسائل أكثر سهولة، وأكثر دقة وصفاً، وأقرب كثيراً من حدود الفهم، وعليه ستكون أكثر إمتاعاً!

حاولنا، خلال الفصل، أن نظهر للمعان كيف يزغرت كل من هذه الاستراتيجيات وكيفية استخدامها في مواقف الحياة المختلفة. وقد نرى بين الحين والآخر أناس يوظفون بعض أو جزء كبير من هذه الاستراتيجيات في اتخاذ قراراتهم العادية دون أن يكون لديهم أية دراية بها.

إن هذا الانتقال إلى الحياة - خارج - المدرسة - Life - outside - of - The - School سيضيف أهمية ملموسة للرياضيات التي يتناولها الطلبة بالدراسة، وسوف يحسن أدائهم اليومي بشكل كبير.

حاول أن تترك وتؤمن بأن حل المسائل هو حجر الزاوية لكل برنامج رياضي ناجح، بمدى بادر إلى محاولة غرس أحاسيس ومواقف متحمسة حولها في برنامج تعليمك اليومي. إن هذا الجهد المركز سيجعل منك أكثر قدرة على حل المسائل، وبالتقابل، سيساعد على جعل طلبتك يسيرون على طريقك واستحقاقهم بجدارة لقب أفضل من يحل المسائل.

ولن يكون التحمن لديهم مقتضراً على مواقفهم إزاء الرياضيات، بل سيشمل مهاراتهم، وقابلياتهم أيضاً. ينبغي أن يكون هذا الأمر هو الهدف الأسمى لديك.

ويجب أن لا يغيب عن بال أحدنا أهمية المفردات العلمية والموضوعات التي تم تدريسها، فبناء قاعدة صلبة لفهم وإدراك الرياضيات - هو بلا شك المهمة الملقة على عاتق جميع معلمي الرياضيات - وسيتبقى هدفاً أساسياً. لقد رأينا بأن المنهج الموضوعي، لتعليم الرياضيات بصورة جيدة، سيتكامل بالتركيز على حل المسائل طوال برنامج التدريس. وينفس هذا المنهج والروحانية سيتم عرض موضوع حل المسائل في هذا الفصل.

هناك الكثير من الجوانب التي ترتبط بوشائج متينة مع حل المسائل، أحدها المنظور النفسي لمسألة حل المسائل، وكيف يدنو المرء من واقع المسألة وملابساتها، وكيف تؤثر الخصائص النفسية له أولها على أسلوب المعالجة والنجاح في حلها، وطبيعة الدور الذي تسهم به عملية حل المسائل. سنحاول أن نستكشف هذه العوامل المؤثرة على حل المسائل بحيث يكون المعلم على اطلاع ودراية تامة بهذه المؤثرات، فيستطيع التغلب على المشكلات التي تواجه الطلبة، ويقترح طرائق مناسبة للعلاج. إن حل المسائل مورد خصب ولا ينضب، وأداة مناسبة لإثراء مادة الرياضيات وزيادة خصوبة بيئة التعليم.

والمسائل التي تثير روح التحدي، في كثير من الأحيان تلك التي تمتاز بكونها "ذات مسار بعيد عن المألوف" of the beaten Path، وقد تؤدي إلى تحريات أكثر متعة في مواضيع رياضية تقيم خارج المنهج الدراسي التقليدي، كما أنها ستلعب دوراً مهماً بوصفها فرصة ثمينة لشحن ذهن وتحريك آلة الفكر. ينبغي أن يكون معلوم الرياضيات على استعداد دائم لتوفير بعض المواد المناسبة للطلبة النابهين والتميزين، دون أن يفقدوا الاهتمام بالطلبة ذوي القابليات المحدودة، والذين سيفقدون من المسائل التي تذكي روح التحدي داخل الصف.

سنعرض في هذا الفصل لكثير من الآراء التي تتوجه صوب هذه الغاية مع أمثلة توضيحية تشد أزرها وتعمق فهمها.

طبيعة حل المسائل The Nature of Problem Solving

إن خصائص مكونات الفكر، العمليات الحسية والعمليات الشكلية، تبدو واضحة للعيان من خلال آلية التفكير السائدة في حل المسائل الرياضية. يستطيع الطالب العملي أن يرتب وينظم الأمور التي تعرض مباشرة، بينما يعجز عن تمييز، أو إدراك، أو تقييم الأمور التي تقع في دائرة الإمكان. ولن يكون هذا الطالب قادراً على تمييز خصائص ومميزات الموقف الذي تختص به المسألة عندما يعان بنيتها. إن طالب العمليات الحسية لن يكون قادراً على توسيع المعالجة العقلانية لفرضية لا ترتبط بعمر وثيقة مع أرض الواقع الصلبة.

أما طلبة العمليات الشكلية Formal، فلهم القدرة على التعامل مع الفكر الافتراضي، والمقاييس المنطقية - الاستدلالية لقضية من القضايا. كما أنهم قادرين على إنشاء جميع الارتباطات الممكنة للأشياء، وتمييز وعزل المتغيرات عند تحليلهم لموقف تتسم به مسألة ما.

تستخدم هذه الفئة من الطلبة استراتيجيات أكثر كفاءة من تلك التي يستخدمها الطلبة المعلومون، من أجل هذا فهم أفضل بكثير في ضوء متطلبات حل المسائل. وهم ميلون إلى توظيف عدد أكبر، وأكثر تنوعاً من العمليات التي يحاولون توجيهها صوب الهدف المطلوب، بالمقارنة مع طلبة العمليات الحسية. إن طلبة العمليات الشكلية قادرون على: رسم أشكال تخطيطية، وصياغة معادلات، وإنشاء علاقات مفتاحية Key Relationships، واستدعاء حقائق، وأمر أخرى تمد جميعها مهارات عقلية لها القدرة على إنتاج حلول ملائمة.

لقد أظهرت الدراسات، التي اهتمت بهذه الشريحة من الطلبة، بأنهم يستخدمون مجموعة متنوعة من العمليات، ويشارون استدلالات عقلانية أكثر عمقا، وتقييماً لاحقاً لهذه الاستدلالات، من جانب

آخر فإن الشريحة الثانية من الطلبة، تبذل مزيداً من الجهود، وتجد صعوبة بالغة في حل مسائل بسيطة.

إن شريحة طلبة العمليات الشكلية تمتلك القابلية على إنجاز أفضل للمسائل البسيطة والمعقدة في آن واحد. بالرغم من عدم كفاية البحوث التي عالجت موضوع تأثيرات مستوى التقدم والنمو على أداء حل المسائل، فإنه لا تزال هناك إمكانية لمباشرة استدلالات منطقية بهذا الاتجاه.

وكما ازداد الطلبة نضوجاً، فإنهم سيصبحون أكثر قدرة على تنظيم أفكارهم، بحيث يدخلوا في حساباتهم أكثر من متغير عند مباشرة حل المسائل. إن الاستدلال المنهجي، والتقريب المتعاقب هي أكثر الاستراتيجيات التي تكثر ملاحظتها كلما تطور إدراك الطالب وتعمقت معرفته.

إن هذه الخصائص تمتلك مضامين متنوعة تغد في المناهج المعتمدة بتدريس حل المسائل. ويمكن إعداد بضعة اقتراحات للمنهج الدراسي والتي ستساعد الطلبة على تطوير وإنماء قابلياتهم.

إن من واجب المعلمين السعي باتجاه تنمية مهارات حل المسائل لدى جميع طلبتهم، سواء كانوا من فئة العمليات الحسية أو الشكلية. وينبغي أن يباشروا عملية بناء تركيز إلى الإمكانيات التي يبدونها طلبة هاتين الفئتين، مع إدراك تام لطبيعة العجز الذي يصاحب أنشطة: تنظيم، واختيار المنهج المناسب، أو تطبيق آليات حل المسائل بمهارة وإتقان، وخصوصاً، عندما تتضمن المسألة متغيرات متعددة، أو علاقات متشابكة. إن المناهج المطلوبة لسد الفجوة المقيمة بين الحدس والعمليات الصورية هي تلك التي تساعد على تنظيم البيانات والعلاقات لأغراض العمليات المنهجية.

يضاف إلى ذلك، ينبغي تشجيع الطلبة على استخدام التخمين الذكي والاختبار، أو محاولة العمل على الاستراتيجية التي يميلون إلى توظيفها في حلهم. بهذه الطريقة، يمكن استيعاب وهضم المزيد من الاستراتيجيات المنظمة والفعالة، بصورة طبيعية، بناء على الفهم الدرك بالحدس أو الذاكرة، أو عمليات التخطيط التي يستطيع استخدامها الطالب على أرض الواقع.

ستتوفر لنا، بمرحلة لاحقة من هذا الفصل، فرصة مناسبة لتفحص جملة كبيرة من استراتيجيات حل المسائل، والتعامل معها بأسلوب يعمق فهمنا بمفرداتها ويرسخ مهارات إضافية على طريق توظيفها في العملية التعليمية.

هناك أسلوبان مناسبان لاختيار المسائل، والتدريس في حقل حل المسائل. الأسلوب الأول يركز على اختيار المهام التي تتطلب استخدام وتطبيق طرائق محددة. أما الأسلوب الثاني فيميل إلى اختيار المهام التي تتطلب فكراً حدسياً وخلاقاً وتسهم في تطوير قابليات حل المسائل العامة.

وهناك الكثير من الأمثلة على مسائل رياضية في أعمال مساق المدرسة الثانوية المتعاد، يمكن استخدامها في تنمية الإبداع وملكة الحدس لدى الطلبة.

إن جل محتويات رياضيات المدرسة الثانوية المتعاد يمكن أن تعلم مع أسلوب حل المسائل. ويعد كثير من المعلمين، هذا الأمر، من الموضوعات المستحدثة، والتي تتطلب خبرة، وجهداً مضافاً، ومزيداً من التخطيط والتهيئة. يستطيع المدرسون البدء بتوجيه الطلبة للعمل على مسائل تؤدي حلولها إلى تحريات إضافية في المسار الذي يبتغيه المساق الدراسي، فينشأ عن ذلك تعميق في حب الاستطلاع، ويكون حافظاً على الدراسة اللاحقة.

إن المعلمين الذين يميلون إلى متابعة حل المسائل من أجل ذلك فحسب، ينبغي أن يتحوا لطلبهم فرصة العمل على أزواج من المسائل التي تتشابه في هيكليتها، وتتضمن مهاماً متماثلة. كما أن من المفيد للطلاب أن يلجأ إلى تنمية الذاكرة لاحتواء المسائل، ويمتلك خبرة بجملة واسعة من هيكليات المسائل.

· إن بعض النشاطات المفيدة قد تتضمن ما يأتي:

1- دع الطلبة يختارون من الزوج الثاني من المسائل، تلك التي تشابه الزوج الأول.

2- اطلب من الطلبة كتابة مسألة تحوي على نفس هيكلية العلاقات كما في الزوج الأول.

3- قم بتعميم بيانات وحل الزوج.

إن مثل هذه التمارين مع تمييز المسألة وترتيبها ستتيح للطلبة فرصة فحص العملية الشاملة لحل المسائل بحيث أن أنموذج ما وراء الإدراك Metacognition سيساعد على تطوير حساسية حل المسائل. إن هذا الأنموذج سيعمق، ببساطة، الوعي بالحاجة إلى مهارات حل المسائل والأهمية الخاصة التي تمتاز بها. ستعالج، في هذا الفصل أيضاً، موضوع حل المسائل من منظور نفسي، مع رغبتنا بتدعيم وإثراء استراتيجيات محددة لحل المسائل، تمتاز ببساطتها وسهولة استدعائها. كما سنقوم أيضاً بتفحص بضعة أمثلة على مسائل تحتوي على دعوة مفتوحة للمزيد من حل المسائل، وفهم أعمق المفاهيم الرياضية.

بالرغم من عدم اندراج معظم خصائص حل المسائل ضمن هذا الترتيب المنطقي، فإن تحليل ديوي لعملية التفكير في حل المسائل لم يواجه أية تعديلات أو تحسينات مقترحة لغاية هذا التاريخ. لاحظ بأن هذا التحليل يتضمن كل من الجزء، المأخوذ من المعلومات المستلم منها، والتعلم الاكتشافي Discovery Learning في سياق عمليات مترابطة - والتي يكون المتعلم فيها مشاركاً فاعلاً بعملية تعلمه الذاتي. ووفق التعاريف السائدة في الرياضيات، يعد عمل جورج بوليا George Polya في كتابه "البحث عن الحل How To Solve It" (Princeton University Press, 1945) عرضاً لتقانات حل المسائل التي لا تقتصر على كونها ممتعة ومشوقة، ولكنها تهدف إلى ضمان بأن المبادئ التي تم تعلمها من الرياضيات سوف تنتقل على نحو واسع وعريض قدر الإمكان.

أطلق على تقانات اصطلاح البحث الموجه (الهيوريستيكا) Heuristic (محاولة للكشف)، وهي استراتيجيات تساعد على حل المسائل. ولقد ذهب إلى القول بوجود "مقدار ضئيل من الاكتشافات" في حل أية مسألة. "قد تكون مسائلك متواضعة لكنها إذا شكلت تحدياً لحب الاستطلاع لديك، وحملت أدوات البدعة على العمل، وإذا استطعت حلها بالتمسك لديك، فأنك قد تعاني من التوتر، وستبتلع بلذة الاكتشاف".

لقد اقترح بوليا طرائق البحث الموجه الآتية:

- 1- حاول أن تفهم المسألة. ما هو الشيء المجهول؟ ما هي البيانات؟ ما هو الشرط؟ أرسم شكلاً تخطيطياً، وضع مجموعة الرموز. وقم بعزل أجزاء الشرط.
- 2- ابتكر خطة، وحاول أن تجد الارتباطات القيمة بين البيانات والمجهول. هل شاهدت مثلاً من قبل؟ وهل تعرف مسألة مشابهة؟
- 3- باشر بتنفيذ الخطة، وقم بتفحص كل خطوة. هل تجد

حل المسائل: رؤية نفسية

A Psychological View of Problem Solving

تتضمن حل آليات حل المسائل بعض أشكال المعلومات (مدركات حسية Perceptual، أو وظيفية Physiological، أو وحسية Sensory) مع توظيف مناسب لهذه المعلومات للوصول إلى حل مقبول.

عند أخذنا بنظر الاعتبار مسألة الفروق الفردية، نجد في التنمية كما هو الحال في تنوع المحتوى، ومستويات التعقيد لحالات المسائل المختلفة، وجود صعوبة ملحوظة في الكشف عن حل بسيط، ومنفرد في دائرة حل المسائل (إذا تجاوزنا عن ذكر الأدوات أو الوسائل). منذ عام 1910، حدد جون ديوي John Dewey، في كتابه "كيف نفكر How We Think" (Boston: D. C. Heath) خمسة خطوات لحل المسائل. وسنعرضها وفق الترتيب الآتي:

- 1- الإدراك بوجود المسألة (إدراك الصعوبة، والإحساس بالإحباط والفشل، أو التعجب، أو الشك).
- 2- تعيين المسألة - التوضيح والتعريف، ويتضمن بيان الهدف الذي ننشده، في ضوء تعريفه وفق الحالة التي تخففت عنها المسألة.
- 3- توظيف الخبرات السابقة، مثل معلومات وثيقة الصلة بالمسألة، أو حلول سابقة، أو أفكار تقيد في إنشاء فرضيات، وقضايا تتعلق بحل المسألة.
- 4- فحص الفرضيات والحلول المحتملة، على التوالي، وإعادة صياغة المسألة إذا اقتضى الأمر ذلك.
- 5- تقويم الحلول واتخاذ قرار يستند إلى القرائن. ويتضمن ذلك، دمج الحلول الناجحة في ضوء الفهم الحالي، وتطبيقه في مراحل أخرى من المسألة ذاتها.



1. دعنا نحاول إيجاد جواب السؤال الدقيق: كيف تستطيع أن تجلب من النهر، ستة كوارتات Quarts بالضبط، من الماء إذا كان لديك وعاءان فقط، أحدهما دلو سعته أربعة كوارتات، والدلو الثاني سعته بستة كوارتات، ولا يحوي أي منهما على قياس؟

يبدأ فوراً بتصوير الدولون بدون أية علامة قياس (كما ذكرت المسألة). [بمعناها] لا نعلم لغاية هذا الوقت كيف سننجح في قياس ستة كوارتات بدقة، ولكن، هل نستطيع أن نقيس شيئاً آخر؟ (إذا لم نستطع حل المسألة المقترحة، حاول أن تحل - في البداية - مسائل مشابهة. وهل تستطيع أن تشق أمراً مفيداً من هذه الهينات؟) [لاحظ المعلم بأن معظم الناس، عندما يواجهون بلغز a Puzzle، يعملون قدماً، محاولين هنا وهناك، ومستعدين للمثابرة].

2. لا يضع الناس (ممن يمتلكون قدرات استثنائية) أو الذين توفرت لديهم فرصة كافية للتعلم في الرياضيات الصعبة شيئاً يزيد على العمليات التقليدية، وقتاً كبيراً في مثل هذه المحاولات، وسيفيرون من مسارهم فيعملون بالطريقة المعاكسة (ذكر بايلو بأن الرياضي اليوناني بابوس Pappus قد أعطى وصفاً مهما لهذه الطريقة - راجع وحدة إثرائية 93 "حل المسائل: الاستراتيجية المعاكسة").

ماذا ينبغي علينا عمله؟ وما هو المجهول؟ دعنا ننصوّر الحل النهائي بأكبر وضوح ممكن. ودعنا نتخيل بأنه يوجد لدينا في هذا المكان 6 كوارتات، بالضبط، في الوعاء الكبير، وأن الوعاء الصغير فارغ. (دعنا نبدأ من نقطة المطلوب، ونفترض بأن ما نبحث عنه هو موجود فعلاً، يقول بابوس [Polya, 198-199 pp.] شرع بوليا بتوضيح الخطوات اللاحقة في حل المسألة. وقد طرح سؤالاً "من أي سابقة Antecedent يمكن أن نشق النتائج المطلوبة؟"، وقل إذا كان الوعاء الكبير ممتلئاً تماماً، وقد تم سكب ثلاثة كوارتات منه، بالضبط، يمكننا أن نتجز النتائج. كيف يمكن أن نصل لذلك؟ حسناً، إذا بقي كوارت واحد فقط بالوعاء الصغير، إذن ينبغي أن نسكب ثلاثة بالضبط.

("دعنا نبحث في كم سيكون لاحق لاحقاً؟"). لاحظ بأن هذا الأمر قد يحصل مصادفة، مهما حدث سابقاً.

بأن كل خطوة صحيحة؟ وهل تستطيع البرهنة على صحتها؟

4- انظر إلى الوراء، واختبر الحل الذي توصلت إليه. هل تستطيع فحص النتائج بطريقة أخرى، هل تستطيع أن تراها على عجل؟ وهل تستطيع استخدام النتائج، أو الطريقة في مسائل أخرى؟

كشفت دراسة، في عام 1974، بأن المعلمين ينزعون بشكل عام إلى الاستجابات الاستظهارية باستثناء 5% من الصفوف الدراسية التي تمت مشاهدتها. وأن مثل هذا النوع من طرائق التعليم ينزع إلى تمييز التفكير المؤلف - الجامد - كما وأن التفكير المحدد Set Thinking يتعارض مع تقانات حل المسائل الأكثر فاعلية.

على سبيل المثال، اختبر سلسلة المسائل التي عرضها السيدين ليوشينز Luchins & Luchins في كتابهما الموسوم "جمود السلوك Rigidity of Behavior" (University Of Orgopness, 1959) تم تزويد الطلبة بالجدول الآتي، وطلب منهم حل كل مسألة تتعلق بجرار الماء Water Jars. بعد إعطائهم معلومات عن سعات Capacities الجرار الثلاثة، وطلب منهم احتساب كمية الماء المطلوبة في العمود الرابع من الجدول. (تم إدراج ثلاثة مسائل فقط من المسائل السبعة والتي أدرجت بالجدول الآتي).

رقم المسألة	سعة جرة الماء (Quarts)			الكمية المطلوبة (Quarts)
	A	B	C	
1	29	3	0	20
4	18	43	10	5
7	23	49	3	20

في كل من الحالات الستة الأولى، تم تعبئة الجرة الأكبر لحين امتلائها تماماً، ثم يوشر بتفريغها في الجرار الأصغر حجماً لحين الحصول على الكمية المطلوبة. وقد حاول، معظم الطلبة، حل المسألة السابعة بنفس الأسلوب، حتى عند تحذيرهم بضرورة "النظر بإمعان".

عرض بوليا جوانب متعددة لحل المسائل الرياضية، من الاستقراء Induction إلى المعالجة المعاكسة Working Backward.

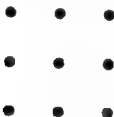
دعنا نوضح، بالتفصيل، منهجه بالتعامل مع مسألة مشابهة لتلك التي نوقشت قبل قليل، والتي قام بعرضها لتوضيح آلية المعالجة المعاكسة.

ستظهر بسرعة. فالأمر ليس باليساسة التي قد يتوهمها البعض، بالتنقل السريع بين عدد وآخر على الشكل، لأن الموقف النفسي سيولد انطبعا لدى الطلبة بأن الرقم اللاحق يمتلك نفس مقياس الرقم السابق.

ولن يفلح الطلبة في تجاوز الموقف النفسي الموم ما لم يدركوا حقيقته ويتجنبون - بوعي وإدراك تام - البحث عن أرقام بحجوم متساوية، الأمر الذي سيتيح لهم بالتنقل بين الأعداد، وفق التعاقب المطلوب، بسرعة أكبر.

يمكن أن تنشأ أعراض متلازمة Syndrome - مشابهة مع المسألة الآتية.

مسألة **PROBLEM** باستخدام أربعة خطوط مستقيمة فقط، اربط بين النقاط التسعة الآتية، دون أن ترفع قلمك عن الورقة، أو إعادة الرجوع على نفس الخط المستقيم.



إن معظم الطلبة سوف يبدأون بإحدى المحاولات الآتية:



إن المحاولات الأخرى - المشابهة ستبوء أيضاً بالفشل. للتغلب على هذا الموقف النفسي، ينبغي تشجيع الطلبة على إبطال المحاولات الفاشلة. وسيجد الطلبة بأن البدء من إحدى النقاط والبقاء داخل مصفوفة تتألف من تسعة نقاط هي محاولة لن تنظر بالنجاح. ولإبطال هذه المواقف النفسية يشجع الطلبة على إلغاء المحاولات الفاشلة. ويرون أن البدء من نقطة واحدة وإبقاء في نفس المصفوفة المكونة من تسعة نقاط أمر غير مجد. ولإبطال هذا الموقف النفسي قل "لا تتحددوا بالمصفوفة فحسب، وبدلاً من ذلك تأملوا قطعة الخط المستقيم التي تقع، جزئياً، خارج المصفوفة".

إن هذا النهج سيوفر عن الحل المطلوب كما يظهر أدناه:

مما لا شك فيه، إن قيامنا بسكب أربعة كوارثات من الوعاء الكبير مرتان على التعاقب، "نصل في آخر الأمر إلى شيء معروف مسبقاً (هذه هي كلمات بياوس). ويتابع منهج التحليل، العمل بطريقة معاكسة، قد اكتشفنا التعاقب المناسب للمعاملات".

ولما كان بوليا معلماً بارعاً فقد استخدم تقانات حل المسائل التي تتضمن كل من التعلم الجمعي والمبتصر. وقد أضاف جزءاً مقوما Ingredient للحماسة الشخصية Personal Enthusiasm اموضوعه، واحتراماً لقابليات طلبته.

قد نطلب أكثر مما يفعله مدرس في أي موضوع - والذي تم إعلانه، استخدم هذه المعلومات بأسلوب ماهر ومحبك، وبالمشاركة مع الطلبة، مع توفير فرصة مناسبة أمامهم: لاستكشاف، وتحليل، وتوضيح مهاراتهم.

تمهيدات حل المسائل

Problem Solving Preliminaries

حالما نبدأ مناقشتنا لحل المسائل في الصف، تظهر الحاجة إلى أن نأخذ بعين الاعتبار بعض القواعد الأساسية.

بصورة عامة، يتخذ الطلبة موقفاً نفسياً محدداً عندما يدنون من مسألة ما، وذلك بسبب توقعهم لحلول عديدة بسيطة للمسألة، وعندما يظهر شيء صعب كجواب محتمل لها، يشكك الطلبة في معلمهم فيعيدون المحاولة مرة ثانية.

إن الموقف النفسي للطلبة قد يظهر جلياً وبطريقة مثيرة. تأمل الأمثلة الآتية:

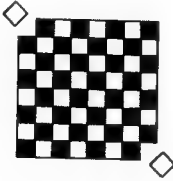
مسألة **PROBLEM**

أشّر إلى كل من الأعداد المبينة في الشكل الآتي وبترتيب متتابع، مبتدئاً بالعدد 1، وبأسرع وقت ممكن^(*).

15	11	26	34	17	23	18
	28			16	9	2
4	30	39		22	3	18
17				10		
6	32	24	8	37	20	7
				29	1	33
10	19	35		11	14	40
	21			27		12

عندما يباشر الطلبة بهذا التحدي، الذي قد يبدو سهلاً للوهلة الأولى، سيجدون بأن بوادر خيبة الأمل ومعالم الفشل

(*) اقترحت هذه المسألة بواسطة البروفيسور بريجيت روليت Brigitte Rollette من جامعة فيينا (النمسا).



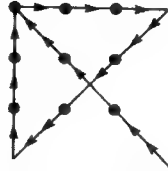
تظهر الخبرة بأن معظم الطلبة سيميلون إلى البدء بتظليل أزواج المربعات لأجل إكمال النمط المطلوب لحل المسألة. بيد إن هذه المحاولة لن يكتب لها النجاح. إضافة إلى ذلك، فإنها ستتمخض عن موقف يتسم بالفوضى، وبالأخص، إذا استخدم الطالب مادة الحبر، بدلا من قلم الرصاص، في حل الرياضيات.

ينبغي تشجيع الطلبة على إعداد قائمة بجميع الحقائق التي تم إعطاؤها:

- يوجد 64 مربعا على رقعة الداما.
- يوجد 32 قطعة من حجر الدومينو، مساحة كل منها تساوي مربعين.
- تم إلغاء مربعين باللون الأبيض.
- تبقى 62 مربعا، فقط، على رقعة الداما المشذبة.
- يوجد 32 مربعا أسودا، و 30 مربعا أبيض.
- عدد المربعات السوداء لا يساوي عدد المربعات البيضاء.
- كل قطعة حجر دومينو ينبغي أن تغطي مربعا أسودا وآخر أبيض اللون.

وعليه، فإن عدم تساوي عدد المربعات السوداء مع البيضاء، سيخلق إمكانية تغطية لوحة الداما المشذبة بواسطة 31 قطعة من حجر الدومينو، كما طلب في المسألة، وتكون المسألة قد حلت. ينبغي أن يشدد المعلمون على أهمية إدراك أن هذه المسألة تعد محسولة، بالرغم من أن المطلب الأساسي في المسألة قد نجح عنه حل مخيب للرجاء!.

إن موقفا مناظرا للمسألة آنفة الذكر نجده شائعا في سجل تاريخ الرياضيات حول حل ليونهارد إيولر Leonhard Euler الشهير "مسألة التقسيم الثلاثي الأجزاء Trisection Problem". فلقد برهن إيولر على عدم إمكانية تقسيم أية زاوية تقسيما ثلاثيا الأجزاء بواسطة المسطرة والفرجار، وهذا لا يعني بأننا لا نعرف كيف نفعل ذلك. إن مناقشة مثل هذا الحل يتطلب توظيف وقت جدير بالاهتمام!.



مسألة أخرى تعرض تقانة حل المسائل التي تعتمد مبدأ إبطال المحاولات الفاشلة ندرجها كما يأتي:

مسألة PROBLEM أعطيت لك أربعة قطع منفردة من سلسلة (طول كل منها ثلاثة حلقات)، بين كيف يمكن ربط هذه القطع الأربعة في دائرة مفردة، عن طريق فتح أو إغلاق ثلاثة حلقات، كحد أقصى.



إن المحاولة الأولى (التقليدية) ستألف من قطع حلقة النهاية لكل من القطع الثلاثة الأولى. يبطل هذا الموقف النفسي بالقول "لا تقطع حلقة واحدة في كل قطعة" أو "اقطع جميع الحلقات في قطعة واحدة".

إن هذا سيؤدي إلى الحل بصورة مباشرة، نظرا لأن الحلقات الثلاثة المقطوعة يمكن استخدامها في ربط القطع المتبقية من السلسلة لتأليف الحلقة الدائرية المطلوبة.

إن مبدأ أساسيا آخر لحل المسائل سيمركز إلى دعوة الطلبة بإدراج جميع المعلومات المتوفرة (أو المتضمنة) في المسألة. تأمل المسألة الآتية.

مسألة PROBLEM

تم إعطاؤك رقعة داما Checkerboard مع 32 قطعة حجر دومينو Dominos (تغطي كل منها مربعين من رقعة الداما، بالخط، بين كيف يمكن لـ 31 قطعة من حجر الدومينو أن تغطي رقعة الداما مع إلغاء زوج مربعي الزوايا المتقابلة).

مختلفة من المسائل المتوفرة يعد أمراً ضرورياً للعلية. وقد ظهر في بعض الأحيان الحاجة إلى تفكيك مكونات المسألة إلى أجزاء أصغر لكي تسهل عملية تبويبها وتصنيفها. إن مراقبة هذه العملية بواسطة حلل المسائل يعد أمر ضرورياً، وسينجم عن الإدراك الذاتي القدرة على التحكم بالعلية.

إن مفتاح النجاح في حل المسائل يكمن في القدرة على التحكم بالعلية، لذا فإن من الطبيعي، بل من المرغوب فيه، أن تحدث نفسك (دون إصدار صوت Subvocally) عندما تعمل على حل مسألة رياضية، ويعد هذا الأسلوب محاولة ذاتية للتحكم بعلية حل المسائل.

ولكي تكون متمكناً من علية التحكم ينبغي أن تكون متضلعا بالمفردات الضرورية من البحث الموجه (الهيوريستيكا) بحيث تستطيع اختيار، ومتابعة النهج الصحيح للحل. إن تحدثك مع نفسك، سيجلب لك فرصة مراقبة علية حل المسألة، وهو مفتاح سيمكّنك من التحكم بالعلية.

هناك عدد من قرارات التحكم الممكنة، والتي ينبغي أن تؤخذ بعين الاعتبار:

- **قرارات طائشة Thoughtless Decisions** تؤدي إلى دفع العلية باتجاهات متباعدة، ولا تركز إلى أية خبرات أو معرفة سابقة.
- **قرارات نافذة الصبر Impatient Decisions** قد تؤدي إلى إيقاف العلية كلياً، أو إبقاء حلل المسألة بدون اتجاه محدد لطلب الحل الذي لا يقدر حتى على تحديد مسار واضح للاستنتاج سواء كان ناجحاً أم فاشلاً.
- **قرارات بناءة Construction Decisions** تتضمن مراقبة التحكم، بعناية، عند توظيف المعرفة والمهارات بطريقة ذات أهداف واضحة واستخدام طرق حلول مضبوطة وصحيحة، واجتنب تلك التي لا تملك فرصة النجاح.
- **قرارات إجراءات فورية Immediate Procedure Decisions** تتطلب عدم التحكم، لأنها تلجأ، ببساطة إلى طريق الحل المناسب المخزن في الذاكرة - طويلة الأمد.
- **غياب قرارات Noddecisions** وتنشأ عندما تكون قضية المسألة مربكة ومحيرة بحيث لا تنفع المعرفة أو الخبرة السابقة، ولا توفر دعماً لحل المسألة، فيقر حلل المسائل بعجزه عن حلها!

إن إدراك علية حل المسائل تمثل الخطوة الأولى على تحقيق التحكم والذي سيمكّن، بدوره، المتعلم من إيجاد طريق الحل الأمثل.

لا شك بأن أفضل طريقة لتهيئة الطلبة كي يكونوا فعالين في حل المسائل تكمن في تزويدهم بعدة أمثلة تغطي جوانب متعددة من تقانات حل المسائل.

إن من الطبيعي أن يكون ذو فائدة كبيرة البدء بتصنيف التقانات العروضة، رغم أن من الحكمة جعل الطلبة، يكتشفون بأنفسهم ويمرور الوقت التقانة المناسبة - غير المخصصة لحل مسألة محددة، لأن مثل هذا الأمر يتواءم مكانة مهزة في عملية حل المسائل.

إن الإدراك الذاتي، وبالأخص فيما يتعلق بمادات التعلم، سيمساعد بشكل ملموس في عملية التعلم. إن ما وراء الإدراك أو المعرفة Metacognition يشير إلى المعرفة (والصدق) بعمليات الإدراك، والتي تؤدي إلى التحكم النهائي بالنظام، والسيطرة أنشطة الإدراك.

عند عرض موقف مسألة ما، ينبغي أن تعالج البيانات الخام وتهذب إلى جواب مقبول. وتتألف المعالجة، بصورة عامة، من عملية متعددة المراحل Multi-Step تستلم كل مرحلة النتائج من المرحلة التي تقدمت عليها، مع استخدام كل ما يتوفر من معدات مخزونة في مستودع حلل المسائل من المهارات والمعرفة.

إن مرحلة التخطيط تتألف من عملية تطوير برنامج محدد التوقيتات للعمليات، والمصممة لمسائل محددة. ويعد التصور والإدراك الناجح للخطوة الجيدة هو الإنجاز الأساسي في عملية حل المسائل، كما أنها تشكل الجزء الأكثر صعوبة من العملية التي سيتم تعليمها.

ذهب جون فلافل John Flavell في مقاله الموسوم "مظاهر ما وراء الإدراك بحل المسائل"

("Metacognition Aspects of Problem Solving" (In The Nature of Intelligence, Erlbaum, 1976).

بأن ما وراء الإدراك هو عنصر أساسي في تطوير الطالب لخطة الحل. وبناء على ما ذهب إليه فلافل فإن "ما وراء الإدراك" يشير إلى عمليات الإدراك الذاتية أو أي شيء يرتبط بها، ولا تقتصر على الاطلاع على عمليات الإدراك، فحسب، ولكنها ترتبط أيضاً بمراقبة الذات، والانتظام، والتقييم، واتجاه النشاط الإدراكي.

تتضمن أنشطة ما وراء الإدراك إقامة الارتباط بين قضية المسألة، التي تم تفكيكها إلى أجزائها الجلية، والمعرفة والخبرات السابقة لدى الطلبة.

تستمر العملية لحين يمكن تصنيف المسألة إلى مجموعات مألوفة مسبقاً، وجاهزة للحل.

إن القابلية على تصنيف والحصول على مجاميع لأنواع

إننا نحاول مقارنة توجيه التحديات التي تفرضها حياتنا اليومية بمنهج يشابه الخوارزميات إلى حد كبير، وقد نصاب بخيبة أمل أو إحباط لحد ما، إذا لم يعد هذا المنهج صالحاً للتطبيق على حين غرة.

ويطلب منا، في مثل هذه المواقف، إيجاد حل مناسب للمساءلة، مما يعني ضرورة مباشرتنا لأعمال بحث واستقصاء في خيراتنا السابقة لإيجاد طريقة ما قمنا باستخدامها لحل مشاكل مشابهة في زمن ماضٍ. (إن هذه ملاحظة قد صاغها ببلاغة وفصاحة متميزة جورج بوليا، 1957). ونستطيع، أيضاً، أن نتناول حقبة أدواتنا الخاصة بحل المسائل لنعثر على ما يصلح فيها لحل العقبات التي تعترضنا عندما يجابه الطلبة مسائلًا في حياتهم اليومية بالمدرسة، لأن نهجهم المعتمد في حلها لا يختلف كثيراً عما ذكر سابقاً، فنراهم يعملون إلى معالجة المسائل بناءً على ما توفر لديهم من خبرات سابقة.

هذه الخبرات قد تتأرجح بين: تمييز المسألة ومقاربتها لمسائل تم حلها في فترات سابقة، إلى اخذ تمارين كواجب بيتي تشابه إلى حد كبير المسائل المطروحة بالصف في ذلك اليوم. إن الطالب لا يمارس أيًا من آليات حل المسائل، لكنه يقوم على الأكثر بتقليد (أو مزاوله) المواقف التي صادفته بأوقات سابقة. إن هذا هو السلوك الذي نراه في حشد كبير من الصفوف المدرسية بمختلف مستوياتها. وإن تكرار مزاوله المهارة يبعد في بلوغ مرحلة تأصيلها ذاتياً، و يصبح أيضاً هذا الأمر بعياناً تأصيل مهارات حل المسائل لدى الطلبة.

إن استخدام مناهج مألوفة للتعامل مع ما يعتبره البعض مواقف مصطنعة (اخترعت، بصورة خاصة، لصفوف الرياضيات) لا يتوجه، دوماً، بصورة مباشرة صوب فكرة حل المسائل بوصفها عملية ينبغي أن تنال دراسة وعناية لذاتها فحسب ولن يكون سهلاً فحسب.

إن الناس لا يلجئون إلى حل "مسائل العمر"، أو "مسائل الحركة"، أو "مسائل الخليط" وما يشابهها من مسائل في حياتهم الواقعية.

ما دامت دراسة مادة الرياضيات تعد، وفق المنهج التاريخي، بوصفها موضوعية، وبدون بذل جهود واعية ومكثفة بواسطة المرين، فإن هذه الحالة ستبقى مستمرة دون تغيير. وتتوفر للمدرسين فرصة إعادة ترتيب المفردات السائدة في المنهج الدراسي بمراتب مختلفة، بيد أن المفردات ستبقى بوصفها موزعة لارتباط المساقات الدراسية فيما بينها فضلاً ذلك على تضمين الطرق الإجرائية-الرياضية. ويخالف هذا النهج الطريقة

مقدمة إلى استراتيجيات حل المسائل

An Introduction to Problem-Solving Strategies

قبل أن تتوفر لنا فرصة مناقشة ماهية حل المسائل، ينبغي أن نحاول تحديد ما يكمن من معان وراء اصطلاح "مسألة".

إن المسألة هي عبارة عن موقف يجابه المرء ويطلب حلاً. ويمتاز الطريق الذي يؤدي إلى الحل بأنه لا يمكن معرفته بصورة مباشرة. في الحياة اليومية تبرز المسألة كأي شيء من المسائل الشخصية البسيطة مثل أفضل استراتيجية لعبور الشارع (تتم، بصورة عامة، دون تفكير إضافي) إلى المشاكل الأكثر تعقيداً مثل كيف يمكن أن تتركب دراجة جديدة. لا ريب أن عبور الشارع قد لا يكون مسألة سهلة في بعض المواقف، فمثل سبيل المثال، إن الأمريكيين يكونون متيقظين بصورة جنونية عندما يعزرون بلدًا مثل إنجلترا، حيث لا تعمل استراتيجيتهم التقليدية لعبور الشوارع، بصورة آمنة، في هذه البقعة الجديدة. والعكس صحيح أيضاً، لأن البريطانيين يعانون من نفس الشعور عند زيارة أحد بلدان القارة الأوروبية حيث يكون النظام المروري باتجاه معاكس ما يسود في بريطانيا.

إن هذه المواقف اليومية يمكن حلها، بصورة تقليدية، وبطريقة غير واعية Sub-consciously دون أن نضطرنا إلى اخذ ملاحظات صورية للإجراءات التي حققت لنا حلاً مناسباً. إن الشعور وإدراك ماهية طرائق واستراتيجيات حل المسائل (التي تسود حياتنا اليومية) تصبح أكثر وضوحاً عندما يسافر أحدنا خارج حدود البيئة التي يقطنها، فنشخص آنذاك أمامنا حقيقة عدم توافق أو تطابق أسلوب حياتنا اليومية وعاداتنا السلوكية مع الحالة الجديدة. من أجل هذا تبرز أهمية التكيف الواعي مع طرائق جديدة من أجل تحقيق أهدافنا التي تعبر إليها.

إن كثيراً مما نفعله يرتكز إلى خبراتنا القبلية Prior Experience، وكنتيجة لهذا الأمر، فإن تغيراً كبيراً سوف يحصل في مستوى التعقيد الذي ننتهزه عندما نجابه المسألة التي تشخص أمامنا.

سواء تضمنت، المسألة التي نجابهها في حياتنا اليومية، اختيار الملابس التي ترتديها يومياً، أو الاتصال بمصدق أو أحد معارفنا، أو التعامل مع مسألة تخصصية أو التعابير المالية الشخصية، فإننا نتصرف إزاءها بطريقة آلية، ومن أن نأخذ بعين الاعتبار النهج أو الاستراتيجية التي تكون أكثر ملائمة للوقت الذي تعانیه.

التي يفكر بها معظم الناس بصورة كلية¹. فالاستدلال يتضمن طيفا عريضا من التفكير.

إن الطلبة الذين تلقوا في قاعة درس الرياضيات أن حل المسائل مكتفية في ذاتها، وأنها ليست أداة تبلغ بها الغاية سيفقدون كثيرا من الصف، وكذلك من أمور حياتهم اليومية. فقد تكون ثقافة حل المسائل الوسيلة التي نستخدمها لتقديم الطلبة إلى الجمال الكامن في علم الرياضيات وتطبيقاته، كما أنها تستلزم دورا يسهم في جمع وتوحيد الخيوط التي تشد أزر خبراتهم الرياضية مجتمعة في نسق كلي ذي معان عميقة.

إن أحد الأهداف القريبة سيكون جعل الطلبة أكثر ألفة مع حشد كبير من استراتيجيات حل المسائل، مع التدريب على استخدامها. إن هذا الإجراء سيبتدئ بمرض الاستراتيجيات وطريقة معالجة المسائل ومن ثم إيجاد حلول لها. كما أن التدريب المستمر والكافي على هذا الإجراء سيجعل من تحقيق الأهداف - بعيدة المدى ممكنا، وبالأخص، توجه الطلبة صوب استخدام استراتيجيات لا تقتصر على حل المسائل فحسب، بل في تجاوز المشاكل التي تعترضهم بالحياة اليومية. إن هذه النقلة النوعية بالتعلم (بالانجماح) إلى أمام والى خلف) سيمكن إدراكها بطريقة أفضل عن طريق زج استراتيجيات حل المسائل في كل من ميداني الرياضيات والحياة الواقعية وبصورة متلازمة. إن إحداث تغيير في البرنامج التدريسي عن طريق، التحلي عن تأكيدها المطلق (النشأ) عن طول استخدامه في مناهج التدريس) على ضرورة فصل الموضوعات والمفاهيم، وتكريس الوقت للنهج الإجرائي Procedural Approach، سيتطلب دعم العلم لضمان نجاحه. وينبغي أن يدرك المعلمون بأن النتائج النهائية ستثمر عن تهيئة طلبة ذوي قدرات تتناسب مع روح العصر الراهن، حيث أفسحت القابلة على مزاولة التفكير تزداد شيئا فشيئا مع استمرار زيادة التقيد في التقنية لكي تتطور وتستخد.

عندما يدرس أحدنا تاريخ الرياضيات، ستقع أنظاره على إنجازات وطرقات نوعية، والتي رغم بساطة فهمها، سيكون رد الفعل إزاما "وه، لم يدر بيالي أي فكرة حول ذلك النهج!". بنفس الطريقة، عند العثور على حلول أحد الطلبة اللامعين بمادة الرياضيات والتي تعرض بوصفها حلول بارة وذكية، فإنها ستحدث نفس تأثير الاستخفاف بالذات Self-disparaging الذي أحدثته الطفرات الكبيرة في تاريخ الرياضيات. يجب أن يساعد المعلمون طلبتهم على تجنب مثل هذه القوالب العقلية، ومحاولة تعلم كيفية إعداد حلول ذكية كجزء من قاعدة معرفية لاستراتيجية حلول المسائل التي

أمكنهم إحرازها، والتي ستعمق تدريجيا، ومع مرور الوقت، خلال فترة البرنامج التدريسي.

بالمقابل ينبغي أن تتوخى الحذر بصدد وجود كلام كثير حول ثقافة حل المسائل خلال بضعة العقود التي خلت. إن المجلس الوطني لعلمي الرياضيات بإصداراتها "Agenda for Action (1980)", "والأكثر قبولا وابتكارا "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics Principles and Standards (1989)", وأحدثها إصدارا (for School Mathematics (2000)، قد لعبت دورا مهما في إحداث قبول عام بموضوع حل المسائل دفعة منهجية كبيرة. يبدو بأننا منتقون جميعا بأن حل المسائل والاستدلال يمثلان، وينبغي أن يكونا، الجزء، للنعم لأي برنامج تدريسي جيد.

إن السؤال المطروح في هذا المقام هو "لماذا لم تتوفر لهذا الأمر فرصة المرور والنجاح؟". إن المائق الجوهري الذي يشخص أمام العنصر الناجح بحل المسائل في المنهج الدراسي - المدرسي النظامي يعود إلى التدريب الضعيف الذي تلقاه المعلمون بميدان حل المسائل، يضاف إليه فقدان الاهتمام الذي يصرف صوب الطرق التي يمكن من خلال توظيف هذه المهارات خلال البرنامج التعليمي النظامي.

ينبغي على المعلمين أن يركزوا انتباههم على ماهية حل المسائل، وكيف سيستثمرون هذه الثقافة، وكيفية أسلوب عرضها على طلبتهم.

كذلك يجب أن يفهموا بأن حل المسائل يمكن أن تكون موقداً للفكر في ثلاثة طرق مختلفة.

1. حل المسائل هو موضوع للدراسة بذاته ولذاته.
2. إن حل المسائل هي طريقة لفهم مسألة محددة.
3. إن حل المسائل هي طريقة للتعليم.

بالرغم من صحة جميع هذه الطرق، فإن المفهوم الثالث هو السبيل الحاسم الذي ينبغي أن يولييه مدرسو الرياضيات غناية خاصة. وينبغي أن تصبح ثقافة حل المسائل جزءاً مكملاً لعملية التعليم التي يمارسونها.

يعرض هذا القسم عشرة استراتيجيات لحل المسائل، والتي قد تصبح القاعدة الأساسية لمثل هذا النهج بالتعليم.

في البداية، يجب على المعلمين تركيز اهتمامهم صوب قدراتهم الذاتية كي يصبحوا متفوقين في حل المسائل، وأن يتعلموا طبيعة استراتيجيات - حل المسائل المتاحة لهم، وماذا يستمتع عليها من نتائج، ومتى، وكيف يمكنهم استخدامها. بعدها ينبغي عليهم أن يتعلموا كيفية تطبيق هذه الاستراتيجيات، دون الاكتصار على القضايا والمواقف الرياضية

موظف الترميم ستكون ممكنة باستخدامه للأدوات الموجودة في صندوق الأدوات العائد له، كذلك فإن المسألة الرياضية ان تكون قابلة للحل باستخدام الاستراتيجيات المعروفة هنا، أيضاً. وفي كلا الحالتين تلعب الخبرة وملكة الحكم دوراً مهماً بهذا المضمار. وعلى كل مدرس (لكي يساعد الطلبة على تعلم واستخدام استراتيجيات حل المسائل) أن يمتلك مجموعة يستطيع أن يختار منها أمثلة مناسبة.

تلتصق لوحة تسمية Label بكل استراتيجية بحيث يمكن استخلاصها واستدعائها بسرعة أن ظهرت الحاجة لها. يلجأ موظف الترميم، عند اتخاذ قرارا بصدد اختيار الأداة المناسبة، إلى الإشارة إليها بالاسم (يعني، لوحة تسمية).

إن وجود لوحة التسمية (أو إطلاق اسم) ملتصقة باستراتيجية ما، سيجعل الأمر أكثر سهولة لحلال المسائل عند استدعائه إياها للاستخدام في العملية.

إن جميع الاستراتيجيات المعروضة يمكن، ويجب، تطبيقها بصورة منتظمة على عملية اتخاذ القرارات في الحياة اليومية (أو حل المشاكل في مواقف الحياة الواقعية).

إن هذه الممارسة ستسهم في تمكين استخدامهم، وفهمهم، وتجعل من عملية تطبيقها على القرائن الرياضية أمراً طبيعياً.

لكي نفهم الاستراتيجيات المعروضة في هذا القسم، بصورة افضل، ستقوم بتقديم كل منها مع وصف مناسب، وتعتمد إلى تطبيقها على موقف مسألة من الحياة اليومية، ثم نعرض مثالا يبين كيفية تطبيقها في ميدان الرياضيات في كل حالة من الحالات، لم تمد الأشكال التوضيحية لكي تكون نموذجية بالضرورة، ولكن تم عرضها بحيث توضح استخدام استراتيجية محددة قيد المناقشة بأفضل وصف ممكن.

تظهر أدناه الاستراتيجيات التي ستؤخذ بنظر الاعتبار في هذا الكتاب:

1. العمل الارتجاعي.
2. إيجاد نمط.
3. تبني أسلوب آخر.
4. حل مسألة بسيطة مماثلة (تخصيص دون فقدان العمومية).
5. اعتبار الحالات القصوى.
6. إعداد رسومات (عرض مرئي).
7. التخمين الذكي والاختبار (متضمناً التقريب).
8. احتساب جميع الاحتمالات (الترويض الشامل).
9. تنظيم البيانات.
10. الاستدلال المنطقي.

فحسب، بل يجب عليهم أن يوجهوا التطبيق صوب مفردات الحياة اليومية وخبراتها.

بصورة عامة، يمكن استخدام مسائل بسيطة بطرق ذكية وماهرة، لتوضيح وبيان هذه الاستراتيجيات. بصورة طبيعية، فإن مسائل تحلل طابع التحدي (سوف تظهر بوضوح) قدرة استراتيجيات حل المسائل.

عبر تعلم الاستراتيجيات، والبدء بأمثلة سهلة عن تطبيقاتها، ثم الانتقال تدريجياً باتجاه حل مسائل أكثر صعوبة وتقييداً. فإن الطلبة ستوفر لهم فرص مناسبة للنمو في ظل الاستخدام اليومي لمهارات بحل المسائل. ينبغي أن ننذرع بالصبر مع الطلبة عند تكليفهم بالمسألة، وماذا تعني لهم هذه الغامرة الجديدة بميدان الرياضيات.

بعد أن يكون المعلمون قد حققوا انغماساً مناسباً في هذا النهج البديل صوب الرياضيات، بصورة عامة، وحل المسائل، بصورة خاصة. وبعد أن يكونوا قد نجحوا في تنمية الحساسية باتجاه حاجات التعلم، والخصوصية التي يمتاز بها الطلبة، بعدها، وبعد ذلك فقط. يستطيع المعلمون أن يتوقعوا رؤية بعض التغير الإيجابي والحقيقي في الأداء الرياضي لطلبتهم.

من النادر جداً، ان تجد مسألة يمكن حلها باستخدام جميع الاستراتيجيات العشرة المعروضة في هذا القسم. وبمنسب الأسلوب، فمن النادر جداً، أن استراتيجية واحدة فقط يمكن استخدامها لحل مسألة ما. على العكس، فإن توحيد الاستراتيجيات وتكامل استخدامها هو المبدأ الأكثر وجوباً في دائرة حل المسائل. وعليه، فإن من الأفضل أن تكون أعرق معرفة بجميع الاستراتيجيات، وتنمية التسهيلات الخاصة باستخدامهم عندما تكون هناك فرصة مناسبة لذلك.

إن الاستراتيجيات التي تم اختيارها، في هذا القسم، لا تمثل جميع الاستراتيجيات المتوفرة، ولكنها تعرض أنموذجاً لأكثر الاستراتيجيات القابلة للاستعمال والتطبيق في تدريس الرياضيات داخل المدرسة. إن المستخدم، سوف يحدد مدى ملائمة استراتيجية ما لمسألة محددة. كما إن تحديد الاستراتيجية المناسبة تشابه إلى حد كبير ما يقوم به موظف الترميم Repairman، الذي، عندما يستدعي لإصلاح مشكلة ما. يجب عليه ان يحسن اختيار أي أداة سوف يستخدمها بعمله. وكلما كثر عدد الأدوات المتوفرة لديه، وتعمقت معرفته بالاستخدام الأمثل لها، فإننا نتوقع له تحقيق افضل النتائج بعمله.

من ناحية ثانية، كما أن كل مهمة سنهض بأعينها

الخطوة الثانية إلى تحديد أي عدد ينبغي أن يوضع في خلية المركز Center Cell. باستخدام التخمين الذكي والاختبار مع قليل من الاستدلال المنطقي، نستطيع البدء بمحاولة بعض الحالات القصوى. هل يستطيع الرقم 9 أن يتبوأ خلية المركز؟ وإذا صح هذا الأمر، ينبغي أن يشاركه الرقم 8 نفس الصف، أو العمود، أو القطر مما يجعل مجموع الأعداد أكبر من العدد 15. وعليه لن يكون موقع العدد 9 في خلية المركز، بأي حال من الأحوال. وبنفس الطريقة، سنتوصل إلى عدم وجود فرصة أمام الأعداد 6، 7، أو 8 للاستقرار بخلية المركز. لأنهم سوف يشاركون العدد 9 بنفس الصف، أو العمود، أو القطر مما يجعل مجموع الأعداد الثلاثة المستقرة فيها أكبر من 15.

تأمل الآن الحالة القصوى الأخرى، هل يستطيع الرقم 1 أن يتبوأ خلية المركز؟ وإذا صح هذا الأمر، سيشترك بنفس الصف، أو العمود، أو القطر العدد 2، لذا فإننا بحاجة إلى العدد 12 لكي نحصل على مجموع قدره 15. وكذلك الحال بالنسبة للأعداد 2، 3، أو 4 فإنها لا تمتلك أدنى فرصة للاستقرار بخلية المركز.

بعد احتساب جميع الاحتمالات، سنترك لنا العدد 5 بوصفه المرشح الوحيد للجلوس في خلية المركز.

	5	

والآن، باستخدام التخمين الذكي والاختبار، نستطيع محاولة وضع الرقم 1 في خلية الركن Corner Cell. وبناء على صفة التناظر السائدة في خلايا الشبكة، لا تأثير لموقع الركن الذي سنختاره للرقم 1. بأي حال من الأحوال، فإن هذا الأمر سيجهزنا على وضع الرقم 9 في الركن المواجه Opposite Corner، إذا أردنا الحصول على قطر مجموع إعداده 15.

1		
	5	
		9

إن وجود الرقم 9 في أحد الأركان، ينبغي أن يكون مجموع العددين اللذين يشاركانه بنفس الصف مساويا 6، أي العددين 2، 4.

كما ذكرنا سابقا، لا يمكن أن ندعي بوجود حل فريد لمسألة ما لا يشاركه غيره، فبعض المسائل تتوفر أمامها مجموعة متنوعة من طرائق الحل.

ينبغي أن نعتد قاعدة عامة تهدف إلى تشجيع الطلبة على اعتبار حلول بديلة للمسألة، مثل التفكير كليا بحلول "رفاق الصف" ومقارنتها بالحلول النموذجية "المعمارية" (وهي حلول تعطى في الكتاب المنهجي، أو تزود من قبل المعلم).

كما ينبغي أن لا يغيب عن ذهنك، على الدوام، بأن هناك حشد من المسائل التي تتطلب إلى أكثر من استراتيجية لضمان حلها، لأن البيانات التي تتضمنها قضية المسألة ولتست طبيعة المسألة هي العامل الأكثر أهمية في تحديد أفضل استراتيجية يمكن استخدامها في حل المسألة. كذلك ينبغي دراسة وتمحيص جميع جوانب مسألة ما قبل أن نباشر بتوظيف استراتيجية معينة لحلها.

دعنا نقابل مسألة يعد معظم الناس إلى حلها بواسطة أسلوب المحاولة والخطأ الحدسي أو العشوائي. Intuitive Trial and Error (or random) والذي قد يستغرق وقتا طويلا للحصول إلى الإجابة. لكي نوفر لك فرصة مناسبة لتعلم استخدام استراتيجيات حل المسائل المذكورة قبل أن نعالج كلا منهم بصورة منفردة، ينبغي علينا أن نعاين، بعناية، مسألة توظف فيها بضعة استراتيجيات من القائمة السابقة.

مسألة Problem

ضع الأعداد من 1 إلى 9 في الشبكة أدناه، بحيث أن مجموع أي صف، أو عمود، أو قطر فيها يكون متساويا (يطلق بصورة عامة على هذه الشبكة اصطلاح "المربع السحري" Magic Square).

الحل SOLUTION

بالخطوة الأولى من الحل سنحاول استخدام الاستدلال المنطقي.

سيكون مجموع جميع الأعداد في الخلايا التسعة مساويا.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + + 7 + 8 + 9 = 45$$

إذا كان على كل صف أن يمتلك نفس المجموع، ينبغي أن

يكون مجموع أعداد أي صف مساويا $15 = \frac{45}{3}$ ستهدف

8	1	6
3	5	7
4	9	2

إن ما قد تمت ملاحظته خلال آلية هذا الحل للمسألة المطروحة هو كيف أن مجموعة من الاستراتيجيات قد استخدمت في كل خطوة من خطوات الحل.

يمكن للمسائل (و ينبغي) أن تحل بأكثر من طريقة.

دعنا نمتحن منهجا بديلا لحل نفس المسألة السابقة. فإذا ابتدأنا بالحل من النقطة التي شرعنا بها، والتي تضمنت مبدأ أن مجموع أعداد كل صف، أو عمود، أو قطر ينبغي أن يساوي 15، يمكننا إدراج قائمة بجميع الاحتمالات الممكنة للأعداد الثلاثة من المجاميع التسعة والتي ينبغي أن يساوي مجموعها 15 (احتساب جميع الاحتمالات). إن تنظيم البيانات بهذه الطريقة، سيثمر عن الحصول على الإجابة بسرعة.

1,5,9	2,6,7
1,6,8	3,4,8
2,4,9	3,5,7
2,5,8	4,5,6

ينبغي علينا الآن أن نختبر أسلوبا آخر، فنأمل موقع الخلية، وعدد مرات تداخلها في المجموع 15 (استدلال منطقي). ينبغي أن نقوم بعد المربع الوسيط أربعة مرات، مرتان مع القطر، ومرتان إحداها مع عمود، والثانية مع صف. إن العدد الوحيد الذي يظهر لأربعة مرات في ثلاثية الأعداد المذكورة أعلاه هو العدد 5، لذا فإن هذا العدد يعود إلى الخلية الوسيطة.

	5	

إن خلايا الأركان الأربعة، تستخدم كل منها ثلاث مرات، لذا ستقوم بوضع الأعداد المستخدمة ثلاث مرات (الأعداد الزوجية: 2, 4, 6, 8) في هذه الأركان

إن أحد هذين العددين (2 أو 4) سيكون مشترك، أيضاً، مع العدد 1 بنفس الصف أو العمود سيجعل إمكانية الوصول إلى المجموع 15 في ذلك الصف أو العمود مستحيلا. وعليه لن تتوفر فرصة للعدد 1 بالاستقرار في ركن من الأركان. إن وضعه في خلية منتصف الصف الخارجي أو العمود سيجبرنا على وضع العدد 9 في الخلية المقابلة للحصول على مجموع قدره 15.

	1	
	5	
	9	

الرقم 7 لن يكون بنفس الصف أو العمود مع العدد 1، لأنه سيحتاج عددا مساويا آخر (7 ثانية) للحصول على مجموع قدره 15.

7	1	?
	5	
	9	

وبهذه الحالة، نرى ضرورة تواجد العددين 6، 8 في نفس الصف أو العمود (وبمواقع الركن، بالطبع) مع العدد 1.

8	1	6
	5	
	9	

إن هذا الأمر سيحدد الركنين المتبقين (4، 2) لكي نسمح للقطرين بأن يكون مجموعهما 15.

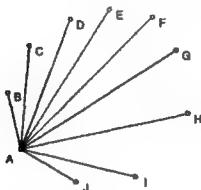
8	1	6
	5	
4	9	2

لإكمال المربع السحري، سنضع، ببساطة، العددين المتبقين (3، 7) في الخليتين الشاغرتين للحصول على مجموع قدره 15 في العمود الأول والثالث.

مخطط إن النقاط العشرة، والتي تمتاز بأن ثلاث نقاط منها لا تقع على استقامة واحدة Collinear، تصف الأشخاص العشرة. أبدأ بالشخص الموصوف بالنقطة A.



نبدأ بوصل النقطة A بالنقاط التسعة المتبقية ليبيان التصادفات التسعة التي حدثت أولاً.



والآن سيبقى أمام النقطة B ثمانية تصادفات إضافية (نظراً لأن النقطة A قد تصادفت مع النقطة B، وقد تم رسم المستقيم \overline{AB}). بنفس الطريقة، سيبقى أمامنا رسم سبعة خطوط من النقطة C إلى بقية النقاط (المستقيمان \overline{AB} ، \overline{BC} قد رسما سابقاً)، ومن النقطة D سيكون هناك 6 قطع مستقيم إضافية أو تصادفات، ويستمر الأمر على هذا النوال. عندما سنصل النقطة I، سيبقى أمامنا تصادف واحد فقط ينبغي أن نقوم برسم مستقيمة بين نقطتي I، J، نظراً لأن النقطة I قد تصادفت سابقاً مع النقاط (A,B,C,D,E,F,G,H). لذا فإن مجموع التصادفات سيكون مساوياً:

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$$

بصورة عامة، فإن هذه العملية تشابه استخدام صيغة جمع

من الحدود الطبيعية:

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad n \geq 1$$

(لاحظ بأن الرسم النهائي سيكون عبارة عن شكل عشاري

الزوايا Decagon بجمع أقطاره الظاهرة).

8		6
	5	
4		2

أما الأعداد المتبقية (الأعداد الفردية) قد استخدمت كل منها مرتان في المجاميع أعلاه، وعليه ينبغي أن نضعها في خلايا الوسط المحيطية Peripheral Center Cells (لاستخدامهم بواسطة مجموعتين فقط) لكي تمتلئ خلايا الربع السحري جميعاً.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

إن الاستدلال المنطقي قد تم إجراؤه بطريقة سهلة باستخدام العرض الموحي للمسألة.

من الضروري أن يعي الطلبة بأننا قد قمنا بحل نفس المسألة بطريقتين متباينتين، وينبغي أن يباشروا بمحاولة تطوير وتنمية بدائل أخرى لها، وعليهم أن يتأملوا إمكانية استخدام أرقام متتالية غير (1-9). إن الطلبة الطموحين والتواقين للمعرفة قد يحاولوا باتجاه إنشاء مربع سحري بخلايا 4×4 أو حتى 5×5 . وكما ذكرنا سابقاً، فإن من النادر جداً أن تواجه مسألة يمكن حلها بكفاءة باستخدام كل من استراتيجيات حل المسائل العشرة. ولكن، قد نعتز على مسائل تفكر حلولها إلى استخدام أكثر من استراتيجية واحدة، سواء بمفردها أو بالتوفيق بين أكثر من واحدة، وبوجود تغاير ملحوظ في مستوى الكفاءة لكل منهم. ليس ثمة شك، بأن مستوى كفاءة الأداء الذي تختص به كل طريقة يرتبط ارتباطاً جوهرياً، ويتغير بتغير هوية المستخدم. دعنا نأخذ نظرة فاحصة على مثل هذه المسألة، وهي مسألة شائسة. وقد تكون من المسائل التي اعترضتك سابقاً. سنحاول السعي باتجاه حلها بواسطة مجموعة من الاستراتيجيات المختلفة.

مسألة PROBLEM

في غرفة بمشرة أشخاص، صافح كل منهم بقية الحاضرين مرة واحدة فقط كم عدد المصافحات التي تمت هناك؟.

الحل SOLUTION I:

دعنا نستخدم استراتيجية العرض الموحي عن طريق رسم

الحل 4 SOLUTION

دعنا نحاول حل المسألة عن طريق البحث عن نمط أدرجنا في الجدول الآتي عدد التصادفات الحادثة داخل الغرفة بزيادة عدد الأشخاص الموجودين فيها.

عدد الأشخاص الموجودين بالغرفة	عدد التصادفات للشخص الإضافي	مجموع عدد التصادفات في الغرفة
1	0	0
2	1	1
3	2	3
4	3	6
5	4	10
6	5	15
7	6	21
8	7	28
9	8	36
10	9	45

إن العمود الثالث، والذي يعكس مجموع عدد التصادفات، يعطي تعاقب الأعداد المروء بـ "الأعداد الثلاثية"، والتي تزداد فروقها المتوالية بمقدار 1 لكل مرة. لذا يمكن الاستمرار بسهولة في أعداد الجدول لحين وصولنا إلى المجموع المناظر لـ 10 أشخاص، أو بطريقة أخرى، يمكننا ملاحظة النمط عند كل عملية إدخال يساوي نصف حاصل ضرب عدد الأشخاص (في ذلك الصف) (عدد الأشخاص في الصف السابق).

الحل 5 SOLUTION

يمكننا أن ندنو من المسألة بالاستخدام المناسب لاستراتيجية تنظيم البيانات. فالجدول المبين أدناه يظهر كل شخص من الأشخاص الموجودين في الغرفة، وعدد تصافح الأيدي لكل مرة، مع العلم بأنهم قد تصافحوا مع سابقهم ولن يصفحوا أنفسهم!

إن الشخص رقم 10 سيفافح 9 أيدي، والشخص رقم 9 سيفافح 8 أيدي، وهكذا بالنسبة للبقية، حتى نصل إلى الشخص رقم 2 والذي سيتبقى أمامه يدا واحدة كي يصفحها، بينما لن يصفافح الشخص رقم 1 أي من الموجودين بالغرفة، لأنهم قد صافحوه من جهتهم.

وسيكون المجموع ثانية 45.

البيانات المنظمة

رقم الشخص	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
عدد التصادفات	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

الحل 2 SOLUTION

يمكننا أن ندنو ثانية من المسألة عبر استراتيجية حساب جميع الاحتمالات. تأمل الشبكة الآتية، والتي تؤثر إلى تصافح الأشخاص، A, B, C, ... أو D. فيما بينهم. إن القطر بالرموز x يؤثر إلى أن الأشخاص لا يستطيعون التصادح مع أنفسهم. أما بقية الخلايا فتشير إلى أزواج التصادفات المتحققة مع البقية (بمعنى آخر، A تصافح B، و B تصافح A).

وعليه سنقوم بإحصاء العدد الكلي للخلايا، (10^2) ، مطروحا منه الخلايا الموجودة في القطر (10)، وتقسيم النتيجة على الرقم (2).

وستكون النتيجة، بهذه الحالة، كما يلي:

$$\frac{100 - 10}{2} = 45$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	X									
B		X								
C			X							
D				X						
E					X					
F						X				
G							X			
H								X		
I									X	
J										X


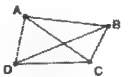

في حالة عامة لشبكة بخلايا $n \times n$ ، سيكون العدد

$$\frac{n^2 - n}{2}$$

الحل 3 SOLUTION

دعنا الآن نختبر المسألة عن طريق تنبيه أسلوب آخر. تأمل الغرفة بالأشخاص العشرة، والذي سيفافح كل منهم 9 أشخاص آخرين. إن هذا الأمر يوحي بوجود 10×9 أو 90 تصافح بينهم. ولكننا ينبغي أن نقسم النتيجة على الرقم 2 لإلغاء التكرار (نظرا، لأنه عندما يصفافح الشخص A، الشخص B. كما أن الشخص B يصفافح الشخص A).

$$\frac{90}{2} = 45$$

عدد الأشخاص	عدد التصادفات	للعرض المرئي
1	0	• A
2	1	A — B
3	3	
4	6	
5	10	

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

بالرغم من كون هذا الحل فعال بشكل ملحوظ، ومختصر، وصحيح، فإنه لا يستثمر أي نوع من الفكر الرياضي (غير تطبيق مباشر للصيغة) كما أنه يتجنب نهج حل المسائل بصورة تامة.

لذا رغم أنه حل بحاجة إلى مناقشة، فإن علينا أن نجذب اهتمام الطلبة وانتباههم إلى الحلول الأخرى.

ستزداد الفئك، تدريجياً، بالاستراتيجيات المطروحة، وستعتمد على استخدامها حتى تنتهيها، فقط عند هذه النقطة تستطيع أن تعرضها على طلبتك.

بهذه الطريقة، تستطيع أنت وطلبتك - على السواء - تنمية براعة ذاتية تصاحب استخدام الأدوات الأساسية لحل المسائل.

ويمكنك أن تعرض الأدوات عن طريق إعادة تشكيل أسلوب تعليمك لحل المسائل، مرة بعد أخرى. والتي ستكون بتشجيع طلبتك على أن يكونوا أكثر إبداعاً في التعامل مع المسائل، وحضهم على حل المسائل بطرائق متعددة، وادعهم إلى البحث عن أكثر من حل صحيح للمسألة الواحدة.

دع طلبتك يعملون سوية بمجماع صغيرة عند حل المسائل

الحل 6 SOLUTION

نستطيع أن نجتمع بين الاستراتيجيات: حل مسألة بسيطة مماثلة. وعرض مرئي (رسم صورة)، وتنظيم البيانات، و إيجاد نميط ويؤخذ شكل واحد ممثلاً بنقطة واحدة. وواضح أنه سيكون هذا صفر من التصادفات، وسع عدد الأشخاص إلى 2 وتمثل بنقطتين. سيكون هناك مصادفة واحدة. ومرة أخرى، دعنا نوسع عدد الأشخاص إلى 3. وهنا سنحتاج إلى 3 تصادفات. استمر إلى 4 أشخاص و 5 أشخاص وهكذا. أصبحت المسألة الآن مسألة هندسية حيث الجواب هو عدد الأضلاع "n-gon". لذا يصبح الشكل العاشر (decagon) لعشرة أشخاص وعدد الأضلاع $n=10$. ولعدد الأوتار نستخدم الصيغة: $d = \frac{n(n-3)}{2}$ ، حيث $n > 3$ ، وعليه:

$$d = \frac{(10)(7)}{2} = 35$$

وعليه سيكون عدد التصادفات الكلية = $10+35=45$.

الحل 7 SOLUTION

قد يدرك بعض الطلبة سهولة حل هذه المسألة باستخدام صيغة التوافيق Combination لعشرة أشياء، يؤخذ منها اثنان في كل مرة.

قد يحتاج الطلبة إلى الاستنتاج بطريقة معكوسة، بالرغم من عدم إخبارهم بعمل من هذا النوع. ولعل المثال الواضح على ذلك يكمن في الإجراءات التي ينبغي على الطالب استخدامها عند كتابة البراهين في فصل الهندسة بالدارس الثانوية. في تلك الحالة، ينبغي عليهم البدء باختيار ما يريدون برهنته قبل عمل أي شئ آخر. وعليه فإن محاولة البرهنة على تطابق خط مستقيم قد تنشأ من البرهنة على تطابق زوج من المثلثات. هذا الأمر، بالمقابل، سيقترح بأن ينظر الطلبة صوب الأجزاء الضرورية للوصول إلى إثبات تطابق المثلث. إن استعمار الطلبة بهذا الأمر، سيقودهم نحو اختيار المعلومات المتوفرة. وانهم، بالضرورة، يعملون باتجاه عكسي.

عندما يكون الهدف فريداً، ولكن تشخص أماننا الكثير من نقاط البيانات المحتملة، يبرز دور حلال المسائل الماهر بالبدء في العمل باتجاه عكسي من الاستنتاج المطلوب إلى النقطة التي تصل بنا إلى المعلومات المتوفرة.

عندما توجد نقطة نهاية فريدة (وهي التي ينبغي البرهنة عليها)، ومجموعة متنوعة من السبل للوصول إلى نقطة الشروع، ستكون استراتيجية العمل باتجاه عكسي على رأس قائمة الأمور المطلوبة. ومع ذلك، لازالت طريقة العمل باتجاه عكسي تعد من أكثر الطرق الطبيعية استخداماً، وإنها بالحقبة تستخدم في حل معظم المسائل.

نحن لا نقول بأن جميع المسائل ينبغي أن تعالج بمنظور استراتيجية العمل باتجاه عكسي، ولكن، بعد اختبار النهج القفزي (إلى أمام، بصورة عامة)، يمكن محاولة استخدام استراتيجية الاتجاه العكسي لمعرفة فيما إذا كانت ستوفر حلولاً للمسألة: أكثر كفاءة، وأكثر إمتاعاً، أو إقناعاً.

رغم أن كثير من المسائل بحاجة إلى استدلال معكوس Reverse Reasoning (حتى ولو اقتصر على معالجات محدودة)، فهناك بعض المسائل التي تسهم استراتيجية العمل باتجاه معاكس على تسهيل حلولها بشكل كبير.

تأمل المسألة التالية، وانتبه إلى حقيقة أن هذه المسألة ليست نمطية بالنسبة للنهج المدرسي، ولكنها بيان واضح للقرارات الكبيرة التي يمتاز بها العمل باتجاه عكسي.

إذا كان مجموع عددين يساوي 12 وان حاصل ضربهما يساوي 4.

جد مجموع مقلوب العددين.

سيحاول معظم الطلبة إنشاء معادلتين

$$x+y=12 \text{ و } xy=4$$

ويتبادلون الآراء والأفكار، بحرية، فيما بينهم، ويمعون إلى العمل لفهمهم ومد يد المساعدة لهم.

وكلما ازداد حديث الطلبة وتشعب عن المسائل، وحلولها، كلما ازدادت مهاراتهم بهذا المضمار وتعمقت.

إن الإشارة إلى استراتيجيات ومناهج حل المسائل المختلفة بأسانها سوف يضمن حسن استخدامها واستيعابها عند ظهور الحاجة إليها.

وتذكر بأن مفهوم ما وراء الإدراك (والتي تعني أن يكون المرء مدركاً بعمليات تفكيره) تشكل عاملاً مهماً في ثقافة حل المسائل. وان تشجيع الطلبة على التحدث مع أنفسهم عندما يجابهون مسألة، ويحاولون إيجاد حل مناسب لها،

الاستراتيجيات العشر لحل المسائل The Ten Problem-Solving Strategies

العمل باتجاه عكسي Working Backwards

رغم كثرة استخدامنا لهذه الاستراتيجية في قضايا اتخاذ القرارات ببحثنا اليومية، فليس من الطرق الفطرية استعمالها عندما نريد أن نعالج مسألة رياضية.

نستخدم هذا المنهج عند أعداد مخطط لجملة من المهام التي ينبغي استكمالها تحت سقف زمني محدد. بصورة عامة، تكون نقطة بداية عملنا فيما ينبغي فعله، والزمن المطلوب لإكمال جميع الأعمال، وكما هو الوقت الذي تستغرقه كل مهمة من المهام. بعدها سنبدأ العمل باتجاه عكسي عند تحديد البعد الزمني لكل مهمة، لكي نستطيع الوصول إلى الوقت المناسب لشرعنا بالعمل.

تستخدم استراتيجية العمل باتجاه عكسي، أيضاً، على نطاق واسع في تحريات المرور السائدة بالحياة اليومية. فعندما يتحرى رجل الشرطة حادثاً لسيارة، ينبغي أن يعمل باتجاه عكسي مبتدئاً بزمان الحادث لكي يتبين ما هي طبيعة الأسباب، وأي سيارة انحرفت فجأة قبل الاصطدام، ومن ارتطم بالآخر. ومن من السائقين كان مخطئاً، وما هي ظروف الجو في وقت حصول الحادث، وغيرها من تفاصيل التحري، والتي يمارسونها لإعادة صياغة مفردات الحدث المكاني والزمني المصاحبة للحادث. عندما نمنع النظر بالإجراءات التي تظهر بوضوح في كرايس الطلبة، ويكثر من تمارين كتبهم المنهجية، سنلمس وجود تقانات مفيدة بين ثناياها. واسوء الحظ، فإن هذه الأمور تعد صحيحة ومحتومة ويسلم بها جدلاً، ولا تلفت النظر إلى انتباه الطلبة.

المجموع	عدد الإضافات	Addends المضاف
1	1	1
4	2	1+3
9	3	1+3+5
16	4	1+3+5+7
25	5	1+3+5+7+9
36	6	1+3+5+7+9+11

يظهر الجدول بوضوح أن مجموع (n) من الأعداد الفردية الأولى هو (n^2) وعليه سيكون حل مسألتنا، ببساطة هو $20^2=400$.

مرة ثانية، إن اكتشاف نمط سائد (بالطبع، إن كان موجوداً) سوف يكون مفيداً إلى حد بعيد في حل المسائل.

تبني أسلوب آخر

Adopting a Different Point of View

إن هذه الاستراتيجية هي إحدى الطرق المفيدة التي تتطلب "إجبار" نفسك على محاولة حل المسألة عن طريق التفكير بها من عدة اتجاهات. تأمل المسألة الخاصة بمصبية تتألف من 25 فريقاً يحاولون إيجاد عدد المباريات الواجب ممارستها لتحديد البطل Champion في التسقيط الفردي Single-elimination لدورة رياضية.

إن حل الطلبة الذين يجابهون بهذه المسألة سوف يكون، بالتأكيد، محاكاة Simulate الموقف فيهدمون بخروج 12 فريق بعد الجولة الأولى (تتطلب خوض 12 مباراة)، وبمعداتها يتم اعتبار الفائزين فقط، مع ترك الخاسرين ينسحبون من الدوري. إن هذا المنهج بالمعالجة سيؤدي بنا إلى الحل الصحيح، رغم كونه مملاً إلى حد ما. إن تبني أسلوباً جديداً وبمنظور مختلف، سيكون باعتبار عدد الخاسرين، بمعنى آخر، ما هو العدد اللازم من الخاسرين في هذا الدوري؟. ينبغي أن يكون هناك 24 خاسراً لكي تحصل على البطولة، وعدد المباريات المطلوبة للحصول على 24 خاسراً هي 24 مباراة بالطبع. إذن قد تم حل المسألة بسهولة ويسر عندما استخدمنا منهجاً آخر في الحل. في حياتنا اليومية، تساعدنا المناقشة الدائرة مع أحد الأصدقاء على اعتبار وجهة نظر ومنهج صديقاً كأسلوب آخر لحل المسألة التي تشخص أماننا. وفي حالة المناظرة تكون هذه الاستراتيجية الأفضل على الدوام.

إن توضيحاً آخر يظهر أهمية هذه التقانة والفوائد المترتبة عن استخدامها، وسيكون حول أخذ الحضور في صف ما. وبدلاً من قراءة أسماء الطلبة الحاضرين، تأمل إمكانية تبني أسلوباً

مثل سعيهم لإيجاد طريقة التنفيذ Modus Operandi والتي قد ترشدكم إلى مجرم محدد.

ويستثمر العلماء المشتغلون في البحوث الطبية اكتشاف استراتيجية نمط يتيح لهم تثبيت وفصل المتغيرات المتشابهة، بحيث يثير استنتاجات حول فيروس محدد أو يكتريها يسمعون إلى اختباؤها. إن البحث عن نمط في مسألة رياضية تفكرت إلى إيجاد نمط يسهم في حلها، لا يمثل مجموع ما في تقانة حل المسائل هذه من تفاصيل.

إن تقانة إيجاد نمط ما بمسألة يمتاز بأهمية خاصة عندما لا تستلزم المسألة إيجاد نمط تأمل المثال الآتي:

مسألة Problem

جد مجموع الأعداد الفردية العشرين الأولى.

الحل Solution

تتطلب المسألة عملية جمع بسيطة، وإن استخدام آلة حاسبة سيجعل المهمة عادية ومبتذلة، بيد أنها تستلزم وقتاً لا بأس به.

إن العدد الفردي العشرين، تسلسلاً، هو العدد 39، وعليه فإننا نبني احتساب مجموع الأعداد: $1+3+5+7+...+33+35+37+39$.

قد يقر بعض الطلبة ببساطة حل هذه المسألة بكتابة جميع الأرقام الفردية من 1 إلى 39 ثم إضافتهم إلى بعضهم البعض. وقد يلجأ البعض الآخر إلى تطبيق استراتيجية البحث عن نمط بأسلوب يعاقل ما ذهب إليه الطالب الحدث كارل فردريش جاوس عندما كان في المدرسة الابتدائية Elementary School. سينضم هذا الحل إدراج الأرقام العشرين - الفردية $1,3,5,7,...,33,35,37,39$.

والآن لاحظ بأن مجموع العددين: الأول، والعشرين هو: $1+39=40$.

وإن مجموع العددين: الثاني والتاسع عشر هو أيضاً 40 $(37+4)$ ويستمر الأمر بنفس المنوال مع بقية الأعداد. إن هذا الأمر يحتاج إلى إحصاء عدد المرات التي ستضاف بها الأربعمينات لأن هناك منها 20 عدداً ويظهر بأن لدينا عشرة أزواج من الأرقام، لذا بضربنا 10×40 تكون الإجابة النهائية مساوية لحاصل الضرب 400.

يمكننا أن نختر هذه المسألة بواسطة استراتيجية البحث عن نمط ولكن بطريقة أخرى.

ولما كان فاصل المسافة، بالنسبة للقطعة هو 9 أمتار، فإن المسافة المطلوبة هي $720 = 9(80)$ متراً.

إن أفضل طريقة تستخدمها في حل المسألة، هي تلك التي تجعل المتعلم يشعر بالراحة معها، ويستطيع فهمها بصورة حقيقية. قد يعجز بعض الطلبة عن ممارسة مستوى كاف من التجريد عند محاولة فهم الطريقة التي تستخدم استراتيجيات تأمل أسلوب أو منهج آخر بالتعامل مع المسألة.

وقد يشعر هؤلاء الطلبة بارتياح بالغ عند استخدام إجراءات أكثر آلية أو ميكانيكية. بالنسبة للطلبة الذين يفضلون الطريقة الثانية (بالبطع الأكثر أناقة)، فإن على المدرس التزام بيان توضيح تلك الطريقة.

وكما ازداد عدد الحلول التي يعرضها المدرس على طلبته، كلما ازداد مقدار ما يحصل إلى كل متعلم، وسيكون برنامج التدريب أكثر شمولاً واتساعاً. إن هذا التوسع في التدريس هو أمر مرغوب فيه على الدوام بوصفه مظهراً من مظاهر الإثراء المرغوبة.

حل مسألة أبسط—مماثلة

Solving A Simpler Analogues Problem

إن إحدى الطرق التي تظهر، في بعض الأحيان، بوصفها الأكثر وضوحاً، هي تلك التي تحيل المسألة المطروحة إلى أخرى أكثر سهولة بالحل، وعند حل هذه المسألة المساعدة، وتوفر البصيرة المطلوبة لحل المسألة الأصلية.

إن هذه الاستراتيجية الخاصة، حل مسألة أبسط—مماثلة، يمكن أن يرجع إليها بوصفها تفصيلاً دون فقدان العمومية. أي، إننا لم تطرح أية محددات في المسألة، يمكننا اختيار حالة خاصة للموقف المطروح لفرض الاختبار.

رغم أن المثال الآتي، يبدو بأنه يطوف حول تخوم الدقة Exactness، فإنها تشكل طريقة عملية للتعامل مع المسائل اليومية التي لا تفكر إلى إجابات دقيقة.

عندما يسافر الأمريكيون إلى الخارج، يجنون بأن درجة الحرارة تعطى دائماً بالدرجات (المئوية) السيليزية Celaius. لذا ينبغي عليهم تحويل درجة الحرارة السيليزية إلى الدرجة الحرارية الأكثر استخداماً لديهم بقياس فهرنهايتي Fahrenheit Scale.

وبدلاً من استخدام الصيغة الشائعة:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

يمكنهم تقريب النتيجة بواسطة مضاعفة درجة الحرارة

آخر لاستعراض وإحصاء المتغيين، وسيكون البقية هم الحاضرون.

إن توضيحاً آخر سيسهم في مساعدتك على تقدير هذه النقطة والميل نحو توظيفها. تأمل المسألة الآتية:

مسألة Problem

تعبت قطرة فأراً، يبعد عنها بـ 160 متراً. فإذا علمت بأنه كلما يمدو الفأر 7 أمتار، فإن القطرة تعدو مسافة 9 أمتار. فما هي المسافة التي تقطعها القطرة لكي تظهر بالفأر المكين؟

الحل Solution

تعد هذه المسألة مثلاً نموذجياً على المسائل الحركة المنتظمة Uniform Motion، بيد إنها تحوي على جانب غير متسق: وهو عدم إيجاد سرعة عدو القطرة أو الفأر بالطريقة الشائعة (متر/دقيقة) أو (متر/ثانية). لذا لن نتوقع حلاً وشيكاً من كتاب منهجي تقليدي. ينبغي على الطالب الانتباه إلى أن السرعة النسبية، قد توفرت بالمسألة، نظراً لأنه مهما اختلفت الفاصلة الزمنية. سواء كانت ثانية، أو دقيقة، أو ساعة، فإن السرعة يمكن تعريفها (على سبيل المثال) 9×7 أو 7×9 متر/دقيقة (أو أي نوع من الفواصل الزمنية).

حالاً توصلنا إلى اتفاق يصد هذا التعقيد أو المضاعفة Complication يمكن أن تحل بقية المسألة بالطرق الاعتيادية. ألا وهي، إذا كانت المسافة التي سيقطعها الفأر هي d ، ستكون المسافة التي سيقطعها القطر $(d+160)$.

لذا فإن الزمن الذي سيدعو فيه الفأر هو $\frac{d}{7x}$ ، وإن الزمن الذي سيدعو فيه القطر هو $\frac{d+160}{9x}$.

ونظراً لتساوي زمني العدو بالنسبة للفأر والقطرة

$$\frac{d}{7x} = \frac{d+160}{9x}$$

ونكون $d=560$

وعلى القطر أن يمدو مسافة $720 = 160+560$ متراً لكي يظهر بفريسته!

يمكننا أن ننظر إلى المسألة بأسلوب آخر.

تكتب القطرة $2 = 9-7$ متراً لكل فاصل مسافة قدره 9 أمتار تقطعها بعوها. لاحتواء فرق مساحة نقطة الابتداء بمباراة العدو بينهما وبالبالغة 160 متراً، ينبغي على القطرة أن تعدو

$$\frac{160}{2} = 80 \text{ فاصلاً.}$$

الحل Solution

نظرا لعدم بيان نوع الشكل الخماسي، نستطيع أن نفترض بأن هذا الشكل إما أن يكون منتظما، أو محاطا بدائرة (يعني، بأن جميع رؤوس الشكل الخماسي تقع على الدائرة) (شكل 2). في الحالة الأخيرة، نلاحظ بأن كل زاوية من زواياه هي زاوية محوطة للدائرة، لذا فإن قياسها يساوي نصف قياس القوس الذي تتقاطع معه، وعليه نحصل على ما يلي:

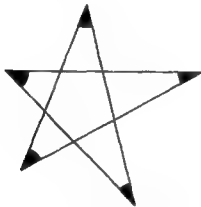
$$m \angle A = \frac{1}{2} \widehat{CD}$$

$$m \angle B = \frac{1}{2} \widehat{ED}$$

$$m \angle C = \frac{1}{2} \widehat{AE}$$

$$m \angle D = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

$$m \angle E = \frac{1}{2} \widehat{BC}$$



شكل (1)

$$m \angle A + m \angle B + m \angle C + m \angle D + m \angle E = \frac{1}{2} (m \widehat{CD} + m \widehat{ED} + m \widehat{AE} + m \widehat{AB} + m \widehat{BC})$$

هذا يعني، بأن مجموع قياس زوايا الرؤوس (القيم) يساوي نصف قياس الدرجات لمحيط الدائرة، أو 180° . مرة أخرى، لا يوجد أي فقدان بالعمومية بأن نجيز الشكل الخماسي - غير المحدد بافتراض وضع أكثر فائدة. والآن، فإن التفسير قد جعل المسألة أكثر سلاسة (وقابلة للحل ببس) أن تبني أسلوبا آخر في المعالجة قد وفر لنا مسألة أكثر بساطة، ومسألة معادلة للحل، مسألة سوف ترشدنا إلى حل مباشر وسريع للمسألة الأصلية.

يمكن استخدام حالة خاصة، أخرى، لبيان هذه الاستراتيجية، والتي ستفترض بأن الشكل الخماسي شكل منتظم، ثم نجد مجموع الزوايا (حيث تمتلك كل زاوية منها نفس القياس).

السيكلية المعطاة ثم إضافة 30 درجة إليها.

رغم أن الدرجة الفهرنهايتية هي مقارنة لحد ما، لكنها مناسبة وكافية للاستخدامات والأغراض اليومية. لقد رأينا، هنا، بأن حل مسألة أكثر بساطة، قد قادتنا إلى إجابة مفيدة. تستخدم هذه الاستراتيجية، في معظم الأحيان، لجعل المسألة أسهل تناولا عن طريق استبدال بعض الأرقام أو المتغيرات بأخرى أكثر سهولة ومن ثم العودة إلى الورا للمسألة الأصلية.

على سبيل المثال، في بعض الأحيان تظهر المسألة كأنها مربكة بشكل غير مألوف، ولكن قيامنا بتأمل حالة أكثر بساطة للموقف الطروح، ستسهل عملية التعامل معها وإدارة متغيراتها.

خذ على سبيل المثال المسألة (٣) الآتية:

مسألة Problem

$${}_x P_r = \frac{((25!))!}{((3!)!)} \quad \text{إذا كان}$$

ما هي قيمة $x-y$ ؟

الحل Solution

من النظرة الأولى إلى المسألة، يبدو بأن مجموعة المضروب Nest of Factorial تورث إرباكا وقتا. وباعتبار مسألة أكثر بساطة، حيث: ${}_7 P_3 = \frac{7!}{(7-3)!}$ نلاحظ بأن المقام Denominator هو المقدر بالدور الأساسي في احتساب قيمة $x-y$. لذا فإنه ينبغي علينا احتساب العامل $3!$ والذي يساوي 720 للحصول على الجواب. إن فحص مسألة مشابهة أكثر بساطة، أعطانا المفتاح المطلوب للحل، وبالخصوص، أن البسط لا يلعب أي دور ملموس في الإجابة عن السؤال. إن المسألة الآتية هي مثال آخر على حل مسألة مشابهة تمتاز بكونها أكثر سهولة وبساطة.

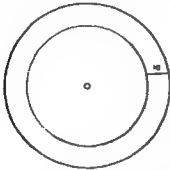
مسألة Problem

إذا علمت بأن مجموع الزوايا في جميع الإشكال الخماسية Pentagrams (يعني، نجوم بخمسة أركان) هو عدد ثابت، احسب مجموع هذه الزوايا (كتلك الموجودة في شكل 1).

لوقت، وميزانية لاستثماراتها المالية، وأمور أخرى مشابهة. لكي نذكر قيمة هذه التقنية وتتمس فوائدها الجمّة تأمل المسألة الآتية.

مسألة Problem

تتبع دائرتان متحدتان المركز عن بعضهما بـ 10 وحدات كما في الشكل المبين أدناه. ما هو الفرق بين محيطي هاتين الدائرتين؟



الحل Solution

إن الطريقة المباشرة - التقليدية لحل هذه المسألة تتجه صوب إيجاد قطري هاتين الدائرتين، وإيجاد محيطهما، ثم إيجاد الفرق بينهما.

بما أن أطوال أقطار هاتين الدائرتين لم يذكر في المسألة المطروحة، فإنها أكثر تعقيداً، لحد ما، من المعتاد.

افترض أن d يمثل قطراً الدائرة الصغيرة، لذا سيصبح قطر الدائرة الكبيرة $d + 20$. إن محيطي الدائرتين سيكون $d\pi$ و $\pi(d + 20)$ على التوالي. في ضوء ذلك سيكون الفرق بينهما $\pi(d + 20) - \pi d = 20\pi$

إن الإجراء الماهر سوف يتوجه صوب استخدام حالة قصوى. دع الدائرة الأصغر من هاتين الدائرتين، تزداد صفراً لحين تصل إلى الحد الأقصى بصغرهما فتتحول إلى "نقطة دائرية". وفي هذه الحالة ستصبح مركزاً للدائرة الأكبر، وستتحول المسافة الموجودة بينهما لتصبح نصف قطر الدائرة الأكبر.

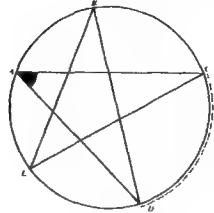
إن الفرق بين طول محيطي هاتين الدائرتين تحول الآن إلى محيط الدائرة الكبيرة، وهو 20π .

رغم أن النهج قد أثّرنا نص الجواب، يمكنك ملاحظة كيف أن الحل التقليدي قد تطلب عملاً كبيراً وذلك يأخذ الفرقين بين أطوال محيطي الدائرتين.

إعداد رسوميّات (عرض مرئي)

Making a Drawing (Visual Representation)

في هذا القسم سنحاول بيان استخدام الرسوميّات لحل



شكل (2)

اعتبار الحالات القصوى

Considering Extreme Case

لتحليل بعض المواقف، سواء من خلال منظور رياضي، أو منظور من نوع آخر، يبدو بأن تأمل الحالات القصوى أمراً مفيداً.

إن إبقاء بعض المتغيرات ثابتة، بينما تتغير الأخرى باتجاه قيمها القصوى، قد يوفر في بعض الأحيان استيعاباً مفيداً بموقف ما. قد تحل بعض المسائل بسهولة بالغة عند اعتبار الحالات القصوى للمواقف المطروحة في مثل هذه الحالة، وينبغي أن يكون المرء شديد الحرس في اعتبار الحالات القصوى التي لا تغير طبيعة المتغيرات الحاسمة في المسألة.

يضاف إلى ذلك، ينبغي أن نكون متيقظين بعدم تغيير المتغير الذي يحمل تأثيراً على غيره من المتغيرات.

إن الاستخدام المثالي لاعتبار الحالات القصوى يعد من أكثر الاستراتيجيات المفيدة في حل المسائل الرياضية بالإضافة إلى تلك التي تحتشد بكثرة في حياتنا اليومية.

إننا نكثر من استخدام هذا النوع من الاستنتاج عندما نكون موشكين على أن نقابل شخصاً آخر في موقف مفاوضات Negotiation. افترض أنك تشعر بأن موقفك هو الموقف الصائب، لكنك قلق من دفع موضوعك بعيداً جداً بحيث ينجم عن ذلك مشاكل أخرى.

بصورة عامة، فإننا نمتحن مثل هذه المواقف في ضوء القرينة، كيف ستكون "أسوأ سيناريوهات الحالة". أي، ما هو أسوأ أمر نتوقع حدوثه إذا كانت محيطك ستعاني انحرافاً؟ بعدها سوف نستمر إن التجل في حدوث سيناريو أسوأ حالة هي شكل من أشكال اعتبار الحالة القصوى.

إننا نستخدمها بكثرة في حياتنا اليومية عندما نضع ميزانية

① ② ③ ④ ⑤

لذا فإن كل فاصل زمني ينبغي أن يستغرق $\frac{5}{4}$ ثانية. والآن دعنا نتوجه صوب اختبار الحالة الثانية:

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

هنا نستطيع أن نرى من المخطط بأن قمرات الجرس العشرة سوف ينشأ عنها 9 فواصل زمنية. وبما أن الفاصل الواحد يستغرق $\frac{5}{4}$ ثانية، فإن الفترة الزمنية الكلية التي يقرع خلالها جرس الساعة عند الساعة العاشرة ستكون مساوية $\frac{5}{4} \times 9$ أو $11\frac{1}{4}$ ثانية.

التخمين الذكي والاختبار (مقدمات التقريب)

Intelligent Guessing and Testing (Including Approximation)

تعرف هذه التقنية أيضاً بطريقة "المحاولة - والخطأ" Trial-and-Error، ولكن في هذه التسمية مبالغة في تبسيطها، لأن هذه الاستراتيجية تتسم بكونها معقدة لحد ما.

إن استراتيجية التخمين الذكي والاختبار تكون مفيدة بشكل ملموس عندما تظهر الحاجة إلى حصر قيم المتغيرات لجمال الحل أكثر طواعية وانقياداً. وسيكون من المفيد أيضاً عندما تكون الحالة العامة أكثر تعقيداً، ولحد بعيد، بالمقارنة مع الحالة الخاصة. بواسطة التقريب نستطيع محاولة تضيق الخيارات في معنى للتركيز على الجواب الصحيح. وباستخدام هذه الاستراتيجية، فإننا نناشر تخميناً، ثم نبدأ باختباره قبالة ظروف المسألة المطروحة.

إن كل تخمين تال قد استند إلى المعلومات المستقاة من اختبار التخمين السابق.

حاول أن تبقي في ذهنك، على الدوام، حقيقة وجود فرق كبير وملوس بين "التخمين" و "التخمين الذكي".

إن حل معادلة ما، هو بالحقيقة، لا يزيد عن كونه شكلاً من أشكال التخمين الذكي والاختبار. إن ما نقوم به في الحل هو وضع من التخمين التقدم والوصول إلى الحل بذلك ببعض من الحرفة الرياضية. إنه جزء من الفحص أو التحقق للاختيار أو التخمين الذي هو في الواقع عمل صائب. إن الاستخدام الشائع لهذا الإجراء يشابه تحريك الجمرات الذي نقوم به عندما نطهو شريحة من اللحم ونلصقها للتأكد من كونها صالحة للتقديم. إننا ندرس مقياس درجة الحرارة Thermometer في

المسائل حيث لا يكون العرض المرئي شائع الاستخدام بناء على طبيعة المسألة المطروحة.

تظهر في حياتنا اليومية، مجموعة من القرارات التي نشأت بناء على العرض المرئي للبيانات والعلاقات، حيث تسلك هذه التقانة دوراً أكثر سهولة مما يتوقع لها كمعصر من الموقف. في علم الاجتماع، على سبيل المثال، هناك مخططات اجتماعية Sociograms تعكس، بصورة مرئية، العلاقات الداخلية للمجموعة.

إن نظرية المخطط Graph Theory توفر مناخاً مناسباً لفحص العلاقات الهندسية، والتي تعتمد على الموقع والتوافق المتبادل Interdependence أكثر من اعتمادها على الحجم والشكل.

إن المسألة المشهورة لـ "جسور كونجسبرغ" Bridges of Königsberg يمكن حلها أو توضيحها بسهولة عن طريق اعداد مخطط شبكي Network Diagram كعرض مرئي للموقف (انظر الوحدة الإثرائية 96). إننا نستخدم المخططات أو المرتسمات بكثرة في حياتنا اليومية، فنستخدم الخارطة Map لتحديد كيفية الوصول إلى هدف محدد، ونقوم في أحيان أخرى بعمل مخطط أولي لخرائط الشخصية لتوضيح المسار أمام شخص آخر، عندما لا نفلح في وصف الرحلة بكلماتنا وعبارتنا.

إن رسم صورة ما يجعل الوصف أكثر وضوحاً، وأسهل اتباعاً. وبعد كل هذا، قد قيل لمرات عديدة بأن صورة واحدة تعدل أكثر من 1000 كلمة !.

تأمل المسألة الآتية، والتي لا يتوقع أن يرسم مخطط أثناء حلها !.

مسألة Problem

في الساعة الخامسة، قرع جرس الساعة 5 مرات خلال خمسة ثوان. كم تستغرق نفس الساعة، وبفرض السرعة، لكي تقرع 10 مرات في الساعة العاشرة ؟ (افترض بأن قرعة الجرس ذاتها لا تستغرق وقتاً).

الحل SOLUTION

إن الجواب لن يكون 10 ثوان !. فطبيعة هذه المسألة لن تؤدي بنا إلى التفكير بضرورة إعداد مخطط رسومي. ولكن، دعنا نستخدم مخططاً رسومياً للموقف لكي نرى بدقة ماذا يحدث في ثانيا هذه المسألة. في الرسم، تمثل كل نقطة قرعة جرس، وعليه سيظهر لنا في الشكل الآتي خمسة نقاط تمثل الثوان الخمسة مع أربعة فواصل زمنية تقيم بينها.

$$100x=400$$

$$x=4$$

$$y=9$$

إن العددين الصحيحين هما 4 ، 9.

يبدو واضحاً بأن هذا الإجراء بحاجة إلى معرفة في المعادلات والجذور، إضافة إلى مألوفة جبرية متأنية. وكختيار بديل للحل، دعنا نستمر استراتيجياً التخمين الذكي والاختيار بحل هذه المسألة. بما أن مجموع الجذور التربيعية للعددين الصحيحين هو 5، فإن الجذور التربيعية لكل منهما هو 4 و 1 أو 3 و 2. لذا فإن الأعداد يمكن أن تكون 16 و 1، أو 9 و 4. ولكن فقط العددين 9، 4 يكون حاصل الفرق بينهما 5، لذا فإن هذا الجواب هو الجواب الصحيح للمسألة.

احتمساب جميع الاحتمالات

Accounting for All Possibilities

إن اعتبار جميع الخيارات قد يكون نهجاً فعالاً لحل مسألة ما. بالرغم من وجود حالات لا تعد فيها هذه الاستراتيجية من أكثر الإجراءات تعقيداً، فإنها قد تكون الأسهل استخداماً نظراً لكونها غير مهالفة في التجريد. من ناحية أخرى، فإن قضية احتساب جميع الاحتمالات هي الأكثر حسماً في استخدامات هذه الاستراتيجية.

إن افتقار المرء إلى إجراء منظم لاحتساب جميع الاحتمالات، سيؤدي بالاستراتيجية إلى الإخفاق أو الانحراف. إننا نستخدم على الدوام استراتيجية حل المسائل هذه في حياتنا اليومية دون أن نكون مدركين لتوظيفنا إياها في هذا القطاع وذاك.

افترض انه طلب منك الاشتراك في لقاء بأحد الفنادق الذي يبعد حوالي 150 ميلاً. إن الطريق الذي يقرر سلوكه معظم الناس، كأفضل وأسرع طريق إلى اللقاء سيكون في ضوء إعداد قائمة سبل النقل المحتملة (يعني سواء كانت الوسيلة: قطاراً، أو طائرة، أو سيارة، أو حافلة نقل ركاب، أو هليكوبتر، ... الخ)، أما كتابة أو عقلياً، ثم باعتماد مبدأ الحذف، أو الاختيار المباشر (في ضوء الموازنة على أساس الكلفة، الوقت المستغرق، ... الخ)، مستعد إلى اختيار الأسلوب الأمثل.

عندما يكون أداء برنامج الحاسوب سيئاً، ونريد أن نحدد السبب، فإننا، بصورة عامة، نبدأ بإعداد قائمة (ربما في ذهن، ثانية) تحوي مختلف الأسباب المحتملة لسوء الأداء. بعدها، ستقوم بفحص النقاط الدرجة على القائمة، واحدة فواحدة، حتى تجد السبب الذي يمكن وراءه سوء الأداء.

لب قطعة اللحم بدلاً من قطع الشريحة قبل أوان فتحها. نستطيع أن نقرأ درجة الحرارة في لب شريحة اللحم للتأكد من تخميننا الشخصي، والذي سيصبح لنا إمكانية الحكم على تحديد حالة نضجها. إننا نخمن ونختبر.

إذا كان قد ظهر بطلان تخميننا الأولي بأن الشريحة ناضجة عند اختبارنا للتخمين بواسطة مقياس درجة الحرارة، فسوف نستمر لعملية طهي اللحم لبضعة دقائق أخرى، لحين نصبح جاهزين لإصدار تخمين جديد.

إن نفس هذا الإجراء يقبناه النجار الذي لا يستطيع الحصول على قياسات دقيقة لقطعة خشب ذات شكل خاص لفرض وضعها في مكان محدد. سيقوم هو، أيضاً، بقياس حجم وشكل قطعة الخشب، وبمدها، عن طريق الاختبار المستمر للاستمها، وإعادة تغيير شكلها، سوف يصل إلى حل هذه المسألة الإنشائية.

إن السؤال المطروح "جد الإعداد الثلاثة - المتتابعة والتي حاصل ضربها 24"، يفكر إلى حل جبري يقسم بتحد كبير. إن المعادلة ستكون كما يلي:

$$(x)(x+1)(x+2)=24$$

وهي معادلة تكعيبية يصعب حلها. ولكن باستخدام استراتيجية التخمين الذكي والاختيار، نستطيع إيجاد الأعداد الثلاثة بسهولة: 2، 3، 4. يمكننا العثور على مثال أكثر واقعية عن هذه الاستراتيجية في المسألة الآتية.

مسألة Problem

جد العددين الصحيحين-الموجبين اللذان حاصل الفرق بينهما 5، وأن مجموع جذريهما التربيعيين هو 5 أيضاً.

الحل Solution

إن النهج التقليدي للحل يلجأ إلى صياغة منظومة من المعادلات كما يأتي:

ليكن $x =$ العدد الصحيح الأول.

وليكن $y =$ العدد الصحيح الثاني.

إن،

$$y=x+5$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$$

بتربيع طرفي المعادلة، نحصل على:

$$x + x + 5 + 2\sqrt{x(x+5)} = 25$$

بالتبسيط:

$$2\sqrt{x(x+5)} = -2x + 20$$

بتربيع طرفي المعادلة، ثانية، نحصل على:

$$4x^2 + 20x = 4x^2 - 80x + 400$$

هناك 11 حالة منها 2 وعليه، فإن الاحتمالية المطلوبة هي

$$\frac{11}{16}$$

إن توضيحاً آخر حيث يكون استخدام هذه الاستراتيجية مفيد جداً، يمكن ملاحظته في حل المسألة الآتية:

مسألة Problem

في المثلث ABC، $\cos \angle A \cdot \cos \angle B \cdot \cos \angle C > 0$

فما هو نوع المثلث ABC؟

الحل Solution

سيحاول بعض الطلبة تبويض قيم الزوايا A, B, C ثم يحاولوا حل المسألة، بيد أن هذا المنهج يؤدي، في معظم الأحيان، إلى مصاعب جمة. وستقوم بحل المسألة باعتماد مبدأ احتساب جميع الاحتمالات لأنواع المثلثات المختلفة.

1. المثلث ABC قائم الزاوية:

إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية، فسكون قياس إحدى زواياه مساوياً 90°، ونحن نعلم بأن $\cos 90^\circ = 0$.

وعليه فإن قيمة $\cos \angle A \cdot \cos \angle B \cdot \cos \angle C = 0$ وهو متعارض مع مطلوب المسألة.

2. المثلث ABC منفرج الزاوية:

إذا كان المثلث ABC منفرج الزاوية، فسكون قياس إحدى زواياه (دعنا نفترضها الزاوية B) أكبر من 90°،

بينما تكون الزاويتان A, C كلاهما حادة.

وعليه سيكون: $\cos \angle B < 0$

بينما $\cos \angle A > 0$

$\cos \angle C > 0$

إذن: $\cos \angle A \cdot \cos \angle B \cdot \cos \angle C < 0$

ومرة ثانية، هناك تعارض بين النتيجة ومطلوب المسألة.

3. المثلث ABC مثلث حاد الزاوية:

إذا كان المثلث ABC حاد الزاوية، فسكون جميع زواياه حادة أيضاً.

وعليه سيكون: $\cos \angle A > 0$

$\cos \angle B > 0$

$\cos \angle C > 0$

وسيتبع عن ذلك:

$\cos \angle A \cdot \cos \angle B \cdot \cos \angle C > 0$

إذن إن مثلثنا هو مثلث حاد الزاوية.

تنظيم البيانات Organizing Data

ليس غريباً أن نجد طالباً، قد أعيته لحد ما مسألة من المسائل، وأن هذا الارتباك والحيرة قد نشأ عن سوء تنظيم البيانات المستقاة من قضية المسألة وبطريقة تختلف عن

إن نهجاً مقارباً يستخدم عندما نحاول تحديد سبب عدم عمل الصباح، سنقوم بإدراج قائمة بأهم الأسباب المحتملة لسوء الأداء (يعني، سلك رديء، أو احتراق بصلة الصباح، أو عطب خارجي، ... الخ)، بعدها سنبدأ باستبعاد النقاط التي لا تعاني من خلل في الأداء، واحدة فواحدة، حتى نضع أيدينا على سبب الخلل.

عندما يتخذ الناس مقعداً في مطعم من المطاعم، فإنهم يسكون بقائمة المأكولات التي تسمح بأصناف متعددة من المقبلات، والسلطات، وأطباق الطعام الرئيسية، والحلويات. ويتوقع أن يعمدوا إلى اختيار الأطباق التي توفر لهم وجبة متكاملة.

إن الإجراء الاعتيادي الذي يتبناه معظم الناس في اختيار الطعام، يتألف من قراءة جميع محتويات قائمة المأكولات، ثم وضع طلب يزورهم بوجبة متوازنة، ومشبعة.

بالرغم من عدم إدراك زبائن المطعم فإنهم بالحقيقة يستخدمون استراتيجية احتساب جميع الاحتمالات في اختيار وجبة العشاء اللذيذة.

توجد في حقل الرياضيات أمثلة متعددة حيث تكون استراتيجية احتساب جميع الاحتمالات الأكثر تفضيلاً من غيرها.

تأمل المسألة الآتية:

مسألة Problem

إذا قذفت بأرملة قطع نقدية، فما هي احتمالية ظهور وجهين. على الأقل؟

الحل Solution

بصورة طبيعية، فإننا نستخدم طرائق حساب احتمالية الحصول على هذا الجواب بسرعة ملحوظة - وإذا كنا على دراية بالصيغة المناسبة التي ينبغي استخدامها.

ومع ذلك، فإن من السهل عمل قائمة بجميع الاحتمالات (فضاء العينة Sample Space) ثم البدء بتأثير تلك التي تتطابق مع المطلوب، وهو ظهور وجهين على الأقل.

أدناه القائمة الشاملة لجميع الاحتمالات الممكنة:

HHHH	HHHT	HHTH	HTHH
THHH	HHTT	HTHT	THHT
HTTH	THTH	TTHH	HTTT
THTT	TTHT	TTTH	TTTT

إن الأحداث المؤشرة بخط عريض (Bold) هي تلك التي يظهر فيها وجهان أو أكثر وتحقق الشروط المطلوبة.

حيث $x =$ قيمة أحد العددين.

$(41 - x) =$ قيمة العدد الآخر.

$y =$ حاصل ضرب العددين.

وعند استخدامهم لأسلوب رسم مخطط بياني، سيحصلون على قطع مكافئ بعدها سيتمكنون من إيجاد النقطة القصوى في القطع المكافئ في إيجاد القيمة المطلوبة.
من ناحية ثانية، نستطيع حل هذه المسألة، ببساطة، عن طريق تنظيم البيانات على الشكل الجدولي.

الأعداد	حاصل الضرب	
1	40	40
2	39	78
3	38	114
:	:	:
15	26	390
16	25	400
17	24	408
18	23	414
19	22	418
20	21	420

إن أكبر حاصل ضرب ممكن هو (420).

إن أنموذجاً آخر على تنظيم البيانات يمكن ملاحظته في الحل الخاص بالمسألة التالية.

مسألة PROBLEM

إذا كانت كلفة A من التفاح تساوي D من الدورات، فما هي الكلفة بالسننتات لـ B من التفاح بنفس القيمة؟

الحل SOLUTION

هناك مجموعة من الطرق التي يستطيع الطلبة بواسطتها التعامل مع هذه المسألة. في كثير من الأحيان، سيستخدمون الأعداد بدلاً من الرموز، ثم يحاولوا إعادة إقحام الحروف لإيجاد الجواب النهائي.

إن هذه الطريقة قد تؤدي ببساطة إلى إرباك وحيرة، ولسوء الحظ، إلى إجابة غير صحيحة.

لذا فقد قد تعلم بعض الطلبة على التنقيب عن أسعار الوحدة ثم يتساءلون طريقة من هذه النقطة. وهذا الأسلوب، يؤدي أيضاً إلى إرباك، كقاعدة عامة. وعليه فإن مسألة بهذا الشكل يمكن أن يكون أفضل حل لها عن طريق تنظيم البيانات بطريقة تضيي عليها معنى.

سنستخدم، هنا، التناسب مع ملكة الحس العام

الأسلوب الذي عرضت فيه.

إن عملية إعادة الترتيب هذه، قد تكون مرثية، أو قد تكون ببساطة طريقاً بديلاً لأسلوب معاينة الموقف.

وإن استراتيجية حل المسائل هذه، قد تكون مرثية، أو قد تكون ببساطة طريقاً بديلاً لأسلوب معاينة الموقف.

إن استراتيجية حل المسائل، هذه، تقدم نفسها باستمرار في عمليات التخطيط التي تسود حياتنا اليومية. إننا نقوم بتنظيم البيانات، مرثياً، عندما نعمل على ميزانية المنزل، ونرتب قوائم المدفوعات على شكل مجاميع. كذلك، عندما نجابه بعدة مهام، ومشكلة اختيار أي طريق أفضل للتعامل معهم، آنذاك نسعى إلى تنظيم المهام وفقاً للزمان، أو المكان، أو الصعوبة، أو في ضوء خصائص أخرى تمتلك أهمية ملموسة.

على سبيل المثال، إننا نستخدم استراتيجية تنظيم البيانات عندما نرغب بالاستثمار الأمثل للوقت المتاح في جولة تسوق. فنقوم بإعداد قائمة بالمواد التي نرغب بشرائها، ثم نعد إلى تنظيمها بحيث نتجنب ازدحام الناس في بعض مواطن السوق، أو نقلل زمن التنقل بين المخازن المختلفة. بنفس الطريقة، فإن السائح الذي يروم زيادة مساحة مشاهداته، سوف يمسد إلى تنظيمها حسب الموقع.

عندما نعد إلى لم شمل المعلومات المطلوبة لفرض إعداد ضرائبنا السنوية، تصبح طريقة: تنظيم الوصلات الشخصية، والشيكات، ونماذج W-2، ونماذج 1099، وغيرها، أمراً حرجاً للغاية.

إذا لم نحسن تنظيم هذه الأوراق والوثائق، ستصبح عملية إملأ نماذج الضريبة وقوائمها بصورة كفوءة ودقيقة أمراً مستحيلاً. إن عقبة اجتياز اختبار بالتاريخ، تعتمد في بعض الأحيان، على قدرة المرء على تنظيم البيانات.

إن تنظيم البيانات قد يساعد أحياناً على تحليل المفاهيم، وإنشاء مواضيع شائعة في التاريخ، والتي قد تؤدي بدوره إلى تحديد سياسة أو مبدأ من المبادئ.

إن مثل هذا السؤال قد يظهر في اختبار ما، بحيث أن الطالب الذي يمتلك القدرة على تنظيم البيانات والآراء أولاً، ثم يعتمد على تحليلها، سيكون ذو ميزة باهرة وجلية.

إن تنظيم البيانات في حل مسألة رياضية قد تظهر أهميتها جلية في عدة طرق، ويمكن أن نلاحظ إحداها في حل المسألة الآتية.

مسألة Problem

جد أكبر حاصل ضرب ممكن لعددين طبيعيين مجموعهما 41.

الحل Solution

يستطيع الطلبة صياغة المعادلة $y = x(41 - x)$

نقاشا مع زميل أو مدير لنا.

إن قوة البرهان أو الحجة تعتمد، بصورة دائمة، على صحة الاستدلال المنطقي تعني الفرق القائم بين نجاح وفشل برهان من البراهين.

إن أسلوب وضع البرهان وطرحه قد يؤثر على نجاح أو التقدم بالعمل، بالإضافة إلى المرتبة.

يضاف إلى ذلك، إن النجاح أو الفشل بصفة تجارية يعتمد إلى حد كبير على براعة المرء بالاستدلال المنطقي. إن كل مسألة رياضية، تقريبا، تعامل معها تتضمن درجة ما من الاستدلال المنطقي، وحتى عندما نميل إلى اختيار أكثر استراتيجيات حل المسائل كفاءة. إن المنطق الصوري Formal Logic هو الأساس اللتين الذي تركز إليه الرياضيات البحثية Pure Mathematics والبراهين. بصورة عامة، فإن الاستدلال المنطقي الذي لا يبدو بصورة برهان يساعدنا على تحليل المسألة.

عندما يكون أعداد البراهين مناسبة للطلبة، نقترح بأن يتم إعطائهم مسائل "برهن - أو - انقض برهان Prove-or-Disprove" والتي ستكون كافية بالنسبة لهم على تنمية عادة امتحان الحدس قبل محاولة البرهنة على صحته.

إن هذا الأسلوب هو الجزء الطبيعي الآخر لدى الرياضيين الذين يجابهون حدسا غير مألوف. ولنا حاجة إلى أن نقول، بأن بعض المسائل المطروحة على طاولة "برهن-أو انقض البرهان" سوف تنتهي إلى نقطة يمتنع فيه برهانها.

مسألة PROBLEM

برهن على استحالة المكانية تنطية رقعة الداما بواسطة خمسة عشر 3×1 من قطع حجارة الدومينو الرباعية ذات الشكل L (إن حجارة الدومينو الرباعية Quadrominoes هو اصطلاح يؤشر إلى أشكال تتألف من أربعة مربعات متصلة، بحيث أن المربعات للتلاصق تشترك بزاوية) وواحدة أخرى تتألف من 2×2 مربع من نفس الحجارة.

الحل SOLUTION

إن هذه المسألة هي ملحق سار جدا للمسألة التي عرضت سابقا، والمتعلقة بإحدى وثلاثين قطعة من حجارة الدومينو، ورقعة الداما بالزوايا المتقابلة للملغة.

Common Sense. يمكن الحصول على التناسب عن طريق تثبيت نفس وحدات القياس في كل مجموعة كسرية.

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{كلفة A من التفاح}}{\text{كلفة B من التفاح}} = \frac{100D}{x}$$

لاحظ بأننا استخدمنا الحس العام في الحصول على الكسر الأخير. نظرا لأن المسألة تتطلب الحل بالسنتات، فقد استخدمنا الكسر بالسنتات كوحدة قياس بدلا من الدولارات. وعليه، عندما سنجد قيمة x ، سنحصل على الجواب أما ما تبقى فهو سهل لا صعوبة فيه.

$$\frac{A}{B} = \frac{100D}{x} \\ x = \frac{100BD}{A}$$

الاستدلال المنطقي Logical Reasoning

عندما تعامل مع الأصدقاء والزملاء، نجد بأن ما نقوله يثير دائما إجابات محددة، وإن هذه الإجابة تؤدي، بدورها، إلى إجابة أخرى، وهكذا.

وإذا حاولنا التنقيب بسهائرو المحادثة، أو طبيعة المناقشة/ البرهان، فإننا بالحقيقة، نستخدم الاستدلال المنطقي. على سبيل المثال، إذا قلت A، فأنك ستوقع أن تكون الإجابة B، والتي ستؤدي بدورها إلى القضية C، والتي تستجيب للقضية D.

إن ممارسة الاستدلال المنطقي بأسلوب مؤثرة سيؤدي إلى تحسين العلاقات القائمة بين الأشخاص وذلك بمساعدته على حل (أو اجتفاف) المشاكل قبل ظهورها.

إننا، بصورة عامة، نلجأ إلى تحليل موقف ما دون أن نعي ما هي العملية الحقيقية التي نمارسها، من جهة ثانية، فإننا نحاول في درس الرياضيات أن نجعل طلبتنا على إدراك تام لهذه العملية العقلية، ونسعى إلى إرشادهم، أو تدريبهم، على التفكير بصورة منطقية.

بما أن البعض قد يميل إلى البرهنة على أن التفكير الاستقرائي Inductive Thinking (يعني، البدء بمجموعة أمثلة جزئية للوصول إلى تعميمات) طبيعيا لحد ما، فإن الصيغة المنطقية للاستدلال بحاجة إلى بعض من التعمير.

في مواقف الحياة اليومية، فإننا نميل إلى الاستدلال المنطقي، بصورة نموذجية، لتخطيط استراتيجيات تصلح لحظة عمل ما، أو قد نستخدمه للبرهنة على نقطة محددة أثارت

يحتوي على أقطار متعامدة، وبأطوال متساوية، والذي يحوي على الأقل، على قطر واحد ينصف القطر الآخر، ينبغي أن يكون مربعاً.

SOLUTION الحل

إن نقض البرهان (بواسطة مثال مخالف) قد يتألف، ببساطة، من رسم طائرة ورقية، متناظرة أفقياً Symmetrically Horizontal وليست متناظرة عمودياً، والتي يكون فيها طول شعاع التقاطع crossbeam مساوياً للشعاع العمودي Vertical Beam.

إن الاستدلال المنطقي يؤدي إلى توفير حجم كبير من العمل والجهد المستنفد في حل بعض المسائل. وقبل أن ننغمس في حل جبري للمسألة، يستطیع المرء أن يتأمل محاولة "الاستدلال بالحدس". إن التوضيحين الآتيين يظهران بوضوح كيف يمكن أن يتحقق هذا الأمر.

مسألة PROBLEM

إن العدد الذي يتألف من أربعة أرقام $x56y$ ، حيث x و y هما الرقمان الأول والأخير على التوالي، يقبل القسمة على 9. فما هي قيمة $x+y$ ؟

SOLUTION الحل

بصورة تقليدية، سيحاول الطالب ببساطة تعويض قيم مختلفة لكل من x و y لكي يرى أي قيمة لهما ستشتر عن جعل العدد يقبل القسمة على 9.

رغم أن هذا الأسلوب هو شكل من أشكال التخمين والاختيار، لكنه ليس كافياً، لذا ينبغي أن ندمجه مع الاستنتاج المنطقي الذي يتعامل مع المعلومات المتوفرة.

نذكر بأنه لكي يكون العدد قابلاً للقسمة على 9، ينبغي أن يكون مجموع أرقامه إحدى مضاعفات 9. وعليه:

$$x+5+6+y=9M$$

$$x+y+11=9M$$

أو

$$8+9=17 \text{ هي } x, y \text{ أكبر قيمة للرقمين}$$

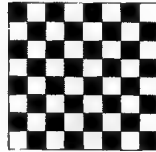
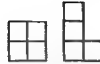
$$28=11+17$$

والعدد 28 لا يقبل القسمة على 9.

هل نستطيع الحصول على 27؟ وفي ضوء ذلك ينبغي أن يكون $x+y=16$ ، و $9+7=16$.

إن حاصل الضرب الأقل - التالي الذي تم احتسابه - رجعيًا من العدد 27 هو 18.

إن $x+y=7$ ، وسيكون مضاعف العدد 9 صغيراً جداً لفي بالشرط ولن نجد سواه، فعليه سيكون مجموع $x+y=16$ أو 7.



عند اختيار النمط اللوني لرقعة الداما المعيارية لن نصل إلى أي استبصار مفيد بهذه المسألة، لأن كل من الشكلين المستخدمين في هذه المسألة يغطيان مربعين باللون الأبيض، ومربعين باللون الأسود.

إن المنطق يأمر بنمط لوني يميز بصورة جلية بين نوعي حجارة الدومينو الرباعية الطروحة في هذه المسألة. ينشأ أبسط أنواع النمط اللوني عن شق مساحة من رقعة الداما (بحيث، على سبيل المثال، يكون لون كل صف معاكساً للصف/أو الصفوف التي تحاذيه).

والآن، فإن كل حجارة دومينو بشكل L ينبغي أن تغطي ثلاثة مربعات من لون واحد، والمربع الرابع سينكفل بغطية مربع واحد من اللون الآخر، بغض النظر عن أسلوب وضعها. أما حجارة الدومينو المربعة فستغطي مربعين من كل لون.

بما أن حاصل ضرب فردي x فردي يثمر عن نتائج فردية، فإن القطع الخمسة عشر ذات شكل حرف L ينبغي أن تغطي عدداً فردياً من المربعات البيضاء، وعدداً فردياً من المربعات السوداء أيضاً. وبما أن حاصل مجموع فردي + زوجي ينبغي أن ينتج عدداً فردياً، فإن عدد المربعات السوداء التي ستغطي بواسطة القطع الستة عشر من حجارة الدومينو المربعة سيكون فردياً أيضاً، وأن العدد الكلي للمربعات البيضاء التي ستغطيها القطع الستة عشر من حجارة الدومينو سيكون بلا ريب، فردياً أيضاً.

لكن عملية الشق سينتج عنها 32 مربعا اسود اللون، و32 مربعا ابيض اللون، لذا فإن التغطية المذكورة لن تكون ممكنة بأي حال من الأحوال.

مسألة PROBLEM

برهن أو انقض برهان قضية أن الشكل رباعي الأضلاع الذي

ابتكار مسائل رياضية

Creating Mathematical Problems

إن التغييرات الحاصلة في اثنتين من سمات اقليدس الخمسة (مسألة التوازي، ولا تناء الخط المستقيم) نجم عنها ثورة مفاهيمية بالرياضيات فتصغرت عن ظهور الهندسات اللاقليدية.

إن تقانة إحداثيات تعديلات صغيرة أو كبيرة في الظروف المحيطة بالمسألة الرياضية "فقط لأجل الاستمتاع بها" لها ثروات مشتركة بين الرياضيين وطلبة الرياضيات. وكانت نتائجها مبهره.

إن تقانة آخر هو امتداد للحقيقة القائلة بوجود ثلاثية فيثاغورية (x,y,z) Pythagorean Triples والتي تحقق $x^2+y^2=z^2$. من جانب آخر، قد لا يتوفر لأحدنا وقت كاف لمحاولة إيجاد الأعداد الصحيحة x,y,z التي تحقق المعادلة $x^3+y^3=z^3$ للعدد الصحيح $n>2$.

بالحقيقة، إن مثل هذه المحاولة ستؤدي إلى القضية المرفقة بـ "نظرية فيرما الأخيرة" (والتي تمت برهنتها بواسطة A-Wiles في حزيران عام 1993 ثم عدلت في تشرين أول من عام 1994).

يمكن تدريب الطلبة على إعداد وحل أسئلة يقومون بإعدادها شخصياً، عن طريق إجراء تعديلات، قد تكون طفيفة على أمثلة موجودة. وعندما ينجح الطلبة في ابتكار مسائلهم الشخصية، يستطيعون، بين الحين والآخر، إعداد مسائل تفوق قدراتهم الذاتية على حلها. وقد تكون بعضها غير قابلة للحل. إن كل مسألة مطروحة قد تحوي على بعض الشروط التي يمكن تغييرها لإعداد أسئلة جديدة، أو إجراء تعديلات على الأسئلة الأصلية.

لذا، فإن على المعلم تحديد بعض خطط-التقييم البديلة لمنع الطلبة فرصة مناسبة لا تقتصر على المطلب التقليدي الذي يهدف دائماً إلى ضمان حلول المسائل بصورة صحيحة، فحسب، ولكن لكي تجعلهم قادرين، أيضاً، على ابتكار المسائل. وخلال بذل هذه الجهود الخلاقة سيبدأ الطلبة، بالفعل، في إدراك ماهية وأهداف المسائل المنتشرة حولهم. ولتوفير مورد مساعد للمعلمين، والمعلمين المحتملين، حاولنا عرض بعض الاقتراحات حول كيفية تغيير مسائل محددة لتتولد مسائل جديدة. ويمكن استخدام هذه الاقتراحات لتوضيح موضوع أنواع التعديلات الممكنة للطلبة لكي يتعمق فهمهم لها.

مسألة PROBLEM

جد جميع أزواج الأعداد الأولية التي يساوي مجموعها 999.

الحل SOLUTION

إن كثيراً من الطلبة سيبدعون الحل باختيار قائمة من الأعداد الأولية ومحاولة اختيار أزواج منها، ثم يلجئون إلى إيجاد حاصل جمعها، ويمادون الكرة لهم يقلحون بالوصول إلى مجموع الإعداد يبلغ 999.

ويبدو واضحاً بأن هذه الطريقة معلة جداً، إضافة إلى ابتلاعها وقتاً طويلاً دون طائل، ولن يكون الطلبة متأكدين تماماً من اختيارهم لجميع أزواج الأعداد الأولية دون أن يقلت أحدها من بين أيديهم.

دعنا نستخدم استراتيجيات الاستنتاج المنطقي لحل هذه المسألة. من أجل الحصول على حاصل جمع فردي لعددتين (أوليين أو غير ذلك)، ينبغي أن يكون أحدهما زوجياً. ونظراً لوجود عدد أولي واحد زوجي هو 2، لذا ينبغي أن يوجد زوج واحد من الأعداد الأولية التي مجموعها 999، وإن هذا الزوج هو 2 و 997.

إن هذه الاستراتيجيات المعقدة، لحل المسائل، ينبغي أن تمارس مع مسائل محفزة تظهر القدرة المتميزة لهذه الاستراتيجيات. ولابد من استخدام أسماء هذه الاستراتيجيات، حيثما استخدمت، لأن البحوث الميدانية قد أظهرت بأن عملية التكرار تؤدي إلى تحسين استرجاع الاستراتيجيات. إننا نقترح الرجوع إلى الكتاب الآتي لأغراض التقوية المطلوبة، ولكي تصبح أكثر ألفة مع هذه التقانات

Posamentier, A.S. and S. Krulik, *Problem-solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher*, Thousand Oaks, CA: Crowin Press, 1998.

متى تعودت على استخدام هذه الاستراتيجيات، حاول أن تنتق عن طرق لتطبيقها على مسائل الكتب المنهجية وتمازيتها، وبالتالي تعميق استخدامها.

كذلك حاول أن تستخدم الاستراتيجيات لإيجاد طرق بديلة للحل، ولكن شريطة أن لا تقتنع، بسهولة، عند تفورك بالحل. إن كيفية الحصول على الحل عادة ما تكون كأهمية الحصول عليه. وتذكر، أن هناك "طريقة الشاعر Poet's" و "طريقة الغروي Peasant's Way" للحصول على حل. وإننا نرغب بأن يستخدم جميع طلبتنا، باستمرار، طريقة الشاعر.

باحساب طول العمود؟

افترض أن عمود الراية الأصلي يشخص عموديا فوق تل يرتفع بـ 15° . كيف ستقوم باحساب ارتفاع العمود؟

مسألة PROBLEM

برهن أن أوتار الدائرة تكون متطابقة عندما تبعد بنفس المسافة عن مركز الدائرة.

التغييرات الممكنة Possible Variations

1. بين وبرهن عكس المسألة.
2. بين وبرهن معكوس المسألة.
3. بين وبرهن عكس المعكوس Contra positive للمسألة.
4. هل توجد هناك أية تغييرات أخرى؟

الإبداع في حل المسائل

Creativity In Problem Solving

إذا كانت هناك ثمة مصاعب في تعلم الطرائق الفعالة لاستخدام تقانات حل المسائل، فهناك بالطبع، صعوبات جمة تظهر عند تعلم "الإبداع".

إن إحدى هذه الصعوبات تكمن في صياغة تعريف دقيق للإبداع ذاته. كان يعتقد، في أوقات سابقة، بأن الإبداع هو قدرة كامنة في الجينات تمنح لقلة من البشر المحظوظين، ولكن في وقتنا الراهن عدد عدد كبير من علماء النفس إلى تأكيد أن العمليات التي تصاحب الإبداع هي قابلة للتعلم (أو على الأقل يمكن تحفيزها في ذات الفرد). وبالنسبة للأهداف التي وضعناها نصب أعيننا، في هذا الكتاب، فإننا نميل إلى تعريف الإبداع بوصفه القدرة على استنباط حلول غير تقليدية، وعميقة الفائدة، أو منفردة للمسائل المطروحة.

(تذكر بأن مثل هذه الحلول ليس من الضروري أن تحصل بسرعة. لأن جون كبرل قد استغرق عشرين عاما بكاملها لكي يتم صياغة قوانينه الثلاثة حول حركة الكواكب - والتي تعد من أهم الإنجازات الإبداعية في تاريخ العلم).

بينما تستمر التحريات والتعقيدات لإيجاد العلاقة المحتملة بين الإبداع والذكاء، فإن الاكتشافات الأولية تشير إلى أن هذين الميادين غير متماثلين في كثير من جوانبهما.

فليس من الضروري أن يكون الطلبة ذوي الإبداع المتميز ممن يحصلون على أعلى درجة باختبارات الذكاء IQ.

إن تنوع اختبارات الإبداع، قد تكون مسؤولة، لحد ما، عن وجود بعض علماء النفس يتفقون بأن اختبارات الذكاء لا توفر قياسا دقيقا لنفس العمليات السائدة في موهبة الإبداع.

إن الإبداع الحقيقي، سوف ينشأ عن التعديلات الخاصة بالطالب على المسألة فتنبؤ كثير من الأمور التي كانت تكمن في الظل.

مسألة PROBLEM

لدى داود 45 قطعة نقد، تتألف من فئتي النيكل والدايم^١. إذا كانت القيمة الكلية للنقود هي \$3.5، كم قطعة نقد من كل فئة من النقود موجودة لديه؟

التغييرات الممكنة Possible Variations

1. ما هو أكبر عدد للنيكلات والدايمات التي يمكن أن يمتلكها والتي تصل قيمتها الكلية إلى \$3.5؟
2. ما هو أصغر عدد؟
3. كيف ستغير المسألة إذا أضفتم فئة الأرباع Quarters إلى النيكلات والدايمات؟
4. هل من الممكن أن يكون لديه فقط دايمات وأرباع بدلا من الدايمات والنيكلات؟
5. بكم طريقة يمكن وصف مبلغ \$3.5 في النيكلات والدايمات؟

مسألة PROBLEM

بواسطة التركيب Construction (باستخدام مسطرة عدلة وفرجار) حدد موقع نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة AB:

A ————— B

التغييرات الممكنة Possible Variations

1. هل توجد أية طريقة لتحديد نقطة منتصف قطعة ما؟
2. افترض أن طالبا قد غفل عن جلب مسطرة معه إلى المدرسة. هل هناك إمكانية لتحديد نقطة المنتصف بواسطة الفرجار فقط؟
3. بواسطة مسطرة فقط؟
4. افترض أن طالبا لديه فرجارين قد أصابهما الصدا بحيث لا يمكن تكيفه أو تضبيطه. هل يمكن تصنيف قطعة المستقيم AB بواسطة الفرجارين غير المضبوطين؟

مسألة PROBLEM

عند نقطة بمستوى سطح الأرض وتبعد 100 قدم عن قاعدة عمود الراية، كان قياس زاوية الارتفاع لقمم العمود مساويا لـ 31° جد ارتفاع عمود الراية مقربا إلى اقرب قدم.

التغييرات الممكنة Possible Variations

1. افترض أن ذات العمود يميل بـ 15° . كيف ستقوم

أنواع التحديات التي قد نقع عليها في بعض الكتب المنهجية بالإضافة إلى الألفاظ الخاصة، أو كتب المسائل (أنظر قائمة المراجع المقترحة).

إن من المستحيل أن يتضمن أي فصل (يناقش موضوعاً من الموضوعات) عينات من كل أنواع الحلول، وعلى العكس، فقد حاولنا قدر استطاعتنا إنشاء مشاعر وحساسية عميقة تجاه جميع المواضيع التي تغطيها تقانة حل المسائل، والتي ستسري بدورها أسساً متينة: للاهتمام، وسيادة روح التحدي، وفعراً رياضياً مشمراً، بالإضافة إلى إنها ستوفر دعماً لا محدوداً للعلم عند اتخاذ القرارات المختلفة في حياته اليومية.

إن حل المسائل، هي بالطبع من أكثر التقانات الرياضية التي تشد قدرات الطالب على التحليل وتعمق من قدراته الحرجة. في نفس الوقت، فإنها قد تساعد على تنمية إحساس بالإنجاز والإتمام لدى الطلبة. وقد لا نبالغ إذا قلنا بأن اكتشاف (أو تطوير) حقول شتى في ميادين المعرفة الرياضية ما هي إلا نتيجة مباشرة من نتائج أعمال استراتيجيات حل المسائل المختلفة. إن جزءاً لا يستهان به من نظرية الاحتمال قد نشأ عن حلول مسائل مطروحة وتحديات شخصت أمام علماء رياضيين.

إن كل ما نستطيع قوله حول الإنجازات الرياضية من خلال تقانة حل المسائل ينطبق على الطلبة الذين يسعون إلى الالتحاق بالجامعات، والطلبة الذين لا يسعون إلى ذلك. إن تدريس الفن الدقيق في حل المسائل لجميع الطلبة هو بالطبع تحد للطلبة والمعلمين على حد سواء.

ندرج أدناه بعض المقترحات التي ستسهم في تشجيع القلم الإبداعي داخل الصف.

1. وفر مناخاً صديقاً يشجع على حرية التعبير.
2. احترم الأسئلة غير المألوفة، وحاول أن تمد مثلاً بالاعتماد على تفصيل الشخصي وقدرتك على الإبداع.
3. احترم الأفكار غير المألوفة واعمد على مكافأة أصحابها.
4. وفر فرصاً مناسبة للتعلم الذي يتضمن البحث عن الحلول الشخصية للطلاب دون أن تكون عرضة لاحتساب الدرجات.
5. لا تثبط الخلاف.
6. شجع الطلبة على تقييم أفكارهم الشخصية وإن يعمدوا إلى تدوينها في قوالب ثابتة، كلما كان ذلك ممكناً.
7. اشترك بمناقشة أمثلة حول الجهود التي بذلها مشاهير الناس المبدعين — والعقبات التي اعترضتهم.
8. شجع الطلبة على اكتساب المعرفة في ميادين متعددة.
9. عندما تحيط واجبا محدداً، وفر فرصاً مناسبة للأصالة، والاستكشاف.
10. شجع جهود التعلم التعاوني على صياغة مسائل إبداعية.

خلاصة SUMMARY

إن العبارة البليغة والوجيزة التي يمكن أن تلخص هذا الفصل برمتها هي: "إننا نتعلم حل المسائل أفضل تعلم عن طريق مباشرة حلولها بأنفسنا".

إن هذه هي الحالة سواء كانت المسائل من الأنواع القياسية الموجودة في الكتب المنهجية للماتي الجبر والهندسة، أو من

تمارين EXERCISES

- ب. مسائل هندسية.
3. اكتب أي مسألتين لفظيتين Verbal إحداها في الجبر والثانية في البرهان الهندسي والتي تمتلك:
 - أ. بيانات غير كافية.
 - ب. بيانات زائدة.
- اكتب مخطط درس يبين كيفية طرحك لهذا النوع من المسائل على صف مدرسي بمادتي الجبر (أو الهندسة).
4. انظر إلى أحد المراجع المدرجة في نهاية هذا الفصل، واختر منها خمسة مسائل تحد، وحولها التي تتناسب مع مستوى الرياضيات المدرسية في المدارس المتوسطة، أو المدارس الثانوية (أنت حر باختيارك المستوى). ثم بين

1. اكتب مخطط درس لمجموعة صغيرة لصياغة وحل مسألة تتعامل مع الحركة المنتظمة Uniform Motion، والقطع النقيدي، والخليط، والاستثمار.
- أ. أوصى باستخدام الآلة الحاسبة، والحاسوب، والأشكال التوضيحية. والجداول.
- ب. اقترح عرض نتائج كل مجموعة على جميع طلبة الصف بواسطة ممثل عن المجموعة.
2. أعرض درساً عن كيفية قيامك بتعليم الطلبة موضوع ابتكار مسائل جديدة عن طريق تغيير جزء من فرضية أو الشروط المطروحة لكل من:
 - أ. مسائل جبرية.

8. اقرأ كتاب (كيف تحل المسائل How To Solve Problems) من تأليف واين أ. ويكيلجران (W. H. Freeman & Co., 1974)، ثم ناقش كيف أن

استراتيجية البحث الموجه (الهيوريستيكا) لدى ويكيلجران يمكن تطبيقها في المناهج الدراسية للرياضيات بالمدارس الثانوية. اعتبر ثلاثة استراتيجيات في إجابتك كحد أدنى.

9. اقرأ الكتاب السنوي لعام 1980 والصادر عن المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات "حل المسائل في رياضيات المدرسة" ثم أعد تقريراً حول الفصل الثالث "البحث الموجه (الهيوريستيكا) في الصف" الذي أعده الآن ر. شوينفيلد.

10. اختر واحدة من مسائل التحدي من كتاب "الرياضيات بوصفها أداة لحل المسائل" من تأليف الكسندر سوير

(Center for Excellence in Mathematics Education, 1987)

ثم خذ المسألة التي اخترتها، وبين كيف أن الطبيعة غير المألوفة للمسألة أو الحلول التي أوردها المؤلف تغيد في نمذجة مهارات الطلبة نتيجة لإدخالها ضمن نشاطاتهم بمعدان حل المسائل. كرر هذا التمرين على مسألتين آخر في الكتاب.

11. يضم كتاب "فن حل المسائل: مورد لمدارس الرياضيات" من

تأليف ألفريد س. بوزامينتر وفولفانج شولتز (Crown Pres, 1996) عشرين فصلاً، كتبت جميعها من قبل المؤلف الذي أظهر تخصصاً فريداً في حقل حل مسائل الرياضيات. اختر أحد الفصول وأعد تقريراً مختصراً حول كيف يمكن أن تكون المواد الموجودة في الفصل مفيدة في تعلم أحد مواضيع رياضيات المدارس الثانوية أو حقولها المتعددة.

12. اقرأ كتاب "استراتيجيات حل المسائل للإجابات الكفوءة والماهرة: مورد لمدرسي الرياضيات" من تأليف أ. س. بوزامينتر و س. كروليك (Crown Press, 1998). جد مسألة جديدة تصف الاستراتيجيات العشرة المطروحة في الكتاب غير تلك التي وردت بعرض مناقشاته للمسائل المحفزة.

13. استخدم كتاباً منهجياً لرياضيات المدارس الثانوية، واختر خمسة تعاريف منه. وحاول أن تعرض لكل منها، كيفية استخدام إحدى أو بعض استراتيجيات حل المسائل-العشرة، والتي يمكن تطبيقها في إجراء التمرين.

كيف ستستخدم هذه المسائل في صفوفك.

5. ادرج خمسة أنشطة يمكن وصفها كحلول للمسائل لصف بالمستوى الأول.

6. تأمل مسائل التحدي الآتية. في أي نوع من الصفوف ستقوم بعرضها؟ وضح الفوائد التي تعتقد بأن الطلبة يستطيعون استنباطها من هذه المسائل.

أ. إن إحدى الطرق للحصول على حاصل ضرب عددين، افترض 43 و75 قد أدرجت كما يأتي:

75	43
150	21
(300)	(10)
600	5
(1200)	(2)
2400	1

والتي من خلالها:

$$43 \times 75 = 75 + 150 + 60 + 2400 = 3225$$

أولاً: استخدم هذه الطريق لضرب العددين 73×120 .

ثانياً: وضح سبب صلاحية هذه الطريقة.

ب. جد، مقرباً إلى اقرب مائة، قيمة ما يلي:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

ج. حل المعادلات:

$$x + y = 5xy$$

$$y + z = 7yz$$

$$z + x = 6xz$$

د. إذا كانت $3^{2x} + 9 = 10(3^x)$ قم بحل المعادلة بدلالة x .

هـ. حدد أيهما اكبر $\sqrt[3]{9}$ أو $\sqrt[3]{10}$!

و. كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من أو تساوي 1 مليون هي مربعات أو مكعبات عددية؟

7. اقرأ كتاب (كيف تحلها How To Solve It) من تأليف

جورج بوليا (Princeton University Press, 1945)،

ثم ناقش كيف أن بعضاً من استراتيجيات البحث الموجه (الهيوريستيكا) لبوليا يمكن تطبيقها في المناهج الدراسية للرياضيات بالمدارس الثانوية. اعتبر ثلاثة استراتيجيات في إجابتك كحد أدنى.

Suggested References مراجع مقترحة

Sources For Problems موارد للمسائل

- Abraham, R. M. Winter Nights Entertainments. London. Constable, 1932. Reprinted as Easy-to-do. Entertainments and Diversions with Coins, Cards, String, Paper and Matches. New York: Dover. 1961.
- Ainley, Stephen. Mathematical Puzzles. London: Bell, 1977.
- Andreescu, T. and Feng Z. Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from Around the world. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.
- Alcuin (attrib.). Propositiones Alcuini doctoris Caroli Magni Imperatoris ad acuendos juvenes. Translated and annotated by John Hadley and David Singmaster as "Problems to Sharpen the Young." Mathematical Gazette 76, no. 475 (March 1992): 102-126.
- Alexanderson, Gerald L., Leonard F. Klosinski, and Loren C. Larson. The William Lowell Putnam Mathematical Competition-Problems and Solutions: 1965-1984. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1985.
- Allen, Liz. Brainsharpeners. London: hodder & stoughton, New English Library, 1991.
- Ap Simon, H. Mathematical Byways, New York: Oxford University press, 1984.
- Ap Simon, H. Mathematical Byways in Ayling. Bleeding & Ceiling. New York: Oxford University press, 1990.
- Aref, M.N., & W. Wernick, Problem & Solution in Euclidean Geometry, New York: Dover, 1986.
- Artino, R. A., A. N. Galione, & N. Shell, The Contest Problem Book IV. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1982.
- Barbeau, E., M. Klamkin, & W. Moser. 1001 Problem in High School Mathematical Congress, 1976, 1978, 1980, 1985.
- Barbeau, E., M. Klamkin, & W. Moser. Five Hundred Mathematical Challenges, Washington, DC: Mathematical Association of America, 1995.
- Barr, Stephen, A Miscellany of Puzzles, New York: Crowell, 1965.
- Barr, Stephen, A Miscellany of Puzzles, New York: Macmillan, 1969. Reissued as Mathematical Brain Benders, New York: Dover, 1982.
- Barry, D. T., & J. R. Lux. The Philisps Academy prize Examination in Mathematics. Palo Alto. CA: Dale Seymour Publication, 1984.
- Bates N. B. and S. M. Smith 101 Puzzle Problems Concord, MA: Bates Publishing Co., 1980.
- Berloquin, Pierre, 100 Numerical Games, New York: Scribner's, 1976.
- Berloquin, Pierre, 100 Numerical Games, New York: Scribner's, 1976. Reprinted as Geometric Games, London: Unwin, 1980.
- Berloquin, Pierre, 100 Numerical Games, New York: Scribner's, 1977. Reprinted as Games of logic, London: Unwin, 1980.
- Berloquin, Pierre, The Garden of The Sphinx, New York: Scribner's, 1985.
- Berloquin, G and S. B. Maurer, The Contest Problem Book V. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1997.
- Berloquin, Claude, Mathematical Puzzles and Problem London: Allen & Unwin, 1971.
- Brandes, Louis Grant, The Math Wizard, Rev. ed, Portland ME: J. Weston Walch, 1975.
- Bridgman, George, Lake Wobegon Math Problem Rev. and enlarged ed. Minneapolis: George Bridgman 1981.
- Brousseau, Brother Alfred A. Saint Mary's College Mathematics Contest Problem. Palo Alto, A: Creative Publication, 1972.
- Bryant, S. J., G. E> Graham, and Trigonometry. New York: McGraw-Hill, 1965.
- Bryant, Victor and Raymond Postill. The Sunday Times Book of Brian Teasers-Book 1. London: Unwin, 1980. Reprinted with Book 1 omitted form title, New York: Martin's Press, 1982.
- Bryant, Vector and Raymond Postill, The Sunday Times Book of Brain Teasers-Book 2, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983.
- Burkill, J. C., and H. M. Kundy. Mathematical Scholarship Problem, London: Cambridge University press, 1961.
- Butts, T. Problem Solving in Mathematical. Glenview, IL: Scott, Foreman, 1973.
- CEMREL. Elements of Mathematics, Problem Book (Vols. 1 & 2). St. Louis, MO: CEMREL, 1975.
- Charosh, M. Mathematical Challenges, Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1965.
- Clark, Barry R. Puzzles for Pleasure. Cambridge: Cambridge University press, 1994.
- Clark, Barry R., Rex Gooch, Angela Newing, and David Singmaster. The Daily Telegraph Book of Brian Twisters No 1. London: Pan, 1993.
- Conrad, S. R. and D. Flegler, Math Contest for High School, Volumes 1 and 2, Tcnafly, NJ: Math

- League press, 1992, 1995.
- Conrad, S. R. and D. Flegler, *Math Contest Grades 7 and 8, Volumes 1 and 2*, Tenafly, NJ: Math League press, 1992, 1994.
- Conrad, S. R. and D. Flegler, *Math Contest Grades 4, 5 and 6, Volumes 1 and 2*, Tenafly, NJ: Math League press, 1994.
- Crux Mathematicorum, Ottawa, On: Canadian Mathematical Society.
- Dorofeev, G., M. Potapov, and N. Rozov *Elementary Mathematics. Selected Topics and Problem Solving* Moscow: Mir Publishers, 1973.
- Dorrie, H. *100 Great Problem Mathematics*. New York: Dover, 1965.
- Dowlen, N., S. Powers, and H. Florence, *College of Charleston Mathematics Contest Book*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publication, 1987.
- Dudney, H. E. *Modern Puzzles*. Pearson, 1926: new edition, [1936].
- Dudney, H. E. *Puzzles and Curious problem*. London: Nelson, [1932]: revised by J. Travers. [1936?].
- Dudney, H. E. *A Puzzles Mine*, J. Travers, Ed. London: Nelson, [1941].
- Dudney, H. E. *The Canterbury Puzzles*. New York: Dover Publication, 1958.
- Dudney, H. E. *536 Puzzles and Curious problems*. Edition by Martin Gardner from *Modern Puzzles and Puzzles and Curious Problem*. Contains almost all of Both Books, New York: Scribner's, 1967.
- Dudney, H. E. *Anusement in Mathematics*, New York: Dover Publication, 1970.
- Dudney, A. *Mathematical bafflers*, New York: Mc Graw-Hill, 1964.
- Dudney, A. F. *Second Book of Mathematical bafflers*, New York: Dover Publication, 1983.
- Dynkin, Eugene B., and V. A. Uspenskii, *Multicolor Problems*, Heath, 1963.
- Edwards, J. D., D. J. King and P. J. O'Halloran, *all the Best From The Australian Mathematics Competition*. Melbourne, Australia: Ruskin Press, 1986.
- Emmet, Eric Revell, *Brain Puzzler's Delight*. Buchanan, NY: Emerson Book: reprint New York: Steeling, 1993.
- Emmet, Eric Revell, *Mind Tickling Brain Teasers* Buchanan, NY: Emerson Books 1976.
- Emmet, Eric Revell, *The Puffin Book of Brain Teasers* London Putting 1970.
- Emmet, Eric Revell, *A Diversity of puzzles*, New York: Barnes & Noble: 1977.
- Emmet, Eric Revell, *puzzles for Pleasure*, Buchanan, NY: Emerson Books, 1977.
- Emmet, Eric Revell, *The Great Detective puzzles Book*, New York: Barnes & Noble: 1979.
- Emmet, Eric Revell, *The Island of Imperfection puzzles Book*, New York: Barnes & Noble, 1980.
- Emmet, Eric Revell. *The Penguin Book of Brain Teasers*. Compiled by David Hall and Alan Summers from Emmet's posthumous notes. New York: Viking, 1984.
- Emmet, Eric Revell, and Donald B. Eperon. *Patterns in Mathematics*. Oxford: Blackwell, 1988.
- Engel, Arthur. *Problem Solving Strategies*. New York: Springer-Verlag, 1998.
- Filipiak, A. S. *Mathematical Puzzles*. New York: Bell Publishing, 1942.
- Fisher, L., and B. Kennedy. *Brother Alfred Brousseau Problem Solving and Mathematics Competition, Introductory Division*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1984.
- Fisher, L., and W. Medigovich. *Brother Alfred Brousseau Problem Solving and Mathematics Competition, Senior Division*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1984.
- Fisher, F. O., *Mathematics Contests: A Guide for Involving Students and Schools*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1990.
- Friedland, Aaron J. *Puzzles in Math and Logic*. New York: Dover, 1970.
- Frohlichstein, Jack. *Mathematical Fun, Games and Puzzles*. New York: Dover, 1962.
- Fujimura, Kobon. *The Tokyo Puzzles*. Martin Gardner, Ed. New York: Scribner's, 1978.
- Gamow, George and Marvin Stern. *Puzzle-Math*. London: Macmillan, 1958.
- Gardner, Martin. *Arrow Book of Brain Teasers*. New York: Scholastic, 1959.
- Gardner, Martin. *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*. New York: Simon & Schuster, 1959. Rev., with new afterword and references, as *Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions*. Chicago: University of Chicago Press, 1988.
- Gardner, Martin. *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*. New York: Simon & Schuster, 1961.
- Gardner, Martin. *Martin Gardner's New Mathematical Diversions from Scientific American*. New York: Simon & Schuster, 1966: Chicago: University of Chicago Press. 1983: Washington. DC: Mathematical Association of America, 1995.
- Gardner, Martin. *The Numerology of Dr. Matrix*. New York: Simon & Schuster, 1967.
- Gardner, Martin. *Perplexing Puzzles and Tantalizing Teasers*. New York: Simon & Schuster, 1969.
- Gardner, Martin. *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*. New York: Simon &

- Schuster, 1969. Rev. ed. Chicago: University of Chicago Press, 1991.
- Gardner, Martin. *Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American*. San Francisco: Freeman, 1971; Chicago: University of Chicago Press, 1983.
- Gardner, Martin. *Mathematical Carnival*. New York: Knopf, 1975. Rev. ed. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1989.
- Gardner, Martin. *The Incredible Dr. Matrix*. New York: Scribner's, 1976. [Contains all of the Numerology of Dr. Matrix.]
- Gardner, Martin. *Mathematical Magic Show*. New York: Knopf, 1977. Rev. ed. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1990.
- Gardner, Martin. *More Perplexing Puzzles and Tantalizing Teasers*. New York: Pocket Books, Archway, 1977.
- Gardner, Martin. *Aha! Insight*. New York: Scientific American & Freeman, 1978.
- Gardner, Martin. *Mathematical Circus*. New York: Knopf, 1979. Rev. ed. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992.
- Gardner, Martin. *Science Fiction Puzzle Tales*. New York: C. N. Potter, 1981.
- Gardner, Martin. *Aha! Gotcha*. New York: Freeman, 1982.
- Gardner, Martin. *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*. New York: Freeman, 1983.
- Gardner, Martin. *The Magic Numbers of Dr. Matrix*. Buffalo, NY: Prometheus, 1985. [Contains all of The Incredible Dr. Matrix.]
- Gardner, Martin. *Entertaining Mathematical Puzzles*. New York: Dover, 1986.
- Gardner, Martin. *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments*. New York: Freeman, 1986.
- Gardner, Martin. *Puzzles from Other Worlds*. New York: Random House, Vintage, 1986.
- Gardner, Martin. *Riddles of the Sphinx*. Washington, DC: Mathematical Association of America, New Mathematical Library, 1987.
- Gardner, Martin. *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*. New York: Freeman, 1988.
- Gardner, Martin. *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*. New York: Freeman, 1989.
- Gardner, Martin. *Fracta; Music. Hypercards and More*. New York: Freeman, 1992.
- Gardner, Martin. *My Best Mathematical and Logical Puzzles*. New York: Dover, 1994.
- Gleason, Andrew M., Robert E. Greenwood, and Leroy M. Kelly. *The William Lowell Putnam Mathematical Competitions. Problems and Solutions: 1938-1964*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1980.
- Gould, Peter. *Senior Challenge '85-'91. Mathematical Education on Merseyside*, University of Liverpool, 1992.
- Gould, Peter and Ian Porteous. *Senior Challenge '80-'84. Mathematical Education on Merseyside*, University of Liverpool, 1984.
- Graham, L. A. *Ingenious Mathematical Problems and Methods*. New York: Dover, 1959.
- Graham, L. A. *The Surprise Attack in Mathematical Problems*. New York: Dover, 1968.
- Greitzer, S. L. *International Mathematical Olympiads 1959-1977*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1978.
- Haber, Philip. *Mathematical Puzzles and Pastimes*. Mount Vernon, NY: Peter Pauper, 1957.
- Halmos, Paul R. *Problems for Mathematicians Young and Old. Dolciani Mathematical Expositions # 12*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1991.
- Higgins, A. M. *Geometry Problems*. Portland, ME: J. Weston Walch, 1971.
- Hill, T. J. *Mathematical Challenges II-Puls Six*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1974.
- Honsberger, R. *Mathematical Morsels*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1978.
- Honsberger, R. *From Erdos to Kiev: Problems of Olympiad Caliber*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1996.
- Honsberger, R. *In Polya's Footsteps: Miscellaneous Problems and Essays*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America, 1997.
- Honsberger, Derek. *Problem Solving Series*. Leicester, UK: Mathematical Association, 1988-1990. 1. How To; 2. Combinatorics 1; 3. Graph Theory; 4. Number Theory; 5. Geometry 1; 6. Proof; 7. Geometry 2; 8. IMO Problems 1; 9. Combinatorics 2; 10. Geometry 2; 11. Number Theory 2; 12. Inequalities; 13. Combinatorics 3; 14. IMO Problems 2; 15. Creating Problems.
- Huntor, James Alston Hope. *Figures for Fun*. London: Phoenix House, 1957; 2nd ed., London: Dent Aldine, 1972.
- Hunter, James Alston Hope. *Fun with Figures*. New York: Dover, 1965.
- Hunter, James Alston Hope. *Mathematical Brain Teasers*. As Hunter's Math Brain Teasers. New York: Bantam, 1965; Corrected and enlarged, New York: Dover, 1976.
- Hunter, James Alston Hope. *More Fun with Figures*. New York: Dover, 1966.
- Hunter, James Alston Hope. *Challenging Mathematical Teasers*. New York: Dover Publications, 1979.

- Hunter, James Alston Hope. *Entertaining Mathematical Teasers and How to Solve Them*. New York: Dover, 1983.
- Kahan, Steven. *Have Some Sums to Solve: The Compleat Alphametics Book*. Farmingdale, NY: Baywood Publishing Co., 1978.
- Kahan, Steven. *At Last!! Encoded Totals Second Addition: The Long Awaited Sequel to "Have Some Sums to Solve."* Farmingdale, NY: Baywood Publishing Co., 1994.
- Kahan, Steven. *Take a Look at a Good Book: The Third Collection of Additive Alphametics for the Connoisseur*. Farmingdale, NY: Baywood Publishing Co., 1996.
- Kendall, P. M. H. and G. M. Thomas. *Mathematical Puzzles for the Connoisseur*. London: Griffin, 1962; New York: Apollo edition (Crowell), 1962.
- King, Tom. *The Best 100 Puzzles Solved and Answered*. London: Foulsham, [1927].
- Kinnaird, [William] Clark, ed. *Encyclopedia of Puzzles and Pastimes*. New York: Grosset & Dunlap, 1946.
- Klamkin, M. S. *International Mathematical Olympiads, 1979-1985*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1986.
- Konhauser, Joseph D. E., Dan Velleman, and Stan Wagon. *Mathematical Association of America*, 1996.
- Kordemsky, Boris A. *The Moscow Puzzles*. Martin Gardner, Ed. New York: Scribner's, 1972.
- Krechmer, V. A. *A Problem Book in Algebra*. Translated by V. Shiffer. Moscow: Mir Publishers, 1974.
- Krulik, S., and J. A. Rudnick. *Problem Solving: A Hand book for Teachers*. Boston: Allyn and Bacon, 1980.
- Krulik, S., and J. A. Rudnick. *The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving in Junior and Senior High Schools*. Boston: Allyn and Bacon, 1996.
- Kurschak, Jozef. *Hungarian Problem Book I & II. Based on the Eotvos Competitions, 1894-1905 and 1906-1928*. Translated by Elvira Rapaport. New Mathematical Library. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1963.
- Kutepov, A., and A. Rubanov. *Problems in Geometry*. Translated by O. Meshkov. Moscow: Mir Publisher, 1975.
- Kutepov, A., and A. Rubanov. *Problem Book: Algebra and Elementary Function*. Translated by L. Levant. Moscow: Mir Publisher, 1978.
- Larson, L. C. *Problem Solving Through Problems*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- Lenchner, G. *Creative Problem Solving in School Mathematics*. Boston: Houghton Mifflin Co., 1983.
- Lenchner, G. *Math Olympiad Contest Problems for Elementary and Middle Schools*. East Meadow, NY: Glenwood Publications, 1997.
- Loyd, Samuel. *Sam Loyd's Cyclopedia of 5,000 Puzzles, Tricks and Conundrums*. New York: Bigelow, 1914; New York: Lamb Publishing, 1914; New York: Corwin, 1976.
- Loyd, Samuel. *Sam Loyd's Tricks and Puzzles, Vol. 1*. New York: Experimenter Publishing Co. 1927.
- Loyd, Samuel. *Sam Loyd and His Puzzles*. New York: Barse & Co., 1928.
- Loyd, Samuel. *Mathematical Puzzles of Sam Loyd, Vol. 1*. New York: Dover, 1959.
- Loyd, Samuel. *Mathematical Puzzles of Sam Loyd, Vol. 2*. New York: Dover, 1960.
- Luckacs, C., and E. Tarjan. *Mathematical Games*. New York: Walker, 1968.
- Moser, W., and E. Barbeau. *The Canadian Mathematics Olympiads 1969, 1975*. Montreal: Canadian Mathematical Congress, 1976.
- Morris, Ivan. *The Riverside Puzzles*. New York: Walker & Co., 1969.
- Morris, Ivan. *The Lonely Monk and Other Puzzles*. Boston: Little, Brown & Co., 1970.
- Morris, Ivan. *Foul Play and Other Puzzles of all Kinds*. New York: Random House, Vintage, 1972.
- Moscovich, Ivan. *Super-Games*. London: Hutchinson, 1984.
- Moscovich, Ivan. *Friendlyish Difficult Math Puzzles*. New York: Sterling, 1991.
- Moscovich, Ivan. *Friendlyish Difficult Visual Perception Puzzles*. New York: Sterling, 1991.
- Moser, William O. J., and Edward J. Barbeau. *The First Ten Canadian Mathematics Olympiads (1969-1978)*. Montreal: Canadian Mathematical Society, 1978.
- Mosteller, F. *Fifty Challenging Problems in Probability*. New York: Dover, 1965.
- Mott-Smith, G. *Mathematical Puzzles for Beginners and Enthusiasts*. New York: Dover, 1954.
- Newton, D. E. *One Hundred Quickies for Math Classes*. Portland, ME: J. Weston Walch, 1972.
- Phillips, H., S. T. Shovelton, and G. S. Marshal. *Caliban's Problem Book*. New York: Dover, 1961.
- Phillips, Hubert. *The Week-End Problems Book*. London: Nonesuch, 1932.
- Phillips, Hubert. *The Playtime Omnibus*. London: Faber & Faber, 1933.
- Phillips, Hubert. *The Sphinx Problem Book*. London: Faber, 1934.
- Phillips, Hubert. *Brush Up Your Wits*. London: Dent, 1936.
- Phillips, Hubert. *Question Time*. London: Deat, 1937; New York: Farrar & Rinehart, 1938.

- Phillips, Hubert. *Ask Me Another*. London: Ptarmigan, 1945.
- Phillips, Hubert. *Hubert Phillips's Heptameron*. London: Eyre & Spottiswoode, 1945.
- Phillips, Hubert. *Something to Think About*. London: Ptarmigan, 1945; [with additional Foreword, one problem omitted and 11 problems added] London: Max Parrish, 1958.
- Phillips, Hubert. *Playtime*. London: Ptarmigan, 1947.
- Phillips, Hubert. *The Hubert Phillips Annual 1951*. London: Hamish Hamilton, 1950.
- Phillips, Hubert. *Problems Omnibus*, vol. 1. London: Arco, 1960.
- Phillips, Hubert. *My Best Puzzles in Mathematics*. New York: Dover, 1961.
- Phillips, Hubert. *Problems Omnibus*, vol. 2. London: Arco, 1962.
- Polya, G., and J. Kilpatrick, *The Stanford Mathematics Book*. New York: Teachers College Press, 1974.
- Posamentier, A. S. *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students*. Emeryville, CA: Key College Press, 2002.
- Posamentier, A. S. *Students! Get Ready for the Mathematics for SAT I: Problem-Solving Strategies and Practice Tests*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1996.
- Posamentier, A. S. *Teachers! Prepare Your Students for the Mathematics for SAT I: Methods and Problem-Solving Strategies*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1996.
- Posamentier, A. S., and C. T. Salkind. *Challenging Problems in Algebra*. Rev. ed. New York: Dover, 1996.
- Posamentier, A. S., and C. T. Salkind. *Challenging Problems in Geometry*. Rev. ed. New York: Dover, 1996.
- Posamentier, A. S., and G. Sheridan. *Math Motivators: Pre-Algebra, Algebra, and Geometry*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1984.
- Posamentier, A. S., and S. Krulik. *Problem Solving Strategies for Efficient and Elegant and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1998.
- Posamentier, A. S., and W. Schulz, Ed. *The Art of Problem Solving: A Resource for the Mathematics Teacher*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1996.
- Posamentier, A. S., and W. Wernick. *Advanced Gemetric Constructions*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1988.
- Ransom, W. R. *One Hundred Mathematical Curiosities*. Portland, ME: J. Weston Walch, 1955.
- Rapaport, E. *Hungarian Problem Book*, vol. 1 and 2. New York: Random House, 1963.
- Reis, C. M., and S. Z. Ditor, Eds. *The Canadian Mathematics Olympiads (1979-1985)*. Ottawa: Canadian Mathematical Society, 1988.
- Ruderman, H. D. *NYSML-ARML Contests 1973-1982*. Norman, OK: Mu Alpha Theta, 1983.
- Salking, C. T. *The Contest Problem Book*. New York: Randm House, 1961.
- Salking, C. T. *The MAA Problem Book II*. New York: Random House, 1966.
- Salkind, C. T., and J. M. Earl. *The MAA Problem Book III*. New York: Random House, 1973.
- Saul, M. A., G. W. Kessler, S. Krilov, and L. Zimmerman. *The New York City Contest Problem Book*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1986.
- Schneider, L. J. *The Contest Problem Book VI*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.
- Shklarsky, D. O., N. N. Chentzov, and I. M. Yaglom. *The USSR Olympiad Problem Book*. San Francisco: W. H. Freeman, 1962.
- Shklarsky, D. O., N. N. Chentzov, and I. M. Yaglom. *Select Problems and Theorems in Elementary Mathematics*. Translated by V. M. Volosov and I. G. Volsova. Moscow: Mir Publisher, 1979.
- Shortz, Will. *Will Shortz's Best Brain Busters*. New York: Random House, Times Books, 1991.
- Shortz, Will. *Will Shortz's Best Brain Twisters*. New York: Random House, Times Books, 1991.
- Shortz, Will. *Brian Twisters from the First World Puzzle Championships*. New York: Random House, Times Books, 1993.
- Sierpinski, Waclaw. *A Selection of Problems in the Theory of Numbers*. London: Pergamon/Macmillan, 1964.
- Sierpinski, Waclaw. *250 Problems in Elementary Number Theory*. New York: American Elsevier, 1970.
- Sitomer, H. *The New Mathlete Problems Book*. Valley Stream, NY: Nassau County Interscholastic Mathematics League, 1974.
- Snape, Charles, and Heather Scott. *How Puzzling*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- Soifer, Alexander. *Mathematics As Problem Solving*. Colorado Springs: Center for Excellence in Mathematics Education 1987.
- Sole, Tim. *The Ticket to Heaven and Other Superior Puzzles*. London: Pengjun, 1988.
- Steinhaus, H. *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*. New York: Pergamon Press, 1963.
- Straszewicz, S. *Mathematical Problems and Puzzles from the Polish Mathematical Olympiads*. Translated by J. Smliska. New York: Pergamon Press, 1965.
- Vakil, Ravi. *A Mathematical Mosaic: Patterns and Problem Solving*. Burlington, ON: Brendan Kelly Publishing Co., 1996.

- Vout, Colin, and Gordon Gray. *Challenging Puzzles*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- Wall, H. S. *Creative Mathematics*. Austin: University of Texas Press, 1963.
- Wells, D. *Can You Solve These?* Norfolk, England: Stradbroke, 1982.
- Wells, David G. *Recreations in Logic*. New York: Dover, 1979.
- Trigger, C. W. *Mathematical Quickies*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- Ulam, S. M. *Problems in Modern Mathematics*. New York: John Wiley, 1960.
- Williams, W. Tom, and G. H. Savage. *The Penguin Problems Book*. London: Penguin, 1940.
- Williams, W. Tom, and G. H. Savage. *The Strand Problems Book*. London: Newnes.
- Williams, W. Tom, and G. H. Savage. *The Second Penguin Problems Book*. London: Penguin, 1944.
- Williams, W. Tom, and G. H. Savage. *The Third Penguin Problems Book*. London: Penguin, 1946.
- Yaglom, A. M., and I. M. Yaglom. *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*. Vol. 1 and 2. San Francisco: Holden-Day, 1964, 1967.
- قراءات حول حل المسائل**
- Readings On Problem Solving**
- Ackoff, Russell L. *The Art of Problem Solving*. New York: Wiley, 1978.
- Adams, James L. *Conceptual Blockbusting*. San Francisco: Freeman, 1974.
- Adler, Irving. *Mathematics and Mental Growth*. London: Dobson, 1970.
- Averbach, Bonnie, and Orin Chein. *Mathematics: Problem Solving Through Recreational Mathematics*. San Francisco: Freeman, 1980.
- Andre, Thomas. "Problem Solving and Education." Ch. 7 in *Cognitive Classroom Learning*. Gary Phye and Thomas Andre, Eds. Orlando, FL: Academic Press, 1986.
- Arnold, William R. "Students Can Pose and Solve Original Problems." *The Mathematics Teacher* 64 (1971): 325.
- Bransford, John D., and Barry S. Stein. *The Ideal Problem Solver*. New York: W. H. Freeman, 1984.
- Brown, Stephen I., and Marion I. Walter. *The Art of Problem Posing*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Assoc., 1983.
- Butts, T. "In Praise of Trial and Error." *The Mathematics Teacher* 78 (1985): 167.
- Charles, R., and F. Lester. *Teaching Problem Solving: What Why, and How*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1982.
- Chipman, Susanand, Judith Segal, and Robert Glaser. *Thinking and Learning Skills Volume 2: Research and Open Questions*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1985.
- Cofman, Judita. *What to Solve? Problems and Suggestions for Young Mathematicians*. Oxford: Oxford University Press, 1990.
- Cofman, Judita. *Numbers and Shapes Revisited: More Problems for Young Mathematicians*. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- Costa, Art. "Mediating the Metacognitive." *Educational Leadership*. November 1984: 57-62.
- Curcio, Frances, Ed. *Teaching and Learning, A Problem Solving Focus*. Reston, VA: NCTM, 1987.
- Davis, Robert, Elizabeth Jockusch, and Curtis McKnight. "Cognitive Processes in Learning Algebra." *Journal of Children's Mathematical Behavior* 2 (no. 1) Spring 1978.
- Derry, Sharon J., and Debra A. Murhy. "Designing Systems That Train Learning Ability: From Theory to Practice." *Review of Educational Research* 56 (no. 1) Spring 1986: 1-39.
- Emmet, Eric Revell. *Learning to Think*. Verplanck, NY: Emerson Books, 1981.
- Fisher, Richard B. *Brain Games*. London: Fontana, 1981.
- Fixx, James F. *Solve It!* New York: Doubleday, 1978.
- Frederiksen, Norman. "Implications of Cognitive Theory for Instruction on Problem Solving." *Review of Educational Research* 54 (no. 3) Fall 1984: 363-407.
- Gardner, Martin. *Aha! Insight*. New York: Scientific American & Freeman, 1978.
- Gardner, Martin. *Aha! Gotcha*. San Francisco: Freeman, 1982.
- Gordon, William J. J. *Synectics-The Development of Creative Capacity*. New York: Harper & Row, 1961.
- Hadamard, Jacques. *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover, 1954.
- Heiman, M., R. Narode, J. Slomianko and J. Lochhead. *Thinking Skills: Mathematics, Teaching*. Washington, DC: National Education Association, 1987.
- Honsberger, Ross. *Ingenuity in Mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America, New Mathematical Library, 1970.
- Honsberger, Ross. *Mathematical Games*, Vol. 1, *Dolciani Mathematical Exposition #1*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1973.
- Honsberger, Ross. *Mathematical Games*, Vol. 2, *Dolciani Mathematical Exposition #2*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1976.
- Honsberger, Ross. *Mathematical Morsels*, *Dolciani Mathematical Exposition #3*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1978.

- Honsberger, Ross, *Mathematical Pulms, Dolciani Mathematical Exposition #4*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1979.
- Honsberger, Ross, *Mathematical Games III, Dolciani Mathematical Exposition #9*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1985.
- Honsberger, Ross, *More Mathematical Morsels, Dolciani Mathematical Exposition #10*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1991.
- Hough, Julia S., Ed. *Problem Solving, New Letter*, vol. 1-5. Philadelphia, PA: Franklin Institute Press, 1984.
- Hough, Barnabas, *Tinking Through Problems*, Palo Alto, CA: Creative Publication, 1975.
- Jensen, R. J. "Stuck? Don't Give up! Subgoal-Generation Strategies in Problem Solving". *The Mathematics Teacher* 80 (1987): 614.
- Karmos, Joseph, and Ann Karmos. "Strategies for Active Involvement in Problem Solving". In *Thinking Skills Instruction: Concepts and Techniques*, Marcia Hieman and Joshua Slomianko, Eds, Washington, DC: National Education Association, 1987, 99-110.
- Kluwe Rainer, "Executive Decisions and Regulation of Problem Solving Behavior". Chap.2 in *Metacognition Motivation Understanding*, Franz Weinert and Kainer Kluwe, Eds. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987.
- Krantz, Steven G. *Techniques of Problem Solving*. Providence, RI: America Mathematical Society, 1997.
- Krulik, S., Ed. *Problem Solving in School Mathematics 1980 Yearbook*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1980.
- Krulik, S., and J. Rudnick. *Problem Solving : A Handbook for Teachers*, 2nd ed. Boston: Allyn and Bacon. 1987.
- Krulik, S., and J. Rudnick. *Problem Solving: A Handbook for Senior High School Teachers*, Boston: Allyn and Bacon. 1989.
- Krulik, S., and J. Rudnick. *Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School*. Boston: Allyn and Bacon. 1993.
- Krulik, S., and J. Rudnick. *The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving: in Elementary School*. Boston: Allyn and Bacon. 1995.
- Krulik, S., and J. Rudnick. *The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving: in Secondary School*. Boston: Allyn and Bacon. 1996.
- Mason, John, *Learning and Doing Mathematics*. Milton Keynes, UK: Open University Press, 1978, 1984.
- Mason, John, With Leone Burton and Kaye Stacey. *Thinking Mathematically*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1985.
- McKim, Robert H, *Thinking Visually: A Strategy Manual for Problem Solving*, Palo Alto, CA: Dale Seymour. 1980.
- Moses, Stanley, *The Art of Problem-Solving*, London: Transworld, 1974.
- Mottershead, Lorraine, *Sources of Mathematical Discovery*. Oxford: Blackwell, 1978.
- Mottershead, Lorraine, *Investigation in Mathematics*. Oxford: Blackwell, 1985.
- Noller, Ruth B., Ruth E. Heintz, and David A. Blauer. *Creative Problem Solving in Mathematics*. D. O. K. Publishers, 1978.
- Mayer, Richard, "Mathematics", Chap. 5 in *Cognition and instruction*. Rona Dillon and Robert Sternberg, Eds. Orlando, FL: Academic Press, 1986.
- Mayer, Richard, J. Larkin, and Kadane, "A Cognitive Analysis of Mathematical Problem Solving Ability", in *Advances in the Psychology Of Human Intelligence*, Vol. 2, R. Sternberg, Ed. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 231-273.
- Nickerson, Raymond, "Thoughts on Teaching Thinking". *Educational Leadership*, October 1981: 21-24.
- Nickerson, Raymond, David Perkins, and Edward Smith *The Teaching of Thinking*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.
- Polya. G. *How To Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.
- Polya. G. *Introduction and Analogy in Mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1954.
- Polya. G. *Patterns of Plausible inference*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1954.
- Polya. G. *Mathematical Discovery 2 Vols*. New York: Wiley. 1962. And 1965: combined ed. With foreword by peter Hilton, bibliography extended by Gerald Alexanderson, and index extended by Jean Pedersen New York: Wiley. 1981.
- Posamentier, A. S. *Teachers! Prepare Your Students for the Mathematics for SATI Methods and Problem-Solving Strategies*. Thousand Oaks. CA: Corwin Press, 1996.
- Posamentier, A. S., and S. Krulik. *Problem Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher*. Thousand Oaks, CA.: Corwin Press, 1998.
- Posamentier, Alfred S. and Wolfgang Schulz, Eds. *The Art of Problem Solving: A Resource for the Mathematics Teacher*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1996.
- Reeves, C. A. *Problem Solving Techniques Helpful in Mathematics and Science*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1987.
- Schoenfeld, A. H. *Problem Solving in the Mathematics Curriculum*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1983.
- Schoenfeld, A. H. *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press, 1985.

- Segal, Judith, Susan Chipman, and Robert Glaser, Eds. *Thinking and Learning Skills, Volume I: Relating Instruction to Research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.
- Silver, E. A., Ed. *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.
- Simon, Martin A. "The Teacher's Role in Increasing Student Understanding of Mathematics." *Educational Leadership* 43 (no. 7). April 1986: 40-43.
- Skemp, Richard R. *The Psychology of Learning Mathematics*. Baltimore: Penguin Books, 1971.
- Smullyan, Raymond. *What Is the Name of This Book?* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1978.
- Soifer, Alexander. *Mathematics As Problem Solving*. Colorado Springs: Center for Excellence in Mathematics Education. 1987.
- Special issue - "Gifted Students." *The Mathematics Teacher* 76 (1983).
- Topoly, William. "An Introduction to Solving Problems." *The Mathematics Teacher* 58 (1965): 48.
- Troutman, Andrea. And Betty P. Lichtenberg. "Problem Solving in the General Mathematics Classroom." *The Mathematics Teacher* 67 (1974): 590.
- Walter, Marion I., and Stephen I. Brown. "Problem Posing and Problem Solving." *The Mathematics Teacher* 70 (1977): 4.
- Whirl, Robert J. "Problem Solving - Solution or Technique?" *The Mathematics Teacher* 66(1973): 551.
- Winckelgren, W. A. *How To Solve Problems*. San Francisco: W. H. Freeman, 1974.

استخدام التقنية لتعزيز تدريس الرياضيات

Using Technology to Enhance Mathematics Instruction

في منتصف عام 2000 على مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية، أورد المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات كلمته حول (مبدأ التقنية Technology Principle) قائلا : (إن التقنية ضرورية في تعليم الرياضيات وتعلمها، فهي تؤثر على طبيعة الرياضيات التي تدرس، وتبرز تعلم الرياضيات).
لقد استنتج المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات بأن التقنية ليست عقارا ناجحا لجميع الأمراض Panacea. بيد أن استخدام المدرسين للتقنية في برامجهم التعليمية سيعزز خبرات التعلم لدى الطلبة عبر استثمار ما تقوم التقنية بتنفيذه بصورة جيدة وكفوءة (إعداد الرسوم التخطيطية Graphing، والمعالجات المرئية Visualizing، والحوسبة Computing). إن التقنية لن تكون بديلا عن معلمي الرياضيات، بيد أنها سوف تمنحهم أدوات إضافية لمساعدتهم على تدريس الطلبة ومد يد العون إليهم على طريق تعلم الرياضيات.

لقد توفرت الآلة الحاسبة المحمولة لأول مرة، في بداية السبعينات. طرحت الآلة الحاسبة الأولى في السوق، (دماغ بومار Bowmar Brain) وبلغ ثمنها أكثر من سعمائة دولار. كانت آلة حاسبة بأربعة وظائف Function، وتحتوي على ذاكرة محدودة Memory، وتعاني من كبر حجمها، رغم أن جيب القميص الواسع كان يتسع لها. وأخيرا، في عام 1676 انهار الجدار السعري للآلة الحاسبة عندما طرحت الآلات الحاسبة العلمية Scientific Calculator وبأثمان تزيد على مائة دولار بقليل.

حلّت الآلة الحاسبة محل المسطرة المنزلقة Slide rule، والتي كانت شائعة الاستخدام لدى العلماء والمهندسين، واستأثرت بموقعها. وقد برز بسرعة خلاف حاد بين المتخصصين حول السماح باستخدام الآلات الحاسبة أو منع استخدامها. لم ينتظر الطلبة (لحين حسم الخلاف) وبدأوا باستعمال الآلة الحاسبة في البيت وفي المدرسة، بيد أن سهام النقد استمرت ورفعت شعارات تشير إلى أن الآلة الحاسبة تؤدي إلى تلبّد الذهن، لأن الطالب سيعرض عن استخدام الذهن، وستقوم الآلة الجيبية بإنجاز جميع المهام المناطة به.

بعد مرور ربع قرن من الزمان، تبين بأن هذا المنحى في الاستدلال ليس صحيحا، فقد أظهرت الدراسات الميدانية بأن الطلبة الذين ترعرعوا على استخدام الآلة الحاسبة يمتلكون نفس القدرات (على الأقل) التي يمتلكها من لم يألف استخدامها. لقد أصبحت الآلة الحاسبة، في حالات معينة، من الضرورات التي لا يمكن الاستغناء عنها. بيد أنه لسنين خلت، على سبيل المثال، بقيت جداول قيم الدوال المثلثية واللوغارتمية شائعة الاستخدام.

أما في هذه الأيام، فإنه لم يعد هناك من يفكر في طباعتها أو نشرها لأن الآلة الحاسبة تمتلك القدرة على إنتاج سيل من قيم الدوال المثلثية المطلوبة، وكذلك الدوال اللوغارتمية بصورة آنية ودون الحاجة إلى الرجوع إلى جداول الأيام الخالية والتي تزدهم بالأرقام والمقاربات.

بالحقيقة، فإن استخدام الآلة الحاسبة قد جعل التعامل مع هذه الموضوعات أكثر إمتاعا، نظرا لأن

كثيرا من الجداول التي حفلت بها علوم الرياضيات لم يكن من السهل استخدامها، وكان على الطلبة استخدام (التوليد العددي Numerical Interpolation) للحصول على أكثر النتائج دقة. إن هذه المهمة الشاقة والمضجرة قد أُلغيت تماما من قائمة الأنشطة الرياضية التي تقوم بها في وقتنا الراهن. في عام 1986، أصبحت الآلة الحاسبة الرسومية متوفرة بالأسواق، وكانت تمتلك جميع قدرات الآلة الحاسبة العلمية، إضافة إلى قدرتها الملموسة على رسم الأشكال التخطيطية والرسوم. في البداية كان استخدامها في الصف محدودا وضمن الحدود الدنيا.

وفي بداية عقد التسعينات أعلنت خدمة الاختبار التعليمي Educational Testing Service بأن البدء بامتحانات تحديد المستوى في حساب التفاضل والتكامل المتقدمة Advanced Placement Calculus Examination 1995 يوجب على الطلبة استخدام آلات الحاسبة الرسومية. وكنيجة لذلك، بات إلزاما على طلبة المدارس الثانوية تعلم استخدام هذه الآلات في تحديد المستوى في حساب التفاضل والتكامل المتقدمة.

وقد أدركت الكثير من المدارس بأنه لكي تنجز فصلا دراسيا متوازنا بمادة حساب التفاضل والتكامل، ينبغي على الطلبة أن يكون لديهم مهارة كافية باستخدام الآلة الحاسبة الرسومية قبل البدء بدراسة حساب التفاضل والتكامل.

بدأ يتسلسل استخدام هذه الآلات، منذ ذلك الحين، يرفق باتجاه المستويات الأدنى، بحيث لم يعد أمرا غير مألوف أن يشجع استخدامها في المدارس المتوسطة.

وخلال السنين العشرين الأخيرة من القرن العشرين، بات واضحا بأن الطلبة يستطيعون استخدام الآلات الحاسبة للكشف عن كثير من الأفكار الرياضية. إن مثل هذه الأنشطة قد تساعد الطلبة على أن يكونوا مبدعين إلى حد بعيد.

ورغم أن الآلات الحاسبة الرسومية من نوع Texas Instruments هي الأكثر استخداما بين الطلبة، إلا أنه توجد أيضا آلات مماثلة قد أنتجتها شركات عريقة مثل Hewlett Packard، Sharp، Casio. لا تقل بقدراتها الحسابية والرسومية عن الأولى.

وسنحاول في هذا الفصل استكشاف بعض أنشطة الآلات الحاسبة الرسومية والتي يمكن توظيفها في الصف لإثراء تعلم الرياضيات في مراتب متعددة من الرياضيات الثانوية.

وفي الثمانينات، أصبح استخدام الحواسيب الشخصية أكثر شيوعا، وبدأت مجموعة من حزم البرمجيات التعليمية بالظهور. وعلى حافة عام 1985 قام كل من Judah Schwartz و Michal Yershalmy من مركز تطوير التعليم Education Development Center بتطوير مجموعة من البرامج المتطورة لكي تستخدم في صفوف المراحل الثانوية، وقد أطلق عليها المقترضات الهندسية Geometric Supposes. تتيج هذه البرمجيات للمستخدم إمكانية رسم أشكال متعددة، وإجراء قياسات، واستنتاج قرارات وأحكام. وعند بداية التسعينات توفر برنامجان من أكثر البرامج الهندسية تعقيدا، هما: هندسة كابرير Cabri Geometry و لوحة تخطيط المهندس Geometer's Sketchpad والذان أتاحا فرصة واسعة للمستخدم برسم الأشكال والتلاعب بها ببراعة بحيث يستطيع استكشاف جملة من المفاهيم الهندسية ليتوصل إلى استنتاجات شخصية نابعة من البيئة الرسومية التي وفرها هذين البرنامجين.

سنحاول أن نركز اهتمامنا، في هذا الفصل، نحو استكشاف برنامج Geometer's Sketchpad. بمزيد من التفصيل، نلرى كيف يمكن لهذا البرنامج أن يكون أداة مفيدة جدا لفرقة تدريس الرياضيات. ينبغي على معظم مستخدمي هذا الكتاب أن تكون لديهم بعض الخبرة والرأية في استخدام التقنية. إن هدفنا في هذا المقام هو بيان كيف يمكن أن تثري الدرس باستخدام آخر التقنيات وتوفير نهج بديلة لتعليم الأفكار والآراء التقليدية.

رغم أن تنشئة الطلبة، باستمرار، على حل مسائل الكتب المنهجية - التقليدية، فإنهم يجدونها غير واقعية، ومصدرا للإزعاج والملل.

بصورة تقليدية، يعمد مؤلفو الكتب، إلى تصميم المسائل بطريقة تسهل الحسابات الرياضية إلى أكبر حد ممكن دون إحداث خلل في مضمون المسألة. غير أن مواقف الحياة اليومية بصيغتها الواقعية تختلف بشكل ملموس عما يدور في المسائل المطروحة، كما أن الأعداد السائدة فيها تمتاز بتعقيدها وعدم بساطتها. وبمساعدة الآلة الحاسبة، يستطيع المعلم أن يعرض مواقف وقضايا واقعية يميزان حل المسائل دون أن يقلقه موضوع الارتباك الحسابي Computational Distraction.

فمسألة الحركة المنتظمة، على سبيل المثال، يمكن أن تتضمن قيما كسرية، فينتج عنها إجابات لا تتألف من أعداد صحيحة، وهو أمر لا يلقى الطلبة الذين يصطحبون الآلة الحاسبة معهم. يضاف إلى ذلك، وجود إمكانية لتشجيع الطلبة الذين يستخدمون الآلة الحاسبة على إعداد مسائل تركز إلى خبراتهم الشخصية (مثلا، احتمال معدل سرعة سيرهم نحو المدرسة).

ستففتح آفاق جديدة وواسعة عند استخدام الآلة الحاسبة لكي تساعد على حل المسائل التي تتجاوز حدود الحساب. تتضمن الفصول الدراسية لمادة الرياضيات في المدارس الثانوية المتقدمة عمليات حسابية مكثفة وشاملة. ولم تفض سئون طويلة، حيث كانت تستخدم المسطرة المنزلة أو جداول اللوغاريتمات لحل مثل هذه المسائل. لا بل حتى قضبان نابيير Napier's Rods، والمعداد ذو الخزرات الملونة Abacus قد لعبت دورا حاسما في تاريخ المحاولات البشرية الدائمة للتخلص من العبء الشاق الذي ينشعب عن عمليات الحساب اليدوية. ولا زال المعداد يستخدم بكثرة في البلدان الأقل تقدما بعميدان التقنيات الحديثة، وفي هذه الأيام، فإن الأسلوب المنطقي لعمليات الحساب عند هذا المستوى هو استخدام الآلة الحاسبة.

إن كل من الآلة الحاسبة العلمية (بمعنى آخر، تلك التي تحوي على دوال مختلفة، منها الدوال المثلثية) والآلة الحاسبة - الرسومية قد أصبحتا وسيلة مساعدة على التدريس، لكنها لن تكون بأي حال من الأحوال بديلا عنه.

أمثلة على أنشطة الآلة الحاسبة

Examples of calculator activity

قد تصبح الآلات الحاسبة أدوات لطيفة للطلبة الذين

الآلات الحاسبة CALCULATORS

عند استخدام الآلات الحاسبة، سيقف الطلبة على حقيقة العلاقات الموجودة بين الأرقام الناتجة عن العمليات السائدة فيها. على سبيل المثال، فإنهم سيكتشفون ما هو نوع المقسوم عليه الذي ينتج عنه أعداد بفواصل عشرية متكررة أو منتهية Repeating or Terminating Decimals، وسيلمتصون طرق تتبع الأعداد الأولية، وقد يكتشفون أنماطاً غير مألوفة من الأعداد. أو يلجئون إلى تحليل الخوارزميات الحسابية الشائعة. وربما يفلحون في استنباط خوارزميات أخرى.

إن جميع هذه الأنشطة قد تؤدي إلى عمل يتسم بمسمة إبداعية ومع ذلك فإن الأكثر أهمية في هذا المضمار هو التوجيه المثالي للمعلم، لأنه بعلمه، فإن الطالب سوف ينتهي بفقدان المنافع التعليمية المصاحبة لهذه الآلات المشوقة والمغيدة.

الآلات الحاسبة كمساعد في حل المسائل

Calculators As An Aid To Problem Solving

يشكي معظم المعلمين من مكابدة الطلبة لصعوبة جمعة عند إجراء العمليات الحسابية، وإن الأكثر سوءا هو معاناتهم من ضعف ملحوظ في حل المسائل. ولسوء الحظ فإن هذه الشكوى هي داء- ذاتي- سرمدى Self-Perpetuating illness !.

والطلبة الذين لا يفلحون في الحسابات الرياضية يطلب منهم باستمرار الاضطرار عن هذه المهارات، ونادرا ما تتاح لهم فرصة بالتدرب على مهارات حل المسائل. إن الذين يلجأون إلى العمل على بعض المسائل الأولية لا يحصلون، في معظم الأحيان، على إجابات مقاربة نتيجة للإخفاقات المستمرة بالعمليات الحسابية.

بصورة عامة يقتصر تعرض هؤلاء الطلبة لحل المسائل على الإحباط الدائم. والفشل دون أن تتوفر لهم ولو فرصة لنجاح واحدة نتيجة للعقبات الحسابية التي تشخص أمامهم.

وهنا تظهر أهمية الآلة الحاسبة بوصفها مصدرا مساعدا. فالاستخدام الانتقائي لها في تجاوز حاجز الحسابات الكامن سوف يتيح للطلبة فرصة التركيز على مهارات حل المسائل دون معاناة الخوف من مواجهة الإحباط الذي ينتج عن العجز الحسابي.

ينبغي أن تصمم هذه الأنظمة، بعناية بالغة، وترافق عن كثب لكي يضمن تأثيرها. وبعد إدراك النجاح في حل المسائل، ينبغي على الطلبة أن يحفزوا غريزيا لقهر المعجز الحسابي المزمع في ذواتهم.

إن هذه المرتبة غير المتوقعة قد تفتح باب المناقشة حول موضوع القدرة التقريبية Round Capacity للآلات الحاسبة، وستحضر الطلبة على تقدير الراتب العشرية المكافئة لـ 11/5 ، 11/6 و 11/7 بدقة أكبر. تكمن مناطق القوة في هذه المسألة ببيانها الذي أظهر بوضوح صعوبة الحصول على هذه النتائج بعد استخدام الآلة الحاسبة. والطلبة الذين ينجحون مثل هذه المهام بأيديهم، يعانون من ارتكاب الأخطاء، ولا تتوفر لنسبة كبيرة منهم فرصة كافية لمعالجة النمط السائد في النتائج المحسوبة بعد أن أزعجتهم عمليات القسمة الطويلة. إن فرصة مناقشة التقريب قد لا تبرز بصورة طبيعية كما حصل في هذه المسألة.

إن مقابلات هذه المسألة تتضمن استكشاف الأنماط للكسور التي تساوي قيم مقاماتها 9، 10، 11 و 7.

مسألة Problem

أودع بايلو \$5000 في حساب بمصرف يدفع فائدة مركبة مقدارها 6% سنوياً. كم سيصبح المبلغ المودع في الحساب بعد مرور 10 سنوات؟

قبل إدخال التقنية واستخدامها في المدارس، كان هناك أسلوبان أساسيان لحل هذه المسألة.

الحل الأول Solution 1

بالأسلوب اليدوي، حيث يستطيع الطلبة إجراء الحسابات التالية:

المبلغ، \$	في نهاية العام
$5000 + .09(5000) = \$5300$	1
$5300 + .09(\$5300) = \5618	2
$5618 + .09(\$5618) = \5955.08	3
.	.
.	.
.	.
\$89545.24	10

يبدو واضحاً بأن عملية إجراء الحسابات، دون استخدام آلة حاسبة، ستكون مهمة قاسية جداً حتى بالنسبة لأفضل الطلبة وأكثرهم تقوياً. بيد أن صعوبة العمليات الحسابية سوف تثبط همة كل من يحاول حل هذه المسألة.

الحل الثاني Solution 2

يستطيع الطلبة، في الفصل الدراسي - المتقدم، القيام بتعميم الحسابات السابقة بحيث يدركون تماماً حاجتهم لاحتساب قيمة $5000(1.06)^{10}$. كما يمكن أن تحل هذه المسألة، دون توظيف التقنية، بصورة تقليدية باستخدام اللوغاريتمات.

يحاولون تجربتها، ومطالعة الأنماط السائدة فيها، وإنشاء استنتاجاتهم الشخصية حول الأفكار والآراء الرياضية.

وقد تظهر الأنشطة الاستكشافية في جميع مستويات المراحل التعليمية. كما يمكن تحديد المسائل التالية في أي مستوى من المرحلة الخامسة فصاعداً. على سبيل المثال، بالنسبة للمراحل المبكرة. يستطيع الطلبة استكشاف المسألة الآتية بسهولة بالغة بعد أن يتعلموا أسلوب تكرار المراتب العشرية.

مسألة Problem

ما المراتب العشرية التي تكافئ 11/1، 11/2، 11/3، 11/4، ...؟ وهل تستطيع تخمين المرتبة العشرية المكافئة للكسر 11/9 دون استخدام آلة حاسبة؟

الحل Solution

رغم سهولة استكشاف هذه المسألة باستخدام أي نوع من الآلات الحاسبة، فإن شاشة العرض الواسعة التي توجد في الآلة الحاسبة الرقمية ستتيح للطلبة فرصة رؤية المزيد من المعلومات وإصدار الاستنتاجات بسهولة كبيرة.

إن شاشة العرض - على الجهة اليمنى - تم الحصول عليها باستخدام الآلة الحاسبة الرسومية من نوع Texas Instruction TI-83Plus. ينبغي على الطلبة اكتشاف ما يأتي من هذه الشاشات.

• إن المراتب العشرية المكافئة التي تم توليدها رياضياً هي من المراتب العشرية المكررة.

• إن المكررات (09، 18، 27، 36، ...) هي من مضاعفات العدد 9.

• وباستمرار هذا النمط على بقية الأعداد فتتكون المراتب العشرية المكافئة لـ 9/11 هي: 0.81818181

بالطبع. وعند إدخال الكسر 11/9، سي شاهد الطلاب صدق حدسهم، باستثناء آخر مرتبة عشرية تظهر على شاشة الآلة الحاسبة.

1/11	.0909090909
2/11	.1818181818
3/11	.2727272727

3/11	.1818181818
4/11	.2727272727
5/11	.3636363636
6/11	.4545454545

9/11	.8181818182
------	-------------

\$5300. إن الضغط على مفتاح الإدخال، عند هذه النقطة، يخبر الآلة الحاسبة بتكرار الإيعاز Instruction الأخير $Ans*1.06$ ، والتي تعطي قيمة رأس المال عند نهاية المستتين \$5618.

إن تكرار الضغط على مفتاح الإدخال لثمان مرات متتالية، كما يظهر في الشكلين الآتيين، سوف يعطينا النتيجة التي نبحث عنها.

5000.00
Ans*1.06
5300.00
5618.00
5955.00
6312.38
6691.13

6312.38
6691.13
7092.60
7518.15
7969.24
8447.39
8954.24

إن الخصائص المثيرة بهذا الحل تكمن في سهولة الحصول عليه، وبسرعة ملحوظة. ونتيجة لذلك، فإن من الممكن توسيع المسألة لتأمل الأسئلة ذات الصلة القريبة، مثل:

- ما هي الفترة الزمنية التي تستغرقها أموال "هابولو" لكي تتضاعف؟ أو تصبح ثلاثة أضعاف.
- غير نسبة الفائدة إلى 4%، ثم:

أ- قارن رأس المال لهابولو مع نتائج فائدة 6%.

ب- قارن الزمن الذي يستغرقه رأس المال لكي يتضاعف عند نسبة فائدة قدرها 4% مع الذي يستغرقه عندما تكون نسبة الفائدة 6%.

ج - قارن الزمن الذي يستغرقه رأس المال لكي يصبح ثلاثة أضعاف وعند نسبة فائدة قدرها 4% مع الذي يستغرقه عندما تكون نسبة الفائدة 6%.

- افترض أن الفائدة المركبة كانت نصف سنوية. كم سيصبح رأس مال "هابولو" النهائي بالمقارنة مع رأس المال النهائي الذي يتقاضاه عند اعتماد فائدة مركبة سنوية؟

• افترض أن الفائدة المركبة كانت شهرية. كم سيصبح رأس المال النهائي بالمقارنة مع رأس المال النهائي الذي يتقاضاه عند اعتماد فائدة مركبة - نصف سنوية؟

الحل الخامس 5 Solution

إن الصعوبة الأساسية التي تلاقيها مع الحل الرابع تنشأ عند ضرورة المراقبة العقلية لعدد مرات الضغط على مفتاح الإدخال. إن الاستمرار بعملية العد قد يترك بعض الطلبة. إن حلاً آخر باستخدام خاصية الجدولة Table الموجودة في عدد كبير من الآلات الحاسبة - الرسومية سيجنبنا هذه المشكلة.

حيث سيقوم الطلبة بإجراء الخطوات الآتية:

$$A = 5000 (1.06)^{10}$$

$$\log A = \log 5000 (1.06)^{10}$$

$$\log A = \log 5000 + 10 \log 1.06$$

$$\log A = 3.6990 + 10 (0.0253)$$

$$\log A = 3.5920$$

$$A = 8953.65$$

لاحظ بأن استخدام جداول اللوغاريتمات، والذي يحتوي على أخطاء تقريبية مقبولة بين أرقامه، سترك خطأ تقريبياً قدره \$0.59. وقبل أن يتم توظيف الآلات الحاسبة في عمليات إجراء الحسابات المختلفة، كانت اللوغاريتمات الوسيلة الأساسية لتبسيط العمليات الحسابية. ولم توجه عناية كافية لدراسة خصائص دوال اللوغاريتمات وأشكالها الرسومية. والآن دعنا نلقي نظرة على بضعة حلول أخرى تستثمر المفوائد التي توفرها التقنيات المستحدثة.

الحل الثالث 3 Solution

أدخل الصيغة $5000(1.06)^{10}$ في آلة حاسبة علمية أو رسومية، مع تثبيت العرض على مرتبتين عشريتين لتحصل على النتيجة \$8954.24 إن هذا الحل هو مبتذل لحد ما على الآلة الحاسبة.

الحل الرابع 4 Solution

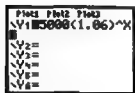
حتى في المراحل الأدنى، فإن القدرة الكبيرة للآلات الحاسبة - الرسومية تجعل المسألة أكثر متعة وتشويقاً. ونظراً لأن المسألة تتعامل مع الدوال والزمن والمستندات، ينبغي تغيير طريقة عمل الآلة

Mode	Sci Eng R
Float	01 3456789
Editor	Degree
Func	Par Pol Seq
Connector	Dot
Sequential	Input
Eq	atb re pr
Horiz	G-T

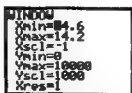
للعمل على أساس مرتبتين عشريتين. إن السطر الثاني من الشكل التخطيطي، بالجهة اليمنى - يوضح بأن هذه العملية قد اكتملت على الآلة الحاسبة TI-83.

أدخل قيمة 5000 ثم اتبعها بمفتاح الإدخال Enter. بالضغط على مفتاح $Ans*1.06$ تقوم الآلة الحاسبة بإيجاد قيمة $5000(1.06)$ أو المبلغ الكلي بعد مرور سنة واحدة

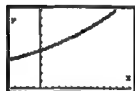
5000	5000
Ans*1.06	5300
	5618



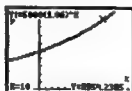
أدخل الدالة



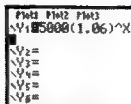
أدخل النافذة لفرض الرسم



رسم بيان



شعّ الرسم حتى تصبح $X=10$



X	Y1
0.00	5000.0
1.00	5300.0
2.00	5618.6
3.00	5955.1
4.00	6312.4
5.00	6691.1
6.00	7092.6

X	Y1
7.00	7512.4
8.00	7951.1
9.00	8409.2
10.00	8897.2

بصورة عامة، يمكن استخدام الآلة الحاسبة - الرسومية لحل المسائل التي لا سهيل إلى حلها بالأساليب والطرق التقليدية. تأمل المسألة الآتية:

مسألة Problem

جد إحداثيات جميع نقاط تقاطع الأشكال الرسومية للمعادلات التي معادلتها $y = x^2$, $y = 2^x$

الحل Solution

في بداية الأمر، قد يظهر الحل واضحاً لا لبس فيه، لأن فحص المعادلتين يعطي إحداثيات نقطتي التقاطع (2,4) و (4,16). بيد أن الشكل الرسومي المرسوم بصورة جيدة، كما في الشكل الآتي، يظهر وجود ثلاثة نقاط تقاطع، الأولى والثانية هما المذكورتان قبل قليل، أما الثالثة فتقع في الربع الثاني Quadrant II.

قد يحاول المرء إيجاد إحداثيات نقاط التقاطع باستخدام التقانات التي نستخدمها في رياضيات المدارس الثانوية. ولن تكون هذه التقانات ذات فائدة ملموسة. فعلى سهيل المثال، قد نحاول أحدنا استخدام اللوغاريتمات:

$$x^2 = 2^x$$

$$2 \log x = x \log 2$$

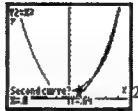
إن هذه الطريقة لن تكون قابلة للاستخدام والتطبيق في إيجاد الحلول لقيم $x < 0$ ، ونظراً لأن قيمة $\log x$ لن تكون قابلة للتعريف والوصف ما لم تكن $x > 0$.

قم بتنفيذ قائمة الرسم Graphing Menu عن طريق الضغط على مفتاح (Y=)، ثم أدخل الدالة $Y1=5000(1.06)^X$ ، كما يظهر في المقطع الأول من الشكل السابق. وستقوم الآلة الحاسبة - الرسومية بإعداد جدول عن طريق الضغط على مفتاح [TBLSET] ثم أدخل قيمة البداية للمتغير X والتي ستكون 0، وسيكون التغير في X هو 1. ولأن أضغط المفتاح [TABLE] وأبدأ بالتنقل إلى أسفل للحصول على النتيجة المطلوبة بعد مرور عشر سنوات، والتي تظهر في المقطع الرابع من الشكل السابق. إن النتيجة ستظهر عند قاعدة لوحة العرض، وستكون مقربة إلى \$954.24.

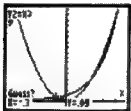
الحل السادس 6 Solution

يستمر هذا الحل الإمكانيات الرسومية الموجودة في الآلات الحاسبة - الرسومية كما في الحل الخامس. وينبغي إدخال الدالة إلى الآلة الحاسبة. وقبل عملية إعداد الرسوميات Graphing، يجب أن تكون متأكداً من كون نافذة عرض الرسوميات مناسبة ومعقولة. إذا لم يكن المجال Domain والمدى Range قد حددا بصورة معقولة فلن تستطيع أن تظهر قيماً صحيحة للمتغير X عندما ستتبع الشكل الرسومي. يظهر أدناه مثال عن نافذة العرض المناسبة.

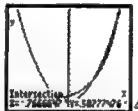
إن الضغط على مفتاح [GRAPH] سيُنتج عنه ظهور الشكل الرسومي كما سيظهر في المقطع الثالث من الشكل التوضيحي. اضغط مفتاح رسم [TRACE] ثم قم بتحريك المؤشرة لحين الوصول إلى قيمة 10 للمتغير X. وإن هذا الشكل التخطيطي سوف يعطي نفس النتائج، كما في الحلول السابقة، ودون إجراء تقريب دقيق.



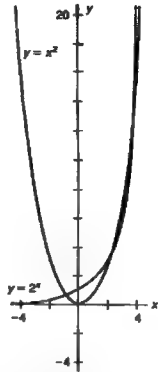
اعدت التحسين



اعدت نقطة قريبة من
التقاطع المطرب



اقرأ الجواب



إن قيمة النقطة الثالثة، وفق المراتب العشرية المتاحة على الآلة هي $(-0.7666647, 0.58777476)$.

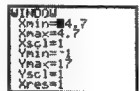
فإن حل الآلة الحاسبة - الرسومية من أجل إيجاد التقاطع الثالث، يظهر بجلاء في الخطوات الآتية :

المحاكاة Simulation

تتمتع مصادر قوة الآلات الحاسبة - الرسومية في قدرتها على توظيف الأفكار الرياضية لإتجاز المحاكاة. والآن تأمل المسألة الجبرية - التقليدية الآتية.



ادخل الدوال



ادخل النافذة للرسم



الرسم البيان



انتق خيار حساب
نقطة التقاطع

مسألة Problem

تبعد مدينة نيويورك عن شيكاغو بـ 850 ميلاً. وفي الساعة 9:00 من أحد الأيام، غادر قطار محلي من النوع الذي يتوقف في جميع المحطات من شيكاغو باتجاه نيويورك، مسافراً بسرعة منتظمة قدرها 50 ميل/ساعة. بعد مرور ساعة، غادر قطار سريع Express train مدينة شيكاغو متبعاً نفس المسار، مسافراً بسرعة منتظمة قدرها 55 ميلاً/ساعة. متى يدرك القطار السريع القطار الأول؟.

حل تقليدي Traditional Solution

أفرض عدد ساعات سفر القطار الأول t .

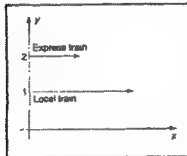
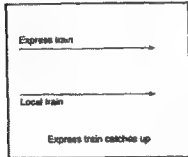
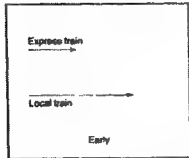
عدد ساعات سفر القطار الثاني $t-1$

بعد مرور ساعة من الزمان، قطع القطار الأول 50 ميلاً، ولم يتحرك القطار الثاني من محله.

وبعد مرور ساعتين من الزمان، قطع القطار الأول 100

ميلاً، وقطع القطار الثاني 55 ميلاً.

- أدخل الدوال - المقطع الأول.
- أدخل نافذة الرسوميات - المقطع الثاني.
- الشكل الرسومي - المقطع الثالث.
- انتق الخيارات لإيجاد نقطة التقاطع - المقطع الرابع.
- من الشكل الآتي :
- اختر الشكلين الرسوميين - المقطعين 1 ، 2.
- اختر نقطة مناسبة قريبة من نقطة التقاطع - المقطع 3.
- اقرأ الجواب - المقطع الرابع.



تمثل الإحداثيات السينية x -coordinates للقطارين المسافة من مدينة شيكاغو.

على سبيل المثال، في الساعة 11:00 صباحاً، وبعد مرور ساعتين على مغادرة القطار الأول، سيكون الإحداثي السيني للأول 100 بينما يكون الإحداثي السيني للقطار السريع 55. يعتمد الإحداثي السيني للقطارين على الفترة الزمنية المستغرقة. أما الإحداثي السيني للقطار الأول بعد مرور t من الساعات هو 50t، أما بالنسبة للقطار الثاني فيكون $55(t-1)$.

إن المعادلتين اللتان تصفان حركة القطار الأول هي:

$$x = 50t \quad y = 1$$

أما المعادلتان اللتان تصفان حركة القطار السريع هي:

$$x = 55(t-1) \quad y = 2$$

إن موقفاً مثل هذا الموقف، حيث يعتمد المتغيران (x, y) على متغير ثالث t ، هو مثال حيث تظهر الحاجة إلى معادلات معملية Parametric Equations (البارامترية).

بالحقيقة، فإن نوع الحلول السائدة في محاكاة معظم الحواسيب والآلات الحاسبة هي من نوع المعملية Parametric. ولإن بقاء هذه الحقيقة عاقلة في أذهاننا، ستجملنا تتمكن من

وبعد مرور ثلاث ساعات، قطع القطار الأول 150 ميلاً، بينما قطع القطار الثاني 110 ميلاً.

•
•
•

بعد مرور t من الساعات، يكون القطار الأول قد قطع 150 من الأميال، بينما يكون القطار الثاني قد قطع $55(t-1)$ من الأميال.

سيدرك القطار الثاني، القطار الأول عندما تكون المسافة التي قطعها القطاران برحلتهم متساوية. ويمكن وصف هذه القضية بالمعادلة الآتية:

$$50t = 55(t-1)$$

وسنتج عن حل هذه المعادلة قيمة $t=11$. بما أن القطار الأول قد غادر في الساعة 9:00 صباحاً، فبعد مرور 11 ساعة، أي في الساعة 8:00 مساءً سيدرك القطار السريع القطار الأول.

حل الآلة الحاسبة - الرسومية

Graphing Calculator Solution

ترعرع الطلبة في الألفية الجديدة في عصر الحاسوب والمعلوماتية، حيث تكون الرسومات والبرمجات مكاناً شائعاً ومتوقفاً.

يمكن استخدام الدوال الرسومية والمرئية المتوفرة في الآلة الحاسبة - الرسومية والتي ستجعل المسألة السابقة، وحلها، أكثر تشويقاً وتميزاً من الحل التقليدي لدى جملة من الطلبة. في البداية، ينبغي أن نتخيل القطارين وهما يسافران عبر لوحة عرض الآلة الحاسبة. وسيأتي هذا الوصف التفصيلي عما قريب.

إن وضع الوصف على نظام إحداثيات Coordinate system يمكننا من إعداد المحاكاة بالطريقة الآتية: الإحداثي الصادي y -axis للقطار الأول يكون ثابتاً على الدوام، وافترضه $y=1$. وسيكون الإحداثي الصادي للقطار السريع ثابتاً أيضاً، وافترضه $y=2$.

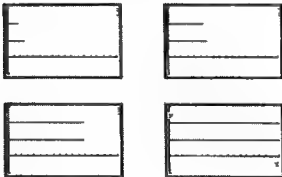
يمكن اعتبار قيم المتغير y أرقاماً للمسارين tracks. لذا سيكون القطار الأول على مسار رقم (1) في جميع الأوقات، بينما سيكون القطار السريع على مسار رقم (2) في جميع الأوقات. إن أرقام هذين المسارين هي أعداد اعتباطية كلياً، ولكن ينبغي أن تكون متاكدين من اختلافهما بالنسبة للقطارين، على الدوام.

850 ميل من شيكاغو إلى نيويورك، ستقوم بتثبيت $X_{min}=0$ و $X_{max}=850$. وتمثل قيمة $X_{sc1}(x \text{ scale})$ المسافة بين التأشيرات على المحور السيني. وعليه، إذا كانت قيمة $X_{sc1}=50$ فإن التأشيرات على المحور السيني ستكون 50, 100, 150, 200, 850

```
WINDOW
tstep=.1
Xmin=0
Xmax=850
Xsc1=50
Ymin=-1
Ymax=3
Vsc1=1
```

ج - قيم y : بما أن قيمة y تمثل رقم المسار في هذه المسألة، فإن اختيار $Y_{min}=-1$ و $Y_{max}=3$ و $Y_{sc1}=1$ سيكون كافياً. وباستخدام $Y_{min}=-1$ ، ستتمكن الملاحظ

من مشاهدة المحور السيني مع تأشيراته بوضوح وسهولة. إن الشكلين الرسوماني أعلاه يظهران بوضوح المعلومات المطلوب إدخالها بعد الضغط على مفتاح **Window** لأغراض المحاكاة. في هذه النقطة، يستطيع المستخدم الضغط على مفتاح **Graph** ومراقبة القطارين وهما يقطعان الشاشة. لإزالة ما يظهر على الشاشة ومشاهدة القطارين للمرة الثانية، اضغط **2nd** ثم **PRGM**. يظهر أدناه الشاهد الملتقط لحركة القطارين.



لتقليل سرعة القطارين في المحاكاة، قم بتغيير قيمة T_{step} على نافذة العرض. إن الاختيار الأكثر قبولا هو $T_{step}=0.05$ ، وسيظهر موقع كل قطار كل ثلاث دقائق. رغم هذا، فإننا عند هذه النقطة لم نتجز حل المسألة الأصلية. ولإيجاد اللحظة التي يدرك فيها القطار السريع القطار الأول، فإن كل ما نحتاجه هو الضغط على مفتاح **TRACE**. إن الأشكال الرسومية الآتية تظهر اللوحات التي ستشاهدناها عندما تضغط على مفتاح سهم الأيمن.

إعداد محاكاة الآلة الحاسبة بسهولة بالغة.

إن الخطوات الآتية قد تم إعدادها على آلة حاسبة نوع (TI-83 Plus) رغم أن هذه الخطوات تشابه تلك التي يتم إجراؤها على آلات حاسبة مشابهة، كذلك.

1- اختر مفتاح **MODE** ثم

تناول الخيارات الموضحة على الجهة اليمنى (ينبغي أن يكون الإعداد على Par للمعلمية، و Simul بحيث يمكن أن نشاهد حركة القطارين على التوالي).

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol
Connected
Sequential
Real a+b1 re^it
Horiz G-T
```

2- لإدخال المعادلات اختر

المفتاح **[Y=]** كما فعلت في المواقف السابقة. وبما أن الأسلوب قد تم تثبيته

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=50T
Y2=85
Y3=85(T-1)
Z1=2
Z2=
Z3=
V1=
V2=
V3=
```

للمعلمية، فإن المعادلات التي سيتم إدخالها ستكون على شكل أزواج. إن استخدام الرمز السفلي subscript في الآلة الحاسبة سيتيح إمكانية إدخال مجاميع من المعادلات. 3- من الضروري إعداد النافذة مقدما، لتوفر مشهد مناسب للقطارين. وهناك ثلاثة مراحل لإعداد النافذة المناسبة :

أ- بالنسبة للوقت Time: يمثل الرمز t عدد الساعات التي سافر خلالها القطار الأول. وبما أن سرعة سفره هي 50 ميل/ساعة، فإنه سيستغرق $850 \div 50 = 17$ ساعة ليقطع المسافة من نيويورك إلى شيكاغو. إذن نستطيع تحديد تثبيت التوقيينات الصغرى والعظمى كما يلي :

$T_{min}=0$ و $T_{max}=17$. إن تثبيت قيمة T_{step} سيتحكم بأسلوب تغيير قيمة t بالنسبة لأغراض الرسوميات. إذا تم تثبيت قيمة $T_{step}=1$ ساعة، ستقوم الحاسبة بعرض موقع القطار عند نهاية كل ساعة بحيث تكون سرعة الحركة كبيرة. باستخدام قيمة أصغر للمتغير T_{step} ، افترضها 0.1، سنلاحظ بأن حركة القطار ستكون عند كل 0.1 ساعة، أو كل ستة دقائق.

هذه إحدى القيم التي تستطيع تجربتها وتلاحظ الفرق بالتتابع.

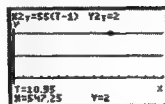
ب- قيم x : بما أن القطارين يقطعان مسافة

```
WINDOW
Tmin=0
Tmax=17
Tstep=.1
Xmin=0
Xmax=850
Xsc1=50
Ymin=-1
```

استمر بعملية التتبع
لحين $T=11$.



القطاران يبعدان بـ 550
ميلا عن شيكاغو لقد
أدرك القطار الثاني القطار
الأول.



نتيجة لعملية التتبع، سحاظ الطلبة بأن كلا من القطارين
يبعدان بـ 550 ميلا عن شيكاغو عند $T=11$ ، أو الساعة 8:00
مساء.

يستطيع المعلمون عمل هذه المشاهدات عند استخدام
المحاكاة لتدريس هذه المسألة عندما يكون:

- مستوى التحفز عند الطلبة مرتفعا بشكل كبير، وسيشارك
معظم الطلبة في المسألة ويتفاصيل حلها.
- يلاحظ الطلبة وجود أنماط محددة لم يستطيعوا ملاحظتها
عند استخدام الأساليب التقليدية. فعلى سبيل المثال،
عندما يستمرون بالرماية، سلاحظ الطلبة، عادة، بأن
القطار السريع يكتسب 5 أميال على حساب القطار الأول
عند انقضاء كل ساعة. فمثلا:

$$X_{2T}=220 \quad X_{1T}=250 \quad 5 = T \text{ عندما}$$

$$X_{2T}=275 \quad X_{1T}=300 \quad 6 = T \text{ عندما}$$

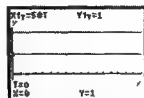
$$X_{2T}=330 \quad X_{1T}=350 \quad 7 = T \text{ عندما}$$

عند هذه النقطة، سلاحظ الطلبة بأن هناك 20 ميلا أمام
القطار لكي يدرك القطار الأول، وسيحتاج إلى أربعة ساعات
إضافية، ويكون الجواب $T=11$.

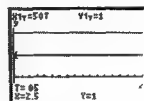
- عندما يصبح الطلبة مبدعين وذوي ابتكارات. على سبيل
المثال، قد يلاحظون إلى وضع القطارين على نفس المسار، أو
يقترحون إعادة حل المسألة والقطارين يقداران باتجاهين
متعاكسين، وفي الأخير يجتاز أحدهما الآخر.
- إن بعض المسائل من هذا النوع قد تؤدي، عادة، إلى حلول
جبرية.

تتضمن المحاكاة مسائل الحركة المنتظمة - التقليدية :
إسقاط كرة من قمة سcaff، أو قذف جسم في الهواء إلى أعلى
رأسيا، أو قذف جسم قطريا، ... الخ.

اللوحة الأولى تظهر القيمة
الابتدائية.

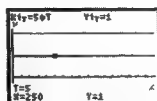


حرك المؤشرة إلى اليمين
وشاهد التيم لقيم T الأكبر.

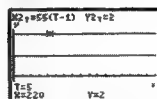


في كل حالة، تظهر قيم كل من T ، X ، Y . وكما ستلاحظ بأنه
كلما تقوم بالضغط على السهم الأيمن، ستزداد قيمة T بمقدار 0.5،
نظرا لأننا قمنا بتثبيت قيمة $Tstep$ على هذه القيمة.

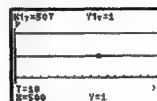
استمر بتحريك المؤشرة
لغاية $T=5$.



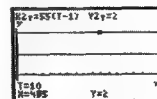
إن ضغط السهم الأعلى
سيمكنك من التنقل بين
القطارين.



استمر بعملية التتبع لحين
 $T=10$.

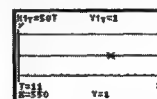


لاحظ بان القطارين يبعدان

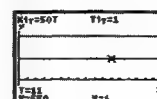


500 و 495 ميلا عن شيكاغو.

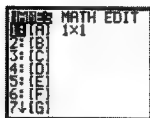
استمر بعملية التتبع لحين
 $T=10.95$



القطاران يبعدان عن
بعضهما بـ 4/1 ميل فقط



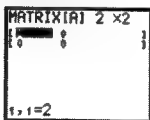
Inverse للمصفوفة A، يمكننا صياغة ذلك بصيغة $X=A^{-1}B$.
تزودنا هذه المعادلة بطريقة مبسطة لحل مثل هذه المجموعة
من المعادلات باستخدام الآلة الحاسبة - الرسومية. إن كل ما
نحتاجه هو إدخال معاملات المصفوفتين A و B إلى الآلة
الحاسبة كما يلي:



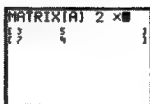
اضغط مفتاح المصفوفة المؤشر
MATRIX
(X⁻¹)



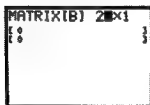
اختر EDIT وانتق المصفوفة
A.



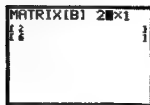
أدخل أبعاد المصفوفة A (2x2)
ولاحظ كيف أن الآلة
الحاسبة ستقوم آليا بإعداد
مصفوفة 2x2 والتي تكون جميع مدخلاتها مساوية للصفر.



ينبغي إدخال معاملات
المصفوفة A مدخلا فمدخلا
اضغط QUIT
(2nd) (MODE)



والآن نحن على استعداد
لإدخال المصفوفة B.
اضغط المصفوفة Matrix
ومفتاح (X⁻¹) وقم بتحريك
المصفوفة B لتكون المصفوفة
من نوع 2x1.



أدخل معاملات المصفوفة
QUIT B
(2nd) (MODE)

إن جميع هذه المسائل، يمكن معالجتها في المنهج الدراسي
للمدارس الثانوية، وبقليل من الاعتناء والمتابعة.

حل المعادلات باستخدام المصفوفات Solving Equation Using Matrices

مسألة Problem

استخدم الآلة الحاسبة - الرسومية لحل كل من مجموعة
المعادلات الآتية :

$$3x + 5y = 2 - \text{أ}$$

$$7x + 4y = 6 - \text{ب}$$

$$2A - 3B + 2C - 4D + 2E = 8$$

$$3A + 2B - 3C + 3D - 3E = -5$$

$$5A - 7B + 5C - 5D + 5E = 9$$

$$11A - 5B + 4C + 3D + 5E = 2$$

$$7A - 9B - 7C - 13D - 7E = 1$$

يمكن حل المجموعة الأولى من المعادلات عن طريق رسم
الآلة الحاسبة لأشكال المعادلات وباحتساب إحداثيات نقطة
تقاطع المستقيمين. أما المجموعة الثانية من المعادلات فمن
التعذر حلها بطريقة رسومية. نظرا لكونها ذات بعد خامس
Fifth Dimension. إن الطريقة الملائمة لحل مجموعة من
المعادلات تشابه هذه المعادلات تكون عن طريق استخدام
إمكانات المصفوفة بالآلة الحاسبة - الرسومية.

الحل Solution

افترض: في (أ) ، لتكن

$$\text{Coefficient } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrix لمجموعة المعادلات في هذه المسألة.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ مصفوفة المتغير Variable Matrix لمجموعة}$$

المعادلات في هذه المسألة.

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ مصفوفة الثوابت Constant Matrix لمجموعة}$$

المعادلات في هذه المسألة.

إذا قمنا بضرب المصفوفتين A ، X سنحصل على

$$\begin{pmatrix} 3x + 5y \\ 7x + 4y \end{pmatrix} \text{ والتي تساوي } \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ وفقا لمجموع المعادلات في هذه}$$

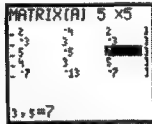
المسألة. يمكن كتابة هذه النتائج كمعادلة مصفوفة $AX=B$.

بافتراض وجود حل لمجموعة المعادلات، ووجود مقلوب

قم بتغيير أبعاد المصفوفة A إلى (5x5). لاحظ كيف أن



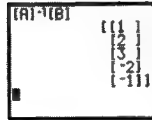
الحالة الحاسية ستقوم بتثبيت المصفوفة الجديدة 5x5. وستبقى بعض المدخلات كما هي في المصفوفة A السابقة.



إن معاملات المصفوفة A ينبغي إدخالها واحدة، فواحدة.

اضغط QUIT

MODE



الآن قم بتغيير المصفوفة B إلى (5x1) وبإدخال معاملات A^-1B. اضغط على A^-1 بنفس الطريقة التي أجريتها سابقاً وسيظهر لنا الحل.

إن هذا الحل يخبرنا أن النظام الأصلي $B=2$ ، $A=1$ ، $E=-1$ ، $D=2$ ، $C=3$. إن ما يثير الاهتمام هو أن استخدام المصفوفات لإيجاد حل نظام يتألف من خمسة معادلات بخمس متغيرات ليس أكثر صعوبة من إيجاد حل لنظام يتألف من معادلتين بمتغيرين، باستثناء ظهور الحاجة إلى إدخال المزيد من البيانات.

تطبيقات حساب التفاضل والتكامل

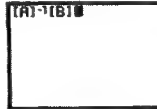
Calculus Application

المشتقات Derivatives

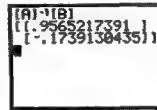
إن من أهم الخيارات الممتعة المثبتة في الآلة الحاسبة - الرسومية هي القدرة على إيجاد المشتقة العددية Numerical Derivative. على سبيل المثال، إذا أردنا إيجاد $f'(1.5)$ إذا كانت $f(x) = x^3 - 4x$.

إن إحدى الطرق لتحقيق ذلك تكمن في جعل الآلة الحاسبة ترسم التخطيط الرسومي $y = x^3 - 4x$ ، ثم علينا أن نرسم مماساً في النقطة المحددة. إن التعاقب الآتي يظهر هذه العملية في الآلة الحاسبة TI-83 Plus.

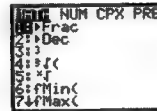
والآن نستطيع أن نجعل الآلة الحاسبة تقوم بحساب $A^{-1}B$ ، ولكي تفعل ذلك اتبع ما يلي :
اضغط X^{-1} (2nd) واختر A.
والآن اضغط X^{-1} (بحيث يتم أخذ المقلوب)، (2nd) (MATRIX) واختر B.



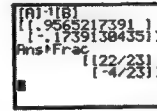
ستظهر الشاشة:



والآن سينجم عن ضغط Enter الحل:

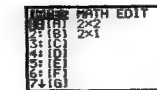


للنظرة الأولى، قد تعتقد بأن النتائج خاطئة. اضغط MATH وستشاهد لوحة العرض هذه :

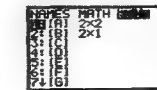


اختر الخيار 1 لتغيير النتائج إلى كسور بحيث تكون نتائج حل المسألة بصيغة كسرية.

إن الحل يتفحص كلا من المعادلتين. تمتاز طريقة المصفوفة بقرارات متميزة نظراً لكونها تتضمن إدخال المعاملات إلى المصفوفة A، والمصفوفة B. وليس ثمة تأثير ملموس سواء كانت هناك معادلتين بمتغيرين، أو 15 معادلة بـ 15 متغير.

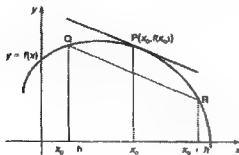


اضغط مفتاح MATRX X^{-1}



اختر EDIT وانتق المصفوفة A.

ستجد الآلة الحاسبة المشتقة العددية ؟ ولماذا تكون النتيجة غير دقيقة في هذه الحالة ؟



إن التخطيط الرسومي أعلاه، يظهر دالة عامة (ذات أسلوب جيد (Well-Behaved هي $y=f(x)$ ، وإن المماس المرسوم عند النقطة $P(x_0, f(x_0))$ ، وإذا انتقلنا مسافة قصيرة قدرها h بعيدا عن x_0 في كلا الاتجاهين على المحور السيني، سنحصل على نقطتين قيمتهما x_0-h و x_0+h . إن المائلين لهاتين النقطتين على المنحنى هي $R(x_0+h, f(x_0+h))$ و $Q(x_0-h, f(x_0-h))$. إذا كانت قيمة h صغيرة لحد كاف، فإن القاطع Secant خلال النقطتين Q, R سيكون عمليا موازيا للمماس المار خلال النقطة P .

إن احتساب ميل قطعة المستقيم \overline{QR} سيعطينا تقريب دقيق الميل المماس خلال النقطة P .

$$\overline{QR} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \text{ ميل قطعة المستقيم}$$

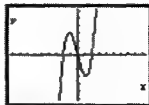
إن هذه القيمة يطلق عليها المشتقة العددية للدالة $y=f(x)$ عند النقطة x_0 . وهي الطريقة التي تستخدم بواسطة الآلات الحاسبة-الرسومية لإيجاد قيمة المشتقة لدالة في نقطة محددة. إن قيمة المشتقة العددية تعتمد على القيمة المستخدمة للمتغير h . إن القيمة الافتراضية default للمتغير h في معظم الآلات الحاسبة - الرسومية هي 0.001. وتمطي هذه القيمة نتائج دقيقة بشكل مدعش.

في مرحلة سابقة، عندما وجدنا NDERIV (الظاهرة على الجهة اليسرى)، استخدمت الآلة الحاسبة - بصورة آلية قيمة $h = 0.001$ ولنفرض التحكم بهذه القيمة، أدخل مدخلا رابعا لدالة

$$\begin{aligned} & \text{nDeriv}(Y1, X, 1.5) \\ & 2.750001 \\ & \text{nDeriv}(Y1, X, 1.5, \\ & 0.001) \\ & 2.750001 \end{aligned}$$

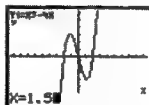
$$\begin{aligned} & \text{nDeriv}(Y1, X, 1.5, \\ & 0.001) \\ & 2.75000001 \\ & \text{nDeriv}(Y1, X, 1.5, \\ & 0.000001) \\ & 2.75 \end{aligned}$$

على اليسار يظهر التخطيط الرسومي للدالة $y=x^3-4x$.



POINTS STO
1:ClrDraw
2:Line(
3:Horizontal
4:Vertical
5:Tangent
6:DrawF
7:Shade(
PRGM

أرسم DRAW اختر (PRGM) ثم الخيار 5 لرسم مماس.



إما أن تدخل 1.5 لقيمة x ، أو قم بتحريك المؤشرة لحين الوصول إلى $x = 1.5$ ثم اضغط (ENTER).



سترس الآلة الحاسبة المماس للدالة ثم تعطينا معادلته. إن الميل Slope المعطى 2.750001 هو تقريب دقيق للميل الحقيقي 2.75.

إن طريقة أخرى لإيجاد المشتقة العددية لدالة عند نقطة ما تعتمد مبدأ استخدام دالة NDERIV (أو NDER) الموجودة في معظم الآلات الحاسبة-الرسومية. ولا تعتمد هذه الطريقة على رسم المخطط الرسومي. بالنسبة للمثال السابق، يظهر التعاقب باستخدام الآلة الحاسبة TI-83 Plus

NUM CPX PRB
1:1
2:1
3:1
4:1
5:1
6:fMin(
7:fMax(
8:nDeriv(
9:fInt(
0:Solver...

nDeriv(Y1, X, 1.5)
2.750001

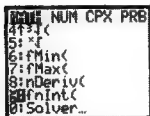
اضغط المفتاح (MATH)، اختر الخيار الخاص بدالة NDERIV. أدخل الدالة (إما بصورة صريحة Explicitly أو بالتوجه نحو خيار VARS وإيجاد قائمة متغيرات y واختيار $(Y1)$. أما المعامل الثاني، فيمثل اسم المتغير - غير المعتمد

Independent Variable، وسيكون في هذه الحالة X . أخيرا، أدخل النقطة التي تريد المشتقة عندها، ثم اضغط (ENTER). في هذه النقطة سيشأ سؤالان بصورة طبيعية هما : كيف

1- إن التفسير الهندسي للتكامل المحدد عبارة عن مساحة (والتي تم عرضها مظللة).

2- عندما يكون الفحنى أسفل المحور السيني فإن التكامل المحدد يكون سالب القيمة.

إن الطريقة البديلة لاحتساب التكامل المحدد لا تعتمد على رسم التخطيط الرسومي.



اضغط المفتاح **MATH**

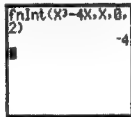
واختر الخيار الخاص بإيجاد

التكامل المحدد **(fnInt)**

أدخل الدالة، سواء بصورة صريحة أو بالتوجه نحو خيار

VARS وإيجاد قائمة متغيرات y ، واختيار y_1 .

كما في المشتقة العددية، أدخل اسم المتغير - المستقل (x) ثم حدود التكامل. لاحظ كم ستكون النتائج المستحصلة دقيقة، اعتمادا على طبيعة الدالة في الفترة **Interval**.

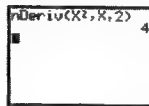


الحواسيب Computers

باشرت مجموعة من المدارس، منذ عقد الستينات، باستخدام الحواسيب في المناهج الدراسية. وبعد قسم الرياضيات أول قسم يستخدم الحواسيب في معظم المدارس، لأن استخدامها كان مقصورا في تلك الأيام على أنشطة البرمجة **Programming** فقط وقد تعلم الطلبة استخدام اللغات البرمجية مثل: **Fortran**، **Cobol**، أو **Basic**، وفي الأيام الأخيرة بدأ الاهتمام باللغات: **Pascal**، **C++**، **C++**.

في البداية كانت تعطي مسائل رياضية للطلبة لفرض حلها باستخدام برمجيات بهذه اللغات. وقد صممت مساقات الفصول الدراسية، إلى حد كبير، للطلبة الذين يمتلكون مواهب وقدرات عالية. من أجل هذا أعرض كثير من الطلبة عن إدراج مادة برمجة الحاسوب في قائمة فصولهم الدراسية. وفي عقد الثمانينات والتسعينات، وبعد ظهور الحاسوب الشخصي **Personal Computer**، حصلت قفزة كبيرة في برمجة الحاسوب باتجاه استخدام البرمجيات **Software**. وبدأت

NDERIV. إن إدخال قيمة h في النهاية، كما يظهر في الجهة اليسرى. عند استخدام قيمة صغيرة جدا للمتغير h ، فإن المشتقة العددية ستكون مساوية للمشتقة الحقيقية.

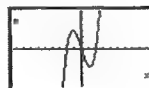


استنادا إلى الدالة والنقطة المستخدمة، فإن قيمة $h=0.001$ قد تعطي المشتقة بصورة دقيقة، كما يظهر في الشكل المجاور.

التكاملات المحددة Definite Integrals

سنقوم بإعادة رسم المخطط الرسومي للمعادلة $y=x^3-4x$ ويمكن استخدام الآلة الحاسبة - الرسومية لتقريب التكاملات المحددة فعلى سبيل المثال، في هذه الحالة افترض بأننا نريد

تقريب $\int_0^2 (x^3 - 4x) dx$ اضغط المفتاح **TRACE**

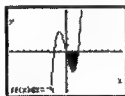
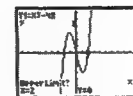
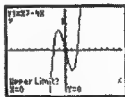
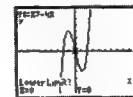


إظهار لوحة العرض الموجودة على الجهة اليسرى. وباختيار الخيار الأخير سوف يثبت خاصية التكامل العددي **Numerical Integration**.

إن التعاقب الآتي للخيارات سيظهر على لوحة العرض. وبتحريك المؤشرة

إلى المحددين المطلوبين

(الأدنى والأعلى) وبالضغط على مفتاح **ENTER** سوف تنتج عنه النتيجة المطلوبة، كما تظهر في مجموعة الأشكال الآتية :



من وجهة نظر علم أصول التدريس، فإن لوحات العرض الأخيرة تؤكد على نتيجتين نحاول أن نركز جهودنا عليها في حساب التفاضل والتكامل:

لا غبار عليه شريطة أن يتضمن البرنامج تقوية إيجابية وتعقيم ملموس لفهم الطلبة.

صفحات الويب كمصدر مساعد للتدريس

Web Pages on an aid to Instruction

إن تقنية الاتصالات الحديثة جعلت من عملية تبادل المعلومات والمشاركة فيها أمراً ممكناً وبمتناول الجميع. وتعد صفحات الويب Web Pages أحد التطبيقات المستحدثة والمبتكرة لهذه التقنية. وكلما نحتاجه للارتباط بموارد مباشرة Online-Resources هو خط هاتفي أو خط من نوع آخر مقدم، وحاسوب وبطاقة Modem (أو بطاقة Ethernet)، وبرنامج اتصالات. تمتلك صفحات الويب قدرة كافية لتوفير خدمة مناسبة لجميع الأعمال، تتضمن المعلمين بالإضافة إلى الطلبة، وبمسائل محددة.

يستطيع المعلمون المشاركة في المعلومات حول الاقتراحات الخاصة بكيفية تعلم موضوع محددة بكفاءة أكبر، أو ما هو الأسلوب الذي ينبغي اعتباره عند حل مسألة ما. ومن خلال بعض صفحات الويب، يستطيع الطلبة التواصل مع معلمهم وغيرهم من الطلبة. وتوجد الآن مدارس تزود الطلبة بكتب منهجية، مباشرة على الشبكة، كما أن لكل طالب أو طالبة نسخة شخصية.

لقد فحّحت شبكة الإنترنت كما هائلاً من الإمكانات لاستخدام الحاسوب. وبالنسبة لوجهة نظرنا، فإننا نرى بأن إدراج الإمكانات في هذا الوضع سيؤدي إلى تغيير هذا الكتاب عتيق الطراز قبل صدوره !

إن فرص تحسين التدريس والارتقاء به، وضمان فهم أعمق للمفاهيم الرياضية باستخدام شبكة الإنترنت يتحدد فقط بالقدرة الإبداعية لدى المعلم، ويبدو بأن المستقبل لا حدود له !.

الحواسيب مورد للأنشطة الترفيهية

Computers As Source for Recreational Activities

تتوفر مجموعة كبيرة من البرمجيات التي تتيح للطلاب فرصة ممارسة اللعب مع الحاسوب. وسيكون للألعاب التي يتم انتقاها بعناية تأثير ملموس في تعزيز التطور في مهارات الطلبة في المنطق. كذلك ينبغي على المعلم اختيار مستوى وتعقيد اللعبة في ضوء هوية الطالب المستخدم. إن اللعبة التي تخلو من جو التحدي أو تحتوي على نزر قليل منه قد تصيب الطالب بالملل والضجر أو تنشئ لديه مهارات تافهة لا فائدة منها.

من جهة أخرى، فإن البرنامج الذي ينشئ لعبة تتجاوز

أقسام أخرى (غير قسم الرياضيات) باستخدام برمجيات معالجة النصوص Word Processing، وبرامج الصالحات الممتدة Spread sheets. وقد نجم عن هذا التوجه الجديد، إقبال متزايد للطلبة على استخدام الحواسيب في المدارس الثانوية. من أجل ها دعنا نعالج جملة من جوانب استخدام الحاسوب في برامج التدريس.

برنامج مثل درس خصوصي

As Tutorial Program

يمكن إنتاج وتطوير برمجيات الحاسوب التي تجهز الطلبة بمفردات متنوعة من المنهج الدراسي للمدارس الثانوية، أو شراؤها من مواردها. وباستخدام هذه البرمجيات سيتعمق فهم الطلبة بمادة الجبر، والهندسة، وحساب المثلثات، إضافة إلى الحساب. يضاف إلى ذلك، فإن الحاسوب يقوم بهما مضافة إلى بيانات الإجابة الصحيحة، وإنشاء مسائل أخرى (أو يظهر الخطأ ويعد المسألة ذاتها لمرة متعددة).

وهناك برنامج يحدد موارد الخطأ بدقة، أو يقدم اقتراحات للوصول إلى الإجابة الصحيحة استناداً إلى إجابة الطالب الخاطئة بالتحديد.

توجد عدة طرق تتيح استخدام الحاسوب كدرس خصوصي، أو التنقيب عن المعرفة، أو التمرين. ينبغي أن يكون البرنامج قابلاً للتعديل ومرناً بحيث يمكن الاختيار في ضوء مستوى الصعوبة والتعقيد، عدد المسائل المطروحة، ومستوى السيطرة والتفوق Mastery Level. كما ينبغي أن يكون البرنامج ثكياً، بحيث يتحسس المواطن التي يعاني الطالب من صعوباتها في ضوء عملية محددة، أو مفهوم، فيعده بصورة آلية إلى التفرع باتجاه درس خصوصي مع مجموعة أخرى من المسائل.

ويساعد البرنامج الذي يحتوي على أدوات لإدارة الصف، وتسهيلات للاحتفاظ بالبيانات وخزنها، في تخطيط مفردات الدروس، ومتابعة مسارات تقدم الطلبة. إن إحدى العقبات التي يعاني منها المعلم في صف واسع، هي عدم قدرته على توفير مناخ مناسب للتدريس الفردي، وحتى عندما يكون معه من يعاونه، أو يشاركه بالهمة معلم آخر. بصورة عامة يحتاج الطلبة الضعفاء إلى اهتمام ورعاية خاصة. لذا فإن حاسوباً انتقيت برمجياته بعناية سيساعد هؤلاء الطلبة على تجاوز مواطن الفشل لديهم، والتي يعرفونها حق المعرفة، دون الاعتماد على موارد إضافية.

إن الإدعاء الذي ينهض إلى تأسيس مبدأ أن الحاسوب: غير مخيف، وليس خطراً، وليس مكاناً لإدانة هو إدعاء صحيح

الحاسوب. أما أن يتركوا لإجراء عم تمهيدي لمعودتهم المرتقبة للعمل بالحاسوب أو يطلب منهم مشاهدة زملائهم يميزون بين الجوانب الجيدة والسئية من علمهم.

ومن النادر تخصيص جهاز طابعة لكل حاسوب داخل الصف. وزيادة طاقة الطابعة دون نفقات باهظة أو إضافية، أطلب من الاستشاري شراء صناديق مفتاح إدارة الطابعة Printer Switch Box والتي تتيج ربط طابعة واحدة مع حاسوبين، أو ثلاثة، أو أربعة حواسيب في آن واحد. ومع ذلك، ورغم اعتماد مثل هذا الأسلوب لتذليل مشاكل الطابعة، ينبغي على الطلبة الحصول على إذن شخصي منك لاستخدام الطابعة، خشية أن يؤدي عملهم (بدون ترخيص) إلى قطع مهمة الطابعة للغير في منتصفها، ولكن يمكن لهم أن يوقفوا بصورة مؤقتة Pause عملية الطابعة لتعديل ملف آخر.

بعض الأمثلة على استخدام الحاسوب في تعزيز التدريس

Some Examples Of Using Computer To Enhance Instruction

في عام 1989 أصدر المجلس الوطني لعلمي الرياضيات (NCTM) معايير المناهج الدراسية والتقييم للرياضيات المدرسية Curriculum And Evaluation Standards For School Mathematics والتي دعت إلى تغييرات جذرية في طرق تعليم الرياضيات. ففي قطاع تعليم الهندسة، دعت "المعايير" إلى تقليل التأكيد على عرض الهندسة كنظام استنتاجي متكامل بالإضافة إلى تقليل التأكيد على البراهين ذات العمودين Two columns proofs. بالمقابل دعت المعايير إلى زيادة في الاستكشاف المظوح والحدس، وزيادة الاهتمام بموضوعات الهندسة التحويلية Transformational Geometry. وخلال دعوتها إلى التغيير، أدرجت المعايير طبيعة التأثيرات التي ستعملها التقنية وأدواتها المستحدثة على طريق تعلم الرياضيات. لقد وصفت المعايير الاستخدامات المفيدة للتقنية، مثل تلك التي ستحرر الطلبة من إضاعة الوقت أو استنفادهم، والهام بالمتذلة والمادية، وستوفر لهم الوقت والوسائل لرؤية واستكشاف العلاقات المهمة والمفيدة.

تبرز برمجيات الهندسة من بين العدد الذي يصعب إحصاؤه من البرمجيات الرياضية التي كتبت وأعدت في هذا المجال. بصورة عامة، تعد مادة الهندسة من أكثر المواضيع التي يصعب تعليمها، لكن البرمجيات قد ساهمت في تخفيف الأعباء وزيادة البهجة والمتعة بتعليم الهندسة. وسنحاول

مستوى الطالب الذي ينوي استخدامها قد ينشأ عنها إحباط وخيبة أمل تجعل الطالب يعرض ويشيح بوجهه عن الحاسوب.

إن الطلبة الذين سيتم تحفيزهم بطريقة مناسبة ومدرسة بعناية، قد يلاحظون إلى إنشاء ألبامهم الخاصة، وسيكون هذا النشاط قد حقق لهم خبرة ذات أهمية بالغة.

إدارة الصف بالحواسيب

Classroom Management with Computers

عندما يطلب منك تعلم طلبة الصف بواسطة الحواسيب، فسوف تقابل قرارات إدارة الصف التي تختلف عن تلك التي تسود صفوف الرياضيات التقليدية. إن بعض الأمور التي ينبغي أن تأخذها بعين الاعتبار هي :

1. كيفية تحديد وقت للممارسة لكل طالب.
2. كيف تضمن وقتاً للطباعة لكل طالب.
3. ماذا ستفعل مع الطلبة الذين لا يعملون مع الحاسوب.
4. ماذا ستفعل مع الذين ينتهون مبكراً.
5. كيف ستقلل من عملية استنساخ الملفات.
6. أسلوب حماية كلمة المرور Password.
7. كيف ستحول دون حدوث خلل في عتاد الحاسوب Hardware، والبرمجيات، والبيانات؟.

إن النسبة الأفضل لعدد الطلبة إلى عدد الحواسيب المتاحة لاستخداماتهم ينبغي أن تكون 1:1. ونظراً لأن معظمنا لا يعلم في المدينة الفاضلة UTOPIA، ينبغي أن نتحمل (شخصياً) أعباء حل العقبات التي تنشأ عن تواجد عدد كبير من الطلبة مقارنة بعدد الحواسيب الموجودة داخل الصف. ويستطيع الطلبة تعلم الكثير من زملائهم ونظرائهم عندما يراقبونهم وهم يعملون على الحاسوب لبضعة دقائق. فيتعلمون ما ينبغي عليهم فعله. وما ينبغي عليهم التوقف عن فعله. وسيساعدك كثيراً وجود مؤقت مثل الذي يستخدم في المطبخ Kitchen-type على مكتبك الشخصي، واعد إلى تقسيم الوقت المتاح إلى أقسام متساوية. على أن يكون كل قسم كافياً للطلاب بالحصول على دور أو دورين في العمل على الحاسوب، واعتماداً على مؤقتك الشخصي، وعلى اليوم المخصص لذلك.

قم بإعداد المؤقت ليعينك على ضبط وإدارة (حفظ الوقت وإدارته save and switch time) سوف تكون مشغولاً جداً بمساعدة الطلبة لتجاوز المشاكل، ولولا استخدام المؤقت، سيكون من الصعب جداً عليك الاستمرار بمراقبة الوقت المستغرق لكل دور من الأدوار. إن الطلبة لا يعملون فعلياً على

بيئة أكاديمية مفتوحة، حيث من خلالها، حاول مجموعة من المعلمين، وشرائح أخرى من المستخدمين اختبار الإصدارات الابتدائية للبرنامج وتزويد تصميمه الأولي بمدخلات إضافية. قدم ياكفج إلى العمل من Key Curriculum Press عام 1990 وانتج النسخة الابتدائية Beta Version للبرنامج والتي يوشر اختبارها في الصفوف الدراسية. ثم بدأت مجموعة من 30 مدرسة بالنمو إلى مجموعة تتألف من أكثر من 50 موقعا بعد أن ذاع خبر البرنامج ووصل إلى أسماع الجماهير الكثير من خصائصه، أو شاهدوا عروضاً تقديمية لبعض قائلباته في المؤتمرات أو الندوات العلمية. إن طبيعة الانفتاح الذي ارتكزت إليه عملية إنتاج وتطوير هذا البرنامج قد تولد عنها حماسة مدهشة لدى الجميع نحو هذا البرنامج. ومع طرح إصداراته الأولى عام 1991، هرع مئات من المعلمين، والطلبة، وكثير من المولعين بالهندسة إلى استخدامه، وأصبح من أكثر البرمجيات الرياضية التي يدور الحديث حولها، ومن أكثر الأجزاء التي لبثت في ذاكرتنا.

وحيث شرع الطلبة والمعلمون باستخدام Sketchpad للمرة الأولى، التفتت Key Curriculum Press موارد حول أنواع الأنشطة التي يمكن استخدامها بصورة أكثر فاعلية داخل حلقة الدرس. وبتمويل من مؤسسة العلوم الوطنية قام برنامج بحوث ابتكار الأعمال الصغيرة Small Business Innovation Research بتمكين مطوري المناهج من زيارة الصفوف، ومقابلة للمعلمين والطلبة. وبهذه الطريقة، استطاع هؤلاء مراقبة أكثر أنواع الأنشطة التي يمكن أن تكون ذات فائدة ملموسة. وقد صدر خطابان مهمان من خلال هذا البحث والاستقصاء:

1- يمكن الاستفادة من القدرة التدريبية لبرنامج Sketchpad بصورة مثلى إذا تطلبت الأنشطة الأولية إنشاء بنى بسيطة فقط ولقد برهنت الخبرة الميدانية على أن الطلبة يستطيعون استخدام البرنامج في إنشاء أشكال بتعقيد اختياري، ولكن عند استخدام الطلبة المهتدين للبرنامج فإنهم يستطيعون فهم المفاهيم، بصورة أفضل، وبالأخص عندما يوجه تفكيرهم نحو العلاقات وليس باتجاه البنى والإنشاءات.

2- يمتلك برنامج Sketchpad القدرة على تكامل مجموعة من المفردات والمفوضعات الهندسية بطريقة تعجز عنها الكتب المنهجية التقليدية. فعلى سبيل المثال، عند البحث الأولي فيه عن المثلث، يستطيع الطلبة بحث العلاقات بين المستقيم، والزوايا، والمساحة، والتحويلات، والتناظر.

استكشاف أحد هذه البرمجيات، وهو برنامج The Geometer's Sketchpad لنرى كيف يمكن لهذا البرنامج أن يسهم في تعزيز تعلم مادة الهندسة.

طرح برنامج The Geometer's Sketchpad للمرة الأولى عام 1991، وقد ارتكز إلى فكرة ضرورة استخدام الطلبة للحاسوب كأداة تعليمية. إن إتاحة الفرصة للطلبة بوضع البنى التي يباشرون إنشائها في حالة حركة، فإن برنامج Sketchpad سيليغي الحاجة إلى إعادة التجربة لأكثر من مرة قبل إعداد التصميم وتعميمه Generalization. ولا شك بأن الأكثر أهمية هو أن Sketchpad يجعل من عملية الاستكشاف الهندسي أكثر تفاعلا وجذبا لاستخدامه.

إن أسلوب The Geometer's Sketchpad متساوق مع البحث الذي أجراه كل من المتربوين الرياضيين الألمانين بير فان هيل Pierre Van Hiele ودينا فان هيل - جيلدوف Dina van Hiele-Geldof. ومن الملاحظات التي استقاعا هذين الباحثين من الصفوف الدراسية، بات واضحا لآل هيل Van Hiele بأن الطلبة يمرون خلال سلسلة من مستويات التفكير الهندسي: كالمتصور المرئي، والتحلل، والاستدلال العامي، والاستدلال الصوري، أو الصرامة.

إن نصوص الهندسة المعيارية تتوقع من الطلبة توظيف الاستدلال الصوري منذ البداية. دون أن يبدل ما يكفي من جهود لتمكين الطلبة على التخيل أو تشجيعهم على إنشاء حدوس وتخييلات. إن الهدف الأساسي لبرنامج The Geometer's Sketchpad يكمن في توجيه الطلبة خلال المستويات الثلاثة الأولى من التعلم، وتشجيع عملية الكشف التي تعكس، بصورة أكثر وضوحاً، كيف اخترعت الرياضيات : يتخيل الرياضي أولاً، ويحلل المسألة ثانياً، ثم يباشر حدوساً قبل أن يحاول إنشاء البراهين.

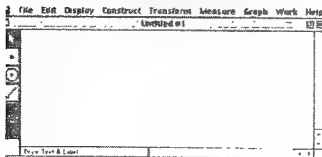
تم تطوير برنامج The Geometer's Sketchpad كجزء من مشروع الهندسة المرئية (Visual Geometry Project) (VGP)، وقد تم تمويله بواسطة مؤسسة تمويل العلوم الوطنية وتحت إشراف يوجين كلوتز Eugene Klotz في كلية سوارثمور Swarthmore College ودوريس شاتشنايدر Doris Schattschneider في كلية مورافيان Moravian College في بنسلفانيا. التحق مبدع برنامج Sketchpad بمشروع (VGP) المبرمج نيقولاس ياكفج Nicholas Jackiw في صيف عام 1987. وقد بدأ بعمل برمجي - جاد خلال السنة التي تلت هذا التاريخ. تم تطوير برنامج Sketchpad في

محدود الاستخدام كأداة عرض وتوضيح للطلبة. ورغم وجود إمكانية كبيرة في تحديد خيارات العرض وتثبيتها في Sketchpad وبأي حجم أو بأي أسلوب نشاء، سبقي الصف الكبير يعاني من صعوبة رواية وتمييز ما يظهر على لوحة عرض الحاسوب الصغيرة.

تتوفر تشكيلة متنوعة من المعدات والأدوات التي يمكن ربطها بالحواسيب بحيث يمكن عرض مخرجات لوحة العرض باستخدام جهاز الإسقاط العلوي الضوئي. لقد صم Geometer's Sketchpad لكي يعمل بصورة جيدة على عارضات أجهزة الإسقاط الضوئي. وبواسطة عارضة جهاز الإسقاط الضوئي، تستطيع أنت وطلبتك القيام بإعداد برامج إيضاحية، أو يقوم الطلبة بإعداد عروض تصميمية Presentations حول الاكتشافات التي حققوها باستخدام الحاسوب أو أدوات أخرى. كما تستطيع أنت أو أحد طلبتك قيادة عملية بحث وتقصي، وطرح مجموعة أسئلة على الطلبة مثل (ماذا علي أن أحاول لاحقاً؟ في أي مكان علي أن أنشئ مقطعاً؟ أي شيء من الأشياء التي ينبغي أن أفكر بها ملياً؟ ماذا لاحظت عندما بدأت بتحريك هذه النقطة؟) لقد أصبح برنامج Sketchpad صورة ديناميكية تستطيع أنت وطلبتك أن ترسم عليها، بأسلوب أكثر دقة، أشكال بالغة التعقيد، بحيث يمكن تحويلها وتشويبها بطرائق لا نهاية لها دون إلغاء الشكل أو إعادة رسمه. إن أفضل طريقة لتجربة الأعاجيب التي يمتاز بها Sketchpad ستكون عن طريق محاولة العمل عليه. وسنقوم بعرض بضعة تطبيقات لهذا البرنامج الآن.

إذا كان برنامج Geometer's Sketchpad مثبتاً على حاسوبك الشخصي، ابدأ بتشغيله وستظهر أمامك إحدى اللوحات الآتية. وتظهر الآن أمامك اللوحات الخاصة بكل من حواسيب IBM و Macintosh. وكما تلاحظ فإن اللوحتين متقاربتان إلى حد كبير، وإن البرنامج يعمل بنفس الطريقة على هاتين المنصتين البرمجية Platforms.

Macintosh Version



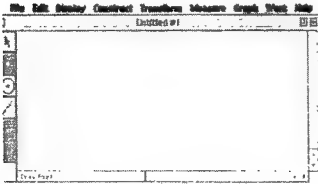
لقد صم Geometer's Sketchpad بصورة أولية للاستخدام في دروس الهندسة بالمدارس الثانوية. وقد أظهرت الاختبارات، رغم ذلك، بأن سهولة استخدامه يجعل استخدام الطلبة الأحدث سناً لهذا البرنامج ناجحة ومشورة، كما أن القدرة الكبيرة لميزاته التقنية العالية تجعل منه أكثر جاذبية لعلمي الرياضيات بمستوى الكليات، وفصول دراسة تعليم الرياضيات. إن ميزات هندسة الإحداثيات السائدة في Sketchpad تجعل منه أداة مهمة في تحري مبادئ عدة في السنة الأولى أو الثانية من مناهج مادة الجبر.

يمكن استخدام Sketchpad في دراسة وبحث جميع محتويات المنهج الدراسي الثانوي للمادة الهندسة، باستثناء بضعة مفردات تتعلق بالأجسام ثلاثية الأبعاد مثل الحجم. وإن المساقات الدراسية التي تستخدم الأسلوب الاستقرائي Inductive Approach تستطيع استخدام Sketchpad افتراضياً، كل يوم، لاكتشاف خصائص الهندسة. ويستطيع الطلبة، في المساقات الدراسية التي تركز على الأسلوب الاستدلالي بعمق، استخدام هذا البرنامج لاكتشاف النظريات أو الفرضيات التي يريدون برهنتها، أو لتأكيد وتطوير فهم النظريات بعد إكمال برهانها. وحتى في فصول الاستدلال والاستنتاج، قد يصبح Sketchpad أداة يومية، ولكن شريطة أن يستخدم باعتدال. إنه يمثل أحد فرص التعلم والتي ينبغي عرضها على الطلبة أثناء تعلم مادة الرياضيات. إن أي أسلوب منفرد من خبرة التعلم قد يصبح روتينياً ويورث صاحبه الملل والضجر إذا استخدم بكثرة إلى الحد الذي يلغي الخبرات الأخرى.

استخدام Geometer's sketchpad

لا شك بأن أمثل استخدام لحاسوب واحد يكون على أساس اختيار مجاميع صغيرة من الطلبة التي تأخذ دورها، على التوالي، باستخدام الحاسوب. تستطيع كل مجموعة أن تبحث أو تؤكد الحدوس والتخمينات التي تنشأ بين أفرادها عند عملهم على مكاتبتهم أو المناظير باستخدام أدوات الهندسة المعيارية كالفرجار والمسطرة العدلة. وبهذه الطريقة، تمثلك كل مجموعة فرصة واحدة أثناء فترة الدرس لاستخدام الحاسوب، ولفترة قصيرة من الوقت. من جهة أخرى، يمكنك أن تمنح كل مجموعة مدة يوم كامل لأجراء بحوثهم وتحرياتهم على الحاسوب بينما تشغل بقية المجاميع تحريات مشابهة أو مختلفة على مكاتبتهم الشخصية. إن حاسوباً وحيداً ودون جهاز إسقاط العلوي الضوئي، أو مراقب بشاشة بحجم كبير سيكون

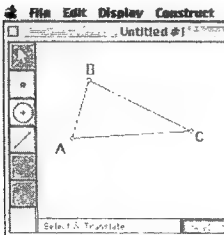
ومن الضروري الرجوع إلى صندوق أداة مؤشر الحالة لفرض التأكد من قيام Sketchpad بتنفيذ المهام التي تريدها منه. إن أكثر الأدوات استخداماً في هذا البرنامج هي أداة سهم الاختيار، وأداة النقطة.



حاول تجربة هذه الرسوم التخطيطية

Try These Sketches

قبل اختيار الخصائص الديناميكية لبرنامج Sketchpad، حاول أن ترسم الرسوم التخطيطية الأربعة الآتية. قد تحتاج إلى شيء من التجربة عن طريق اختيار بعض الأشياء Objects ثم التوجه نحو قائمة إنشاء Construct Menu في الجزء العلوي. لا تقم بإلغاء الرسوم التخطيطية، نظراً لأنك ستقوم بإعادة استخدامها بعد ذلك.

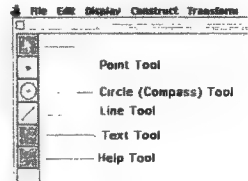


تستطيع اختيار وممارسة الجوانب الديناميكية في برنامج Sketchpad عن طريق استخدام أداة سهم الاختيار. حاول تجرييقها باختيار المخطط الرسومي للمثلث الذي قممت برسمه في Untitled#1. انقر على النقطة B، ومع إبقاء إصبعك بحالة ضغط على الفأرة، قم بتحريكه إلى اليمين أو إلى اليسار.

IBM Version

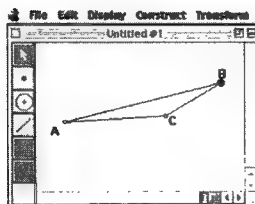
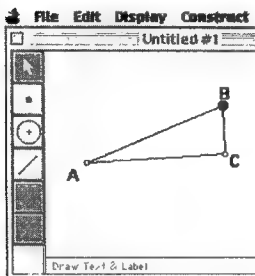
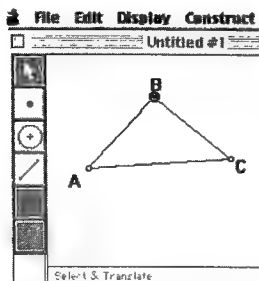


عندما يظهر برنامج Sketchpad على لوحة العرض، ستلاحظ الأدوات المتوفرة فيه على الجهة اليسرى من النافذة، وتظهر أسماء وعناوين هذه الأدوات في الشكل الآتي.

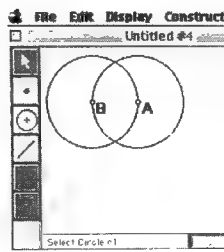
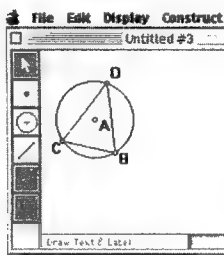
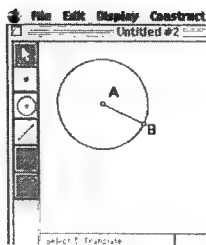


- إن أداة سهم الاختيار selection Arrow Tool تتيج لك اختيار الأشكال الهندسية وتحريكها إذا احتجت إلى ذلك.
- إن أداة النقطة Point Tool تتيج لك رسم نقاط مختلفة.
- إن أداة الدائرة (الفرجاء) Circle (Compass) tool تتيج لك رسم الدوائر.
- إن أداة النص Text Tool تتيج لك كتابة تسمية للنقاط أو المستقيمات كما توفر لك إمكانية كتابة نصوص مختلفة.
- إن أداة المساعدة Help Tool توفر لك فرصة مناسبة للحصول على المعلومات الخاصة بأحد الكائنات الرسومية الموجودة.

نلاحظ في المخطط الرسومي الآتي، بأنه قد تم اختيار أداة النقطة. وتستطيع أن تؤكد ذلك لأن الصندوق يبين بأن أداة النقطة قد تم تأشيرها. وعند أسفل لوحة العرض في الجزء الأدنى من الزاوية اليسرى يبين صندوق أداة مؤشر الحالة Tool Status Box أي من الأدوات قيد الاستخدام بالوقت الحالي.

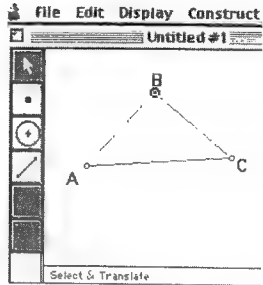
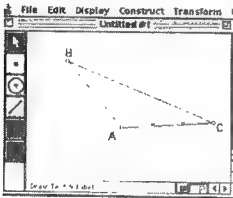
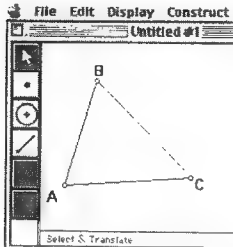


يمكن تغيير مواقع الأشكال الهندسية في برنامج Sketchpad بطريقة أخرى، عن طريق سحبه على قطعة. استخدم الفأرة للنقر على قطعة المستقيم \overline{AC} في المثلث $\triangle ABC$ ، وقم بتحريك الفأرة في المنطقة القريبة. وعندما تقوم أخيراً بإطلاق



ستلاحظ حصول تغيير في موقع المثلث، كما يظهر في الأشكال الآتية. وفي كل موضع من المواضع الجديدة لم يتغير طول قطعة المستقيم \overline{AC} ، بينما عانت كل من القطعتي المستقيمتين \overline{AB} و \overline{BC} زيادة أو نقصان في أطوالها.

الفأرة، ستكون قطعة المستقيم \overline{AC} في موقع آخر. لم يحصل أي تغيير في طولها بينما تغيرت أطوال قطعتي المستقيمين الآخرين، وقياسات زوايا المثلث أيضا.



يظهر في الجدول الآتي ملخصا بالبنى والإنشاءات التي قد ترغب في عملها باستخدام برنامج Sketchpad.

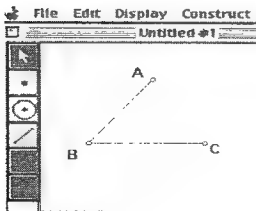
الإيماء	ماذا عليك أن تختار؟	ماذا سينشئ؟
نقطة على شئ	واحد أو أكثر من المقاطع، أو الخطوط المستقيمة، أو الأشعة، أو الدوائر.	نقطة اختيرت بصورة عشوائية على الشئ، / الأشياء.
نقطة في تقاطع	شئان مستقيمان، دائرتان، أو شئ مستقيم ودائرة.	نقطة حيث يتقاطع الشئان.
نقطة في منتصف مقطع/ شعاع/ خط مستقيم	واحد أو أكثر من المقاطع نقطتان أو أكثر.	نقاط منتصف المقاطع تعرف المقاطع، أو الأشعة، أو الخطوط المستقيمة بواسطة نقاط
خط عمودي	نقطة واحدة، وشئ مستقيم واحد أو أكثر، أو شئ مستقيم واحد ونقطة واحدة أو عدة نقاط.	المستقيمتان المارة بالنقاط المحددة متعامدة على الأشياء المستقيمة المحددة.
خط موازي	نقطة واحدة وشئ مستقيم واحد أو أكثر، أو شئ مستقيم واحد ونقطة واحدة أو عدة نقاط.	المستقيمتان المارة بالنقاط المحددة موازية للأشياء المستقيمة المحددة.
منصف زاوية	ثلاثة نقاط مع اختيار رأس الزاوية بعدها.	الشعاع الذي ينصف الزاوية يعرف بالنقاط الثلاثة.
دائرة بواسطة المركز ونقطة	نقطتان مع اختيار مركز الدائرة أولا	الدائرة مع المركز المعطى تمر خلال النقطة المعرفة

الإيعاز	ماذا عليك أن تختار؟	ماذا سينشئ؟
دائرة بواسطة المركز ونصف القطر	نقطة ومقطع.	الدائرة مع المركز المعطى، وينصف قطر يساوي طوله طول المقطع المعرف
قوس على دائرة	دائرة ونقطتان على محيطها، أو مركز الدائرة ونقطتان على محيطها.	يتم توسيع القوس على محيط الدائرة عكس اتجاه عقارب الساعة من النقطة الأولى إلى النقطة الثانية.
قوس خلال ثلاثة نقاط داخل متعدد الأضلاع	ثلاث نقاط ثلاثة نقاط أو أكثر	يمر القوس من خلال النقاط الثلاث المعطاة يتم تعريف داخل متعدد الأضلاع باستخدام النقاط المعطاة رؤوسا له
داخل الدائرة	دائرة واحدة أو أكثر	داخل الدائرة
داخل القطاع	قوس واحد أو أكثر	داخل قطاع القوس
داخل مقطع القوس	قوس واحد أو أكثر	داخل مقطع القوس
محل هندسي	شيء هندسي واحد ونقطة واحدة أنشئت لتستقر على المسار	المحل الهندسي شيء ما

طلبك في المراحل المتوسطة أو الثانوية عند عملك على برنامج Sketchpad.

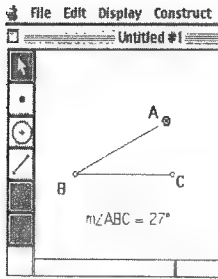
المشروع رقم واحد Project One مجموع قياسات زوايا أي مثلث.

إجراء تمهيدي Preliminary: ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على رسم زاوية لكي يتمكنوا من قياسها. استخدام أدوات النقطة Point Tool وانقر على ثلاثة مواضع، لإنشاء ثلاثة نقاط قد ترغب في تسمية هذه النقاط كما يظهر في الشكل الآتي وذلك عن طريق اختيار أدوات النص، والنقر على كل نقطة من النقاط الثلاثة. ولغرض الزاوية، ينبغي أن تستخدم اسما بثلاثة حروف. ولغرض إخبار Sketchpad بإيجاد قياس هذه الزاوية، انقر أولا على النقطة A. أبق أحد أصابعك على مفتاح Shift وانقر على B، ثم على C بإصبع آخر.

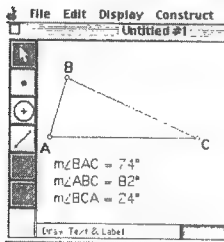


قبل الاستمرار، قد ترغب في التمرين على استخدام الميزات الديناميكية المتاحة في برنامج Sketchpad. ونورد في هذا المقام بعضا من الطرق المفيدة، والتي تستطيع التمرن عليها في تغيير الشكل الهندسي بصورة ديناميكية.

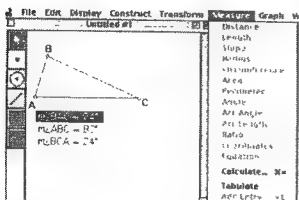
- 1- باستخدام رسمك التخطيطي Untitled #1، والذي قمت بإعداده للمثلث ABC. قم بتحريك المثلث جميعا دون إحداث تغيير في أطوال أضلاعه أو قياس زواياه.
- 2- باستخدام رسمك التخطيطي Untitled #2 للدائرة الأولى. مع إبقاء المركز A في محله، زد من طول نصف القطر AB أو أنقصه.
- 3- باستخدام رسمك التخطيطي Untitled #2 للدائرة الأولى. وابقاء النقطة B في نفس الموضع، زد من طول نصف القطر AB أو أنقصه.
- 4- باستخدام رسمك التخطيطي Untitled #3 للدائرة الثانية، ودون إحداث تغيير في نصف قطر الدائرة، قم بتحريك النقطة B بحيث تصبح الزاوية $\angle BCD$ منفرجة.
- 5- باستخدام رسمك التخطيطي Untitled #3 للدائرة الثانية، ودون إحداث تغيير في نصف قطر الدائرة، قم بتحريك الزاوية $\angle ABC$ بحيث تصبح زاوية قائمة.
- 6- باستخدام رسمك التخطيطي لزوج الدوائر، قم بتحريك النقطة A بعيدا عن النقطة B. ماذا سيحصل للدائرة عندما ستبعد النقطة A كثيرا عن النقطة B؟ وماذا سيحصل عندما تصبح النقطة A أكثر قربا من النقطة B؟ دعنا نركز اهتمامنا ببعض المشاريع التي قد تستخدمها مع



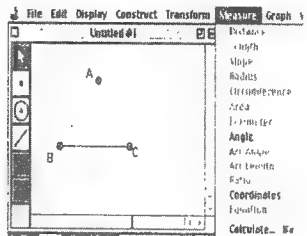
والآن نستطيع استخدام Sketchpad لإيجاد قياس زاوية، وسنقوم باكتشاف كيفية استخدامه لإيجاد مجموع قياسات زوايا أي مثلث. أرسم أي مثلث ABC ودع Sketchpad يحسب قياس زواياه الثلاثة.



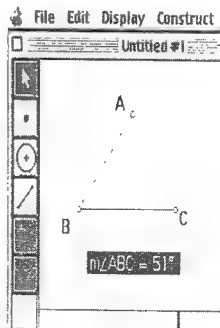
تستطيع جعل Sketchpad يقوم باحتساب مجموع قياسات الزوايا عن طريق إجراء ما يلي. انهب إلى خيار القياس وانقر على أحسب Calculate.

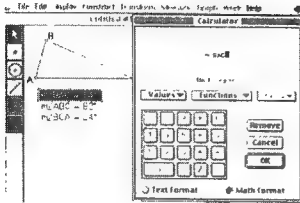


إن هذا التعاقب في طرقات المفاتيح يخبر الحاسوب بأنك تتعامل مع الزاوية $\angle ABC$. المقابل، يمكنك أن تنقر على النقطة C، ثم B، ثم A، لتنبه الحاسوب إلى أنك تتعامل مع الزاوية $\angle CBA$. إذا لم تدخل الرأس كما في الإدخال الثاني،سيقوم الحاسوب بإيجاد قياس زاوية أخرى. انقر على خيار القياس وستشاهد لوحة العرض الآتية.

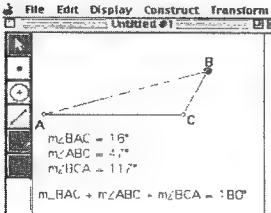
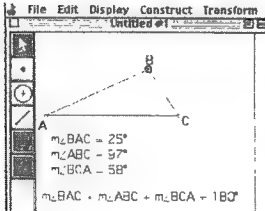


والآن انقر على الزاوية. سيظهر قياس الزاوية كما موضح في الشكل الآتي. إن تحريك أحد الرؤوس سيؤدي إلى تغيير القياس. ولهذا السبب يعرف برنامج Sketchpad ببرنامج (الهندسة الديناميكية Dynamic Geometry) لأنه يقيس التغيرات عندما تتحرك النقاط أو المقاطع.

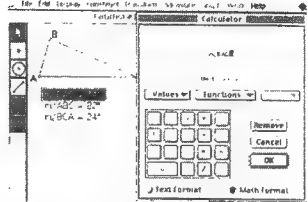




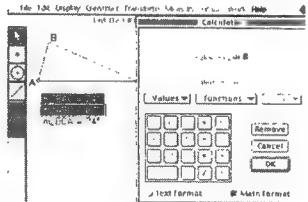
إن تحريك أي من النقاط في المنطقة المجاورة سيولد قناعة لدى الطلبة بأنه رغم حصول تغير في قياسات الزاوية، فإن مجموعها سيبقى ثابتاً على الدوام.



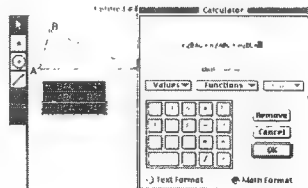
ستظهر آلة حاسبة على لوحة العرض. انقر فوق $m\angle BAC$ في الرسم التخطيطي، ثم انقر مفتاح + على الآلة الحاسبة. سيظهر قياس الزاوية علم. لوحة العرض.



بعدها انقر على $m\angle ABC$ في الرسم التخطيطي، +، و $m\angle BCA$ وأن اضغط على مفتاح OK الموجود على الآلة الحاسبة لاحتساب مجموع قياس هاتين الزاويتين.



Calculators



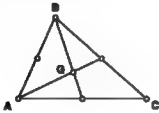
خلال الخطوة الأخيرة، سيظهر الحاسوب مجموع قياسات الزوايا الثلاثة.

المشروع رقم اثنان Project Two

المستقيمات المتوسطة Medians الثلاثة في مثلث.

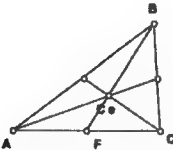
المستقيمات المتوسطة في مثلث Medians in A Triangle

إن المستقيم المتوسط في مثلث يصل بين قمة ونقطة منتصف الضلع المقابل. استطعت في التحريات السابقة، اكتشاف خصائص منتصفات الزاوية، والمنتصفات العمودية والارتفاع في المثلث. هل لديك اهتمام بإجراء تقدير تخميني حول المستقيمات المتوسطة؟ وسترى ماذا سيأتي، ولكن هناك المزيد من الأشياء الجديدة التي ستكتشفها عن هذه المستقيمات أيضا.



أعد رسما تخطيطيا واستقص Sketch and Investigate

- 1- ارسم المثلث ABC.
- 2- ثبت منتصفات الأضلاع الثلاثة.
- 3- قم برسم اثنين من المستقيمات المتوسطة الثلاثة، والذي يصل كل منها قمة (رأس) من رؤوس المثلث بالضلع المقابل لها.
- 4- ارسم نقطة تقاطع المستقيمين المتوسطين.
- 5- ارسم المستقيم المتوسط الثالث.



- 6- النقطة التي تتقاطع فيها المستقيمات المتوسطة تدعى المركز Centroid. أظهر تأثير النقطة وقم بتغييرها إلى 'Ce' بالنسبة للمركز.
- 7- قم بقياس المسافة بين B و Ce والمسافة بين Ce إلى نصف المنتصف F.

3.13	1.20	0.50	2.08
1.07	0.60	0.75	1.04

- 8- اسحب رؤوس المثلث ABC وانظر إلى مسافة (B إلى Ce) ومسافة (Ce إلى F).

- 9- أعد جدولاً لهذه القياسات.
- 10- قم بتغيير المثلث، وانظر نقرأ مزدوجاً على قيم الجدول لإضافة مدخلا جديداً.
- 11- استمر بتغيير المثلث، وإضافة مدخلات إلى جدولك حتى تستطيع رؤية العلاقة بين المسافتين BCe و CeF.

- 12- بناء على ما لاحظته حول جدول المدخلات، استخدم الآلة الحاسبة لإعداد صياغة مع القياسات التي بقيت ثابتة حتى عند تغيير القياسات.
- س2: اكتب الصياغة التي احتسبتها في الخطوة 12.

- س3: اكتب حدساً أو تخميناً حول أسلوب تقسيم المركز لكل مستقيم متوسط بالمثلث.
- 13- ارسم بيانات الجدول. ينبغي أن تحصل على شكل رسومي بجمع نقاط مستقيمة متساوية.
- 14- ارسم خطاً بين أي نقطتين من نقاط البيانات، وقس الميل.
- س4: وضع أهمية ميل المستقيم المار خلال نقاط البيانات.

إذا قد قمت برسم المستقيمات المتوسطة الثلاثة. اختر اثنين منها. ثم، من قائمة أنشئ، اختر نقطة في تقاطع

استخدم أداة النص وانقر مرة واحدة على النقطة لإظهار تسميتها. انقر مرتين على التسمية لفرض تغييرها. قبل قيامك بقياس نقطة المنتصف بين نقطتين، اختر النقطتين.

اختر القياسون. ثم في قائمة قياس اختر جدولة.

انقر نقرأ مزدوجاً على القياسات لتنشيط الآلة الحاسبة. انقر مرة واحدة على القياس لإدخاله في الحسابات.

اختر الجدول. ثم في قائمة شكل تخطيطي اختر ارسم بيانات جدول وفي صندوق حوار نقاط الرسم انقر رسم أنت لا تريد تغيير أي من البيانات)

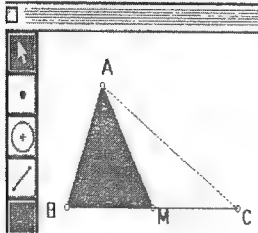
استكشف المزيد Explore More

أعد مخططاً لرسم مركز المثلث. واحتفظ بالمخطط للتحريات المستقبلية حول مراكز المثلث.

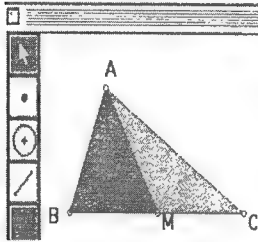
المشروع رقم ثلاثة Project Three

كيف يرتبط المستقيم المتوسط لثلث بمساحة ذلك المثلث ومحيطه؟ أجعل الطلبة يرسمون أي مثلث ABC والمستقيم المتوسط AM. اختر النقاط A، B و M.

File Edit Display Construct Ti

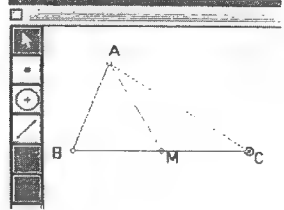


File Edit Display Construct 1

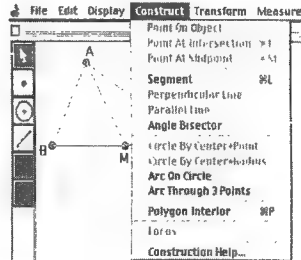


كرر هذه العملية على المثلث MAC وتأكد من اختلاف لون تظليل المثلث السابق. وتظهر النتائج النهائية في الشكل أعلاه.

File Edit Display Construct

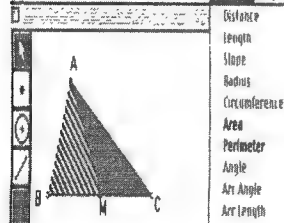


من قائمة أنشئ، اختر داخل متعدد الأضلاع. إن هذا الخيار سيظلل المثلث ABM. تستطيع تغيير اللون بالذهاب إلى قائمة عرض Display.

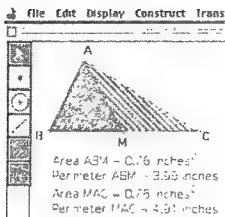


ستكون النتيجة مشابهة للتخطيط الرسومي الآتي.

File Edit Display Construct Transform Measure Graph



والآن انقر على أية نقطة داخل المثلث ABM. وإذا توجهت صوب قائمة قياس، ستلاحظ بأن الحاسوب يستطيع

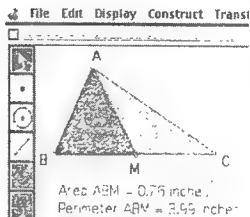


سيلاحظ الطلبة بوضوح، بأن سحب النقطة A (أو أية نقطة أخرى، أو مقطع) لن تؤثر على مساحة المثلثين MAC وABM، أما محيطهما فيحصل تغيير فيهما. يؤدي هذا المثال، في الفصل الدراسي للسنة الأولى بمادة الجبر، إلى تطبيقات عديدة وجبرية. أما في المساق الدراسي للهندسة فينبغي تكليف الطلبة بالبرهنة على أنه عند رسم للمستقيم المتوسط، فإن مساحة المثلثين الناتجة عنه ينبغي أن تكون متساوية.

المشروع الرابع Project Four نقاط منتصف الشكل رباعي أضلاع.

الآن احتساب مساحة أو محيط المثلث ABM كما في الشكل العلوي.

بتأثير المثلث ABM، اختر المساحة أولاً، ثم اختر المحيط. وسيقوم الحاسوب باحتساب مساحة المثلث ABM ومحيطه. ستبدو نافذتك مماثلة للشكل الآتي، مع الأعداد الصحيحة للمثلث.

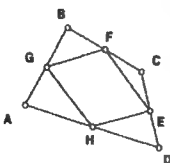


والآن حاول تكرار العملية عن طريق الفرز في أي نقطة داخل المثلث MAC. سيظهر الحاسوب بأن المنطقتين متساويتان بالمساحة، مع وجود اختلاف في محيطهما. والآن اسحب النقطة A

نقاط المنتصف لشكل رباعي Midpoint Quadrilaterals

في هذا التحري والاستقصاء، سوف نقوم باكتشاف أمر مدهش حول الشكل رباعي الأضلاع الذي ينشأ عن ربط نقاط منتصف أضلاع شكل رباعي الأضلاع آخر.

أعد رسماً تخطيطياً واستقص Sketch and Investigate

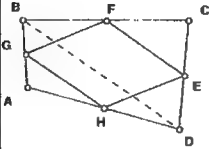


- 1- ارسم الشكل رباعي الأضلاع ABCD.
- 2- ارسم نقاط منتصف أضلاعه.
- 3- قم بوصل نقاط المنتصف لتكوين شكل رباعي جديد هو EFGH.

- 4- اسحب رؤوس متعدد الأضلاع الأولي ولاحظ الشكل رباعي الأضلاع الناتج عن نقاط المنتصف.
- 5- قس أطوال الأضلاع الأربعة في الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف.
- 6- قس مقدار ميل الأضلاع الأربعة في الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف.

إذا قمت باختيار الأضلاع الأربعة نستطيع رسم نقاط المنتصف الأربعة في نفس الوقت

أ.س:1 من أي نوع من الأشكال رباعية الأضلاع يقع الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف؟ وكيف تسند القياسات هذا الحدس؟



7- ارسم قطرا في الشكل الرباعي الأضلاع - الأصلي.

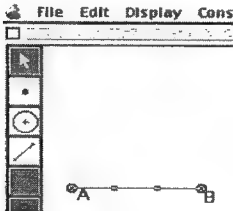
8- قس طول وميل القطر.

9- اسحب رؤوس الشكل الرباعي الأضلاع - الأصلي ولاحظ كيف أن طول القطر وميله ترتبط بأطوال وميول أضلاع الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف.

س.2: يقسم القطر الشكل الرباعي الأضلاع - الأصلي إلى مثلثين. يحوي كل مثلث على منتصف مقطع لأضلاع الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف. استخدم هذه الحقيقة وما يتوفر لديك من معرفة حول الميل وطول القطر بكتابة مقالة قصيرة توضح فيها مبررات صحة الحدس الذي أعدته في السؤال الأول. استخدم ورقة منفصلة إذا دعت الحاجة لذلك.

استكشف المزيد Explore More

- 1- ارسم شكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف في الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف، ثم حاول رسم شكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف آخر. وكرر هذه العملية مرتان أو ثلاث مرات. صف أي نمط تلاحظه في هذه الأشكال.
- 2- ارسم داخل الشكل متعدد الأضلاع للشكل الرباعي الأضلاع والشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف العائد إليه. قس مساحتهما. اتخذ حذرا تخمينيا حول هذه المساحات.
- 3- ما هو الشكل رباعي أضلاع نقاط منتصف شبه المنحرف؟ وشبه المنحرف متساوي الساقين؟ ومتوازي الأضلاع؟ والمعين؟ والمستطيل؟ والمربع؟ نسق وأشرح ما توصلت إليه.
- 4- تحت أية ظروف يكون الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف مستطيلا؟ معينا؟ أو مربعا؟ حاول أن تتأكد من قدرتك على إنشاء أكثر أنواع هذا الشكل عمومية والذي يكون الشكل رباعي أضلاع نقاط منتصفه أحد هذه الأشكال.

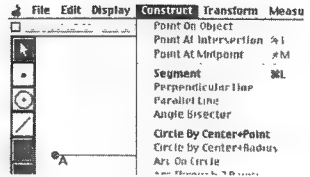
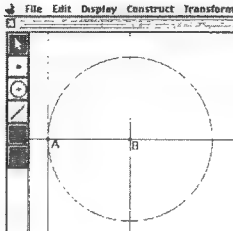


المشروع الخامس Project Five:

رسم مربع بواسطة ضلع من أضلاعه:

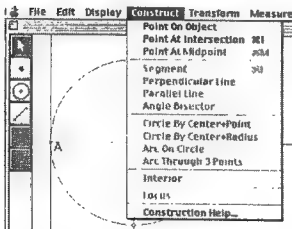
ارسم قطعة المستقيم AB ، كما يظهر في الشكل الآتي. كيف تستطيع أن ترسم مربعا بواسطة قطعة المستقيم AB كضلع من أضلاعه؟ سيكون هذا المشروع مركزا للمشروع القادم. هناك أكثر من أسلوب للتعامل مع هذا المشروع. وفي كل منها، تشخص أمامنا الحاجة إلى رسم خطوط عمودية أو متوازية.

حاول تبني الأسلوب التالي. اختر النقطتين A ، B . تحت قائمة إنشاء، اختر دائرة بواسطة مركز + نقطة.

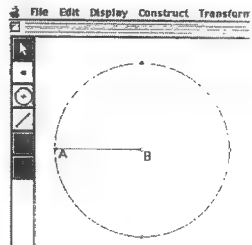


لإكمال المربع ستحتاج إلى نقطة التقاطع بين الخط العمودي
المر بالنقطة B والدائرة. اختر هذين الكائنين، ثم افتح قائمة
إنشاء. ستظهر لوحة العرض كما في الشكل الآتي. اختر نقطة
في تقاطع.

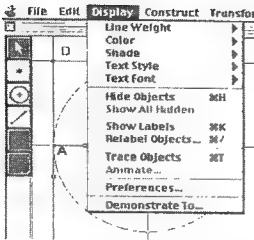
ستقوم هذه الدالة بإنشاء دائرة مركزها في النقطة B وطول
نصف قطرها AB، كما يظهر في الشكل الآتي. إن الهدف
يكن في إنشاء خطين متعامدين في النقطة A، والنقطة B
لتكوين زوايا قائمة. يمكنك تنفيذ ذلك باختيار كل من قطعة
المستقيم AB والنقطة A. انهب إلى قائمة إنشاء واختر خط
عمودي. والآن اختر قطعة المستقيم AB والنقطة B وأعد
إنشاء خط عمودي.



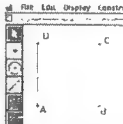
والآن اختر النقطة C وقطعة المستقيم BC ودع الحاسوب
يقوم برسم خطاً عمودياً آخر. وستكمل هذه العملية المربع الذي
نحتاج إليه.
وكما يظهر في الشكل الآتي، يمثل الشكل ABCD المربع
المطلوب.



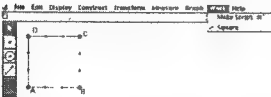
في هذه النقطة سيكون رسمك التخطيطي كما يأتي.



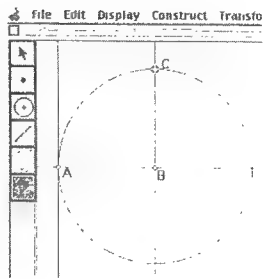
سيبقى الآن لديك أربعة نقاط كما تظهر في الشكل الآتي -
الأمير مع الحاسوب يصل بين هذه النقاط، نقطتان في كل مرة،
وسنشأ المربع ABCD الذي يظهر في الجزء الأيمن من الشكل
الآتي:



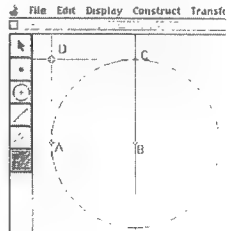
نظرا لحاجتنا إلى Sketchpad الذي سيقوم برسم المربعات
في المشروع القادم، نستطيع جعل الحاسوب يتبع جميع
التعليمات بصورة آلية عندما نأمره بعمل ذلك. في قائمة تحرير،
اختر الاختيار الكل Select All. بعدها اختر عمل نص تحت
قائمة عمل Work Menu.



إن دالة عمل النص سوف تنتج برنامجا سيقوم بإنتاج مربع
بصورة آلية عندما توفر الشروط المطلوبة لذلك. وعندما يظهر
النص الموجود في الشكل الآتي، وبعد اختيار أية نقطتين، ثم
تتوجه صوب النص وتختار تشغيل Play،



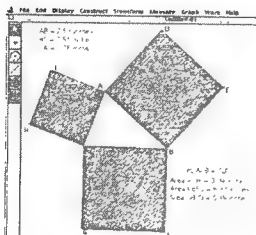
- وتوجد عند هذه النقطة صويتان، هما :
- هناك خطوط بدلا من مقاطع رسمت لكي تصل بين النقاط
D , C , B , A .
- لسنا في الحقيقة بحاجة إلى رؤية الدائرة بعد اكتمال الرسم
التخطيطي للمربع.



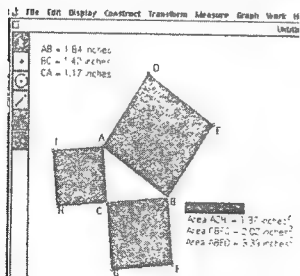
ولكي ننتهي بعرض المربع فقط على لوحة العرض، اتبع ما
يلي:
اختر الدائرة بالإضافة إلى المستقيمتين \overleftrightarrow{AB} ، \overleftrightarrow{BC} ،
 \overleftrightarrow{CD} ، \overleftrightarrow{AB} . في قائمة عرض اختر إخفاء أشياء (Hide
Objects)

بعدها دع برنامج Sketchpad يجد قياس الزاوية $m\angle ACB$ ومساحة المربعات الثلاثة. تذكر، من أحد مشاريع السابقة، بأنه ينبغي عليك اختيار الرؤوس الأربعة لكل متعدد الأضلاع قبل اختيار إنشاء داخل متعدد الأضلاع من قائمة إنشاء.

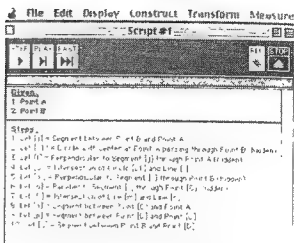
ستظهر النتائج كما في المخطط الرسومي الآتي :



أطلب من الطلبة تغيير موقع النقطة A أو النقطة B بحيث يكون قياس $m\angle ACB = 90^\circ$. استقر من الطلبة فيما إذا لاحظوا نتائجاً مشجعة. سيكون لدى طلبتك مخططاً رسموياً يشبه إلى حد كبير الشكل الآتي.

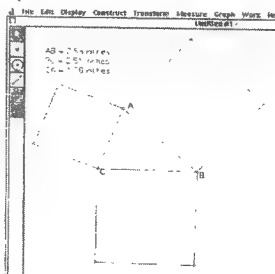
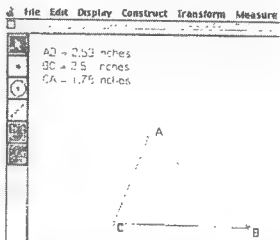


دع الطلبة يتوصلون إلى استنتاج ينص على أنه عندما يكون المثلث الأصلي قائم الزاوية، فإن مجموع مساحتي المربعين اللذين قام الطلبة برسمهما يكون مساوياً لمساحة المربع الثالث.



سيقوم برنامج Sketchpad باتباع النص آلياً وإنتاج مربع. جرب ذلك! ثم تأكد من حفظ هذا النص.

المشروع السادس Project Six
طور مبرهنة فيثاغورس: أطلب من الطلبة استخدام برنامج Sketchpad لرسم المثلث ABC وإيجاد أطوال أضلاعه الثلاثة كما في المخطط الرسومي الآتي :



الأنشطة المتعلقة باستكشاف الهندسة	الوحدة الإثرائية
	36 اجتياز منطقة يتمتعز بلوغها
	37 الزاوية التي يتمتعز بلوغها
تطابق المثلث، ... الخ	38 إنشاءات المثلث
	39 خاصية الإنشاء
حارزون الجذر التربيعي، المتوسط الهندسي	40 إنشاء أطوال جذر
الشكل الخماسي التقليدي	41 إنشاء شكل خماسي
	42 تحدي واستكشاف
	مغالطة المثلث متساوي الساقين
نظرية نابوليون	43 النقطة متساوية الزوايا
الأمواج المتكسرة وطائفة الاستكشاف	44 النقطة الأقصر مسافة بمثلث.
	45 زيارة المثلث متساوي الساقين للمرة الثانية
خصائص الانعكاس، رياضيات Feed and water or ، Poolrom	46 خاصية الانعكاس في المستويات
water and feed نموذج مثلث مشابه/ مسألة المرأة	
	47 إيجاد طول السفهان Cevian بمثلث
	48 تحدي مدحش
نظرية مورلي	49 صنع اكتشافات في الرياضيات
الترصيع يعتمد الأشكال المنتظم	50 ترصيعات بالفسيفاء
القصل الثامن : مبرهنة فيثاغورسي.	51 تقديم مبرهنة فيثاغورس
	52 مراجعة التقسيم الثلاثي ثنائية
منصفات الزوايا في المثلث، تحديد مثلث، الارتفاعات في المثلث، مركز ثقل المثلث.	53 برهنة تلاق المستقيمت في نقطة واحدة.
	54 مبرهعات.
	55 برهنة وقوع النقاط على خط مستقيم
	56 قياس الزاوية بالدائرة.
	57 التقسيم الثلاثي للدائرة

(في بعض الحالات، ونتيجة للأخطاء التقريبية فقد لا تتطابق النتائج في الرتبة العشرية الثالثة).

إن هذا الكشف سينتج عن تعميم رياضي ينص على أنه، في المثلث القائم الزاوية، يكون مجموع مربعي طول ضلعي المثلث يساوي مربع طول الوتر، $a^2 + b^2 = c^2$.

إلى أين نتوجه من هنا Where to Go from Here

إذا حالقك النجاح مع هذه البداية السريعة، وإذا كنت قد حصلت على برنامج Geometer's Sketchpad مع وثائق تشغيله، فهناك أماكن أكثر من مكان يمكن أن تتوجه صوبه في المرحلة القادمة.

- حاول أن تجرب العمل على الأنشطة الموجودة في كتيب تعليم الهندسة Teaching Geometry Booklet والتي تأتي مع حزمة وثائق البرنامج.
- ألق نظرة على نماذج الرسومات التخطيطية التي تأتي مع برنامج Sketchpad لاحتوائها على عدة أفكار مفيدة ومثقة.
- اختر الرحلات التعليمية التي تظهر في دليل المستخدم User's Guide والتي تتعامل مع أجزاء محددة من البرنامج تثير اهتمامك الشخصية. فعلى سبيل المثال، قد تكون مولما بتعلم المزيد حول كتابة النصوص أو الهندسة التحليلية.
- اصنع الرسوم التخطيطية التي تثير اهتمامك.

برنامج Geometer's Sketchpad والوحدات الإثرائية

إن الوحدات الإثرائية الموجودة في القسم الثاني من هذا الكتاب والتي يناسب استخدامها مع برنامج Geometer's sketchpad تم إدراجها أدناه. كما إن الأنشطة التي تتعلق بهذا البرنامج يمكن الحصول عليها في Exploring Geometry with the Geometer's Sketchpad وكذلك في Exploring Conic Sections with the Geometer's sketchpad.

الوحدة الإثرائية	الأنشطة المتعلقة باستكشاف الهندسة
25 التحليل الهندسي	تحليل شبه منحرف متساوي الساقين، مساحة متوازي الأضلاع، مساحة مثلث، تحليل برهان مبرهنة فيثاغورس.

الأنشطة المتعلقة باستكشاف الهندسة	الوحدة الإثرائية	الأنشطة المتعلقة باستكشاف الهندسة	الوحدة الإثرائية
92 حل المسائل -		58 نظرية بتوليمي Ptolemy	
استراتيجية معاكسة.		59 إنشاء π	
98 مقارنة المتوسطات		60 إنشاء The Arbelos	
105 الآلة الحاسبة ذات		61 دائرة بتسمة نقاط	
استكشاف المقاطع المخروطية		62 خط إيلى Euler	
القطع المكافئ		63 خط سهمون Semson	
106 إنشاء القطوع الناقصة		64 مسألة الفراضة	
107 إنشاء القطع المكافئ		65 الدوائر المتساوية	
108 استخدام منحنيات		66 الدائرة المحوطة والمثلث	
المستويات العالية		قائم الزاوية	
لتقسيم الزاوية إلى ثلاثة		67 المستطيل الذهبي	
أقسام		68 المثلث الذهبي	
109 إنشاء ظروف محيط		69 مقالات هندسية	
علوية وسفلية.		70 متعددات السطوح	
110 التعاقب التناقصي		المنتظمة	
111 التحويلات والمصفوفات		72 زوايا الساعة	
114 مدخل إلى التحويلات		73 تقسيم المستويات -	
الهندسية		المتوسط المتناسق	
115 الدائرة و شكل القلب		76 الهويات الجبرية	
120 عوامل الهندسة -		91 غلاف القطع المكافئ	
الثلاثة		استكشاف المقاطع المخروطية	

تمتاز الآلة الحاسبة Texas Instrument TI-83 Plus بكونها أداة شائعة في عرض الجوانب المفيدة في: الجبر، والهندسة، أو الإلتقان الرسومي للمستخدمين الواسعين وغير الواسعين، بينما يوفر برنامج Geometer's Sketchpad استيعاباً معقداً بالبحث الديناميكي في مبادئ الهندسة وأسسها.

وفي جميع الأنشطة السابقة، وفرت السبل المتاحة لحل المسائل باستخدام التقنية الطليعة من الاستيعاب وتوسيع دائرة فهمهم للمبادئ الرياضية.

SUMMARY ملخص

ينبغي على المعلمين، وفي جميع مستويات المراحل الدراسية، الاستمرار بمراقبة ومتابعة أنشطة الآلة الحاسبة والحاسوب المناسبة والمشاريع الملحق بها. كما أن كل جهد مبذول ينبغي أن ينصب باتجاه توظيف التقنية لغرض توفير إنماء وتحفيز إضافي داخل الصف. ويمكن للطلبة استخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب لتحليل أو تعميق تقنيات حل المسائل لديهم، وممارسة ألعاب منطقية، وشحن المهارات الهندسية، والجبرية، والحسابية، أو بمجرد تحسين قدراتهم العملية على الآلة الحاسبة أو الحاسوب.

تمارين Exercise

- ب- الصف العاشر (موهوب).
- ج- الصف التاسع يفكر إلى خدمات علاجية.
- د- الصف الحادي عشر - متوسط القابلية.

- 1- اختر موضوعاً مناسباً للعرض على برنامج Geometer's Sketchpad لكل مما يأتي:
- أ - الصف الثامن - رياضيات - متوسط القابلية.

- أخبرك بأنك قد ساهمت في تسهيل تقدم ابنه بالدروس أكثر من بقية الصف كيف ستقوم بتطوير دروس إذا وجدت بأن الطالب:
- أ. يمتلك قابليات متوسطة في الرياضيات.
 - ب. يمتلك موهبة ملموسة في الرياضيات.
 - 4- اختر آلة حاسبة مناسبة لتدريس أحد الموضوعات الإثرائية الموجودة في نهاية هذا الكتاب وقم بإعداد الدرس المناسب لها.
 - 5- أعد درساً بالحاسوب لأحد الصفوف التي تقي بأمس الحاجة إلى الرياضيات. أحصل على معلوماتك التعليمية من الشبكة المكتوبية العالمية World Wide Web.

- هـ- الصف السابع (موهوب).
- و- الصف الثاني عشر بدأ الآن بدراسة الإحصاء.
- 2- الأسئلة التالية من النوع المفتوح وتوفر للطالب مرونة أكبر في الإجابة. استخدم الآلة الحاسبة TI-83 لتطوير درس الصف العاشر في كل مما يأتي:
- أ- الأشكال رباعية الأضلاع.
 - ب- حل مجموعة من المعادلات الخطية.
 - ج - حل معادلات متعددة الحدود مهما كانت درجتها.
 - د- حل متباينات تربيعية Quadratic Inequalities.
 - هـ- تفاصيل الدوال المثلثية.
 - و- ميل الخط المستقيم.
 - 3- افترض مفاتيحة أحد آباء أكثر الطلبة إنجازاً لديك، والذي

Suggest References مراجع مقترحة

- Alfred, Brother U. "Exploring Fibonacci Number." *Fibonacci Quarterly* 1 (February 1963): 57-63.
- Ameis, Jerry A. *Mathematics on the Internet*. Columbus, OH: Merrill/Prentice Hall 2002.
- Bennett, Dan. *Exploring Geometry with the Geometer's Sketchpad*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press, 1993.
- Bethel, Sandra Callis, and Miller, Nicholas B. "From an E to A in First Year Algebra with the Help of a Graphing Calculator", *Mathematics Teacher* 91 (February 1998): 118-119.
- Billings, K., and D. Moursand. *Problem Solving with Calculators*. Salem, OR: Math Learning Center, University of Oregon, 1978.
- Bitter, G. G., and J. L. Mikesell. *Activities Handbook for Teaching with the Hand-Held Calculator*. Boston: Allyn and Bacon, 1980.
- Bolt, B. *Mathematics meets Technology*. New York: Cambridge University Press, 1991.
- Bramble, W. J., and E. Mason. *Computer in Schools*. New York: McGraw Hill, 1985.
- Charischak, Ihor. "A Look at Technology's Role in Professional Development of Mathematics Teachers at the Middle School Level". *School Science and mathematics* 100 (November 2000): 349-354.
- Chin, W. G., R. A. Dean and T. N. Tracewell. *Arithmetic and Calculators*. San Francisco: W. H. Freeman, 1978.
- Coburn, T. G., *How to Teach Mathematics Using a Calculator*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics, 1987.
- Coburn, T. G., et al. *Practical Guide to Computers in Education*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1982.
- Collis, B. *Computer, Curriculum, and Whole Class Instruction*. Belmont, CA: Wadsworth, 1998.
- Demana, Franklin, and Bert K. Waits. "Enhancing Mathematics Teaching and Learning Through Technology". In *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s, 1990 Yearbook of the National Council of Teacher of Mathematics*. Edited by Thomas J. Cooney and Christian R. Hirsch Reston Va: The Council, 1990, 212-222.
- De Villiers, Michael D. *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press 1999.
- Denney, Louise S. "A Better Way to Graph Piecewise Function". *Mathematics Teacher* 91 (October 1998): 628-629.
- Dion, Gloria. "Reader Reflections: Fibonacci Revisited". *Mathematics Teacher* 81 (March 1988): 162, 164.
- Dudley, Underwood. *Elementary Number Theory*. New York: W.H Freeman. 1978.
- Elgarten, G., and A. S. Posamentier. *Using Computers Programming and Problem Solving*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1984.
- Elgarten, G., A. S. Posamentier and S. Moresch. *Using Computers in Mathematics*, 2nd ed. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1986.
- Frost, Percival. *Curve Tracing*. New York: Chelsea, 1960.
- Gradner, Martin. "Mathematical Games: The Multiple Fascinations of the Fibonacci Sequence". *Scientific American* 220 (March 1969): 116-120.
- Giamati, Claudia. "Square This: Using Scripts to

- Explore Complex Constructions". *Mathematics Teacher* 93 (April 2000): 329-333.
- Gleick, James. *Chaos: Making a New Science*. New York: Viking Press, 1987.
- Goldberg, Samule. *Introduction to Difference Equations*. New York: Dover Publication, 1986.
- Goolsby, Ronnie C., and Thomas W. Polaski. "Extraneous Solution and Graphing Calculators". *Mathematics Teacher* 90 (December 1997): 718-720.
- Hall, H. S., and S. R. Knight. *Higher Algebra*. London: Macmillan, 1960.
- Heid, M. Kathleen. "Uses of Technology in Prealgebra and beginning Algebra". *Mathematics Teacher* 83 (March 1990): 194-198.
- Hembree, Ray. "Model for Meta-Analysis of Research in Education, with a Demonstration in Mathematics Education: Effects of Hand-held Calculators" *Dissertation Abstracts International* 45A (April 1985): 3087.
- Johnson, Luella H. "A Look at Parabolas with a Graphing Calculator". *Mathematics Teacher* 90 (April 1997): 278-282.
- Jones, Graham A. "Mathematical Modeling in a Feast of Rabbits". *Mathematics Teacher* 86 (December 1993): 770-773.
- Kastner, B. *Space Mathematics: A Resource for Secondary school Teachers*. Washington, DC: NASA, 1985.
- Kelman, P. et al. *Computers in Teaching Mathematics*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1983.
- Kenelly, J. W. *The Use of Calculators in the Standardized Testing of Mathematics*. New York: College Entrance Examination Board, 1989.
- Kieren, T. E. "Computer Programming for the Mathematics Laboratory". *Mathematics Teacher* 66 (1973): 9.
- Klein, Raymond J. and Ilen Hamilton. "Using Technology to Introduce Radian Measure". *Mathematics Teacher* 90 (February 1997): 168-172.
- Lawrence, J. Dennis. *A Catalog of Special Plan Curve*. New York: Dover Publication, 1972.
- LeBlanc, John F., Donald, Kerr, Jr., and Maynard Thompson. *Number Theory*. Reading, MA: Addison-Wesley Publication Co., 1976.
- Lee, Mary Ann. "Enhancing Discourse on Equation" *Mathematics Teacher* 93 (December 2000): 755-756.
- Linn, Andrew. "Reader Reflection: Generalized Formula" *Mathematics Teacher* 81 (October 1988): 514, 516.
- Lockwood, E. H. A. *Book of Curve*. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.
- Maor, Eli. "The Pocket Calculator as a Teaching Aid" *Mathematics Teachers* 69 (1976): 471.
- McGehee, Jean J. "Interactive Technology and Classic Geometry Problems". *Mathematics Teacher* 91 (March 1998): 204-208.
- National Council of Teachers of Mathematics, Commission on Standards for School Mathematics Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: The Council, 1989.
- Olmstead, Eugene A. "Exploring the Locus Definitions of the Conic Sections" *Mathematics Teachers* 91 (May 1998): 428-434.
- Olson, Alton T. "Difference Equations" *Mathematics Teacher* 81 (October 1988): 540-544.
- Patterson, Walter M., III. "Reader Reflections: The nth Fibonacci Number". *Mathematics Teacher* 80 (October 1987): 512.
- Persinger, Sharon E. "Using Graphing Calculator and the Rational Roots Theorem to Factor Polynomials" *New York State Mathematics Teacher's Journal* 49, (1999 1): 32-38.
- Polya, G. *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.
- Prielipp, Robert W., and Robert J. Kuenzi. "Sums of Consecutive Positive Integers". *Mathematics Teacher* 68 (January 1975): 18-21.
- Purdy, David C. "Using the Geometer's Sketchpad to Visualize Maximum Volume Problems". *Mathematics Teacher* 93 (March 2000): 224-228.
- Scher, Daniel. *Exploring Conic Sections with The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press, 1993.
- Schiellack, Vincent P., Jr. "The Fibonacci Sequence and the Golden Ratio". *Mathematics Teacher* 80 (May 1987): 357-358.
- Selitto, George L. "Using Graphing Technology to Investigate Exponential Population Growth". *New York State Mathematics Teachers Journal* 50 (no. 1): 44-47.
- Shilgalis, Tom. "Exploring a Parabolic Paradox with the Graphing Calculator". *Mathematics Teacher* 90 (September 1997): 488-493.
- Sisisky, Jeremiah David. "Reader Reflection Connecting Fibonacci and Lucas Sequence". *Mathematics Teacher* 86 (December 1993): 718-719.
- Sloyer, Clifford W. *Fantastike of Mathematics*. Providence RI: Janson Publications, 1986.
- Spence, Lawrence E. *Finite Mathematics*. New York: Harper & Row, 1981.
- Stick, Marvin E. "Calculus Reform and Graphing Calculators: A University View". *Mathematics Teacher* 90 (May 1997): 356-363.
- Suydam, M. N. *Using Calculators in Pre-College Education*. Columbus, OH: Calculator information Center, 1982. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 220 273).
- Tiffany, Patrice and Stolze, Charles. "Using

- Technology to Teach Calculus". New York State Mathematics Teachers Journal 48 (1998) no.2: 75-80.
- Touval, Aynan "Investigating a Definite Integral From Graphing Calculators to Rigorous Proof". Mathematics Teacher 90 (March 1997): 230-232.
- Troputman, A. P., and J. A. White The Micro Goes to School. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 1998.
- Vonder Embse, Charles. "Using a Graphing Utility as a Catalyst for Connection". Mathematics Teacher 90 (January 1997): 50-56.
- Weeks, Audrey "Graphing Functions with the Geometer's Sketchpad". Mathematics Teacher 93 (November 2000): 722-723.
- Worth, J. "Let's Bring Calculators Out of the Closet" Elements: A Journal for Elementary Educators 17(1985): 18-21.
- Yates, Robert C. A. Handbook of Curve and their Properties, 1952. Reprint. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1974.
- Yerushalmy, Michal and Shoshana Gilead "Solving Equations in a Technological Environment" Mathematics Teacher 90 (February 1997): 156-162.

استراتيجيات التقييم المتعدد وتحديد العلامات المدرسية

Multiple Assessment and Grading Strategies

6

يستثمر أكثر المعلمين فاعلية أدوات التقييم المتعدد كاستراتيجيات مفيدة في تحديد النمو الرياضي، والقدرة، والإنجاز لدى طلبته. وتؤدي الموازنة الصائبة بين وسائل التقييم إلى تعزيز العدالة والإنصاف، والتي توفر فرصة مناسبة للطلبة في إظهار قابلياتهم المختلفة. إن الطلبة الذين يتم تقييمهم بطرائق متعددة سوف يحسنون تقدير أن مادة الرياضيات ليست مجموعة صماء من القواعد ينبغي استظهارها عن ظهر قلب دون إدراك لمحتواها، أو اتباعها دون أي محاولة للفهم، ولكنها عملية معرفية تسهم بتزويدهم بمزيد من القدرة.

أدوات التقييم المتعدد يمكن أن تتضمن الاختبارات المكتوبة، والامتحانات السريعة، والعمل الصفي، والمساهمة المنطوقة والمكتوبة في النقاشات الدائرة داخل الصف، والعمل ضمن مجاميع عمل صغيرة/كبيرة، والمشاريع، والتقارير الشفهية، ويوميات الطالب، وإجابات الأسئلة المفتوحة، والحقيبة المدرسية، والمشاهدات، والتقييم الذاتي للطلبة وأقرانهم، والواجبات البيتية، وتقييم شمول وترتيب محتوى دفاتر الطلبة. وقد تتضمن استراتيجيات التقييم-الإضافية، اختبارات الأداء في المنزل Take-home، واختبارات الإنجاز المعياري، والثقة والمهارة التي يبدئها الطلبة أثناء استخدامهم للألات الحاسبة، والحواسيب، والممارسات التشكيلية المختلفة.

ينبغي على عملية التقييم أن تعكس، أيضاً، التنوع في الأساليب التدريسية للمعلم. وأخيراً، فإن المعلم سوف يستخدم استراتيجيات التقييم هذه للوصول إلى مخطط متوازن وملامح لتقويم الطلبة وبيان مراتبهم. يستطيع المعلمون أن يصمموا بأنفسهم برنامجاً للتحديد العلامات المدرسية، من خلال الخطوط العامة التي تم وضعها في هذا الفصل، وذلك لعكس القيم التي يعدونها مهمة ومرغوب فيها. إن الخبرات الشخصية والمستمرة للمعلم بالتقانات المختلفة التي يتم اعتمادها في عملية التقييم، سوف تكون ذات أثر بالغ الأهمية ومورداً مساعداً على الوصول إلى أفضل موازنة بين الاستراتيجيات. لقد اقترحنا جملة من الخيارات والتي ينبغي أخذها بعين الاعتبار في العملية التقييمية. أن تحديد علامات مدرسية رقمية والتي تصبح، فيما بعد، متوسطاً موزوناً Weighted-average لكل فئة تقييم لأغراض عملية التقويم، هو حكم مهني سيتخذ كل معلم يحاول تبريره للطلبة، والآباء، والمدرسين، والأقران. لا تصلح القوالب والصياغات المدة مسبقاً لجميع المعلمين، رغم أن المخطط الآتي، مع التغييرات المناسبة التي يحددها كل معلم، قد اقترح وأوصى به الكثير من الخبراء كمرشد في إعداد تقويم نهائي ومتوازن. إن عدداً لا بأس به من الفترات الآتية تحتاج إلى تقويم موضوعي بواسطة المعلم، وأمور أخرى، مثل درجات الاختبار التي يمكن أن تحدد بقم عديدة أكثر موضوعية. ونظراً إلى أن الدرجة النهائية تساوي مجموع أجزائها، ينبغي على المعلم أن يكون واثقاً بأن الدرجة المحصلة هي انعكاس صحيح لأسلوبه/أسلوبها في التعليم.

تشمل أدوات التقييم التي ينبغي اعتبارها، ما يأتي:

- اختبارات الصف والامتحانات القصيرة.
- التقويم عند منتصف الفصل الدراسي.
- درجة الامتحان النهائي.
- نتائج الاختبارات المعيارية.

ورغم أن أدوات التقييم المذكورة قد تحدد درجات رقمية غير واضحة وملتبسة، فإن ما يأتي، من فئات أكثر موضوعية قد يتم ترتيبها بواسطة المعلم من 1 إلى 5، مع تحديد المعاني الخاصة للرتب Rankings بواسطة المعلم أو قاعدة محددة.

- درجة تقبل الطلبة بواسطة أعضاء مجموعة أخرى.
- معدل نجاح المجموعة التي يشارك فيها الطالب بإكمال الواجب المحدد بصورة صحيحة.
- جودة مشاركة الطالب في المجمع الكبيرة.
- التقارير الشفهية.
- المشاريع.
- التعليقات المكتوبة والتقويمات كما توجد في الحقائق.
- محاولات حل التمارين الإثرائية.
- دقة وترتيب، واكتمال، وجودة الواجب البيتي.
- مهارات استخدام الآلة الحاسبة العلمية والرسومية.
- استخدام تقنيات الحاسوب.
- تطبيقات التمارين التشكيلية المعدة/أو التي يتم إعدادها شخصياً.

ليس من الضروري استخدام جميع تقانات التقييم بواسطة كل معلم في جميع الأوقات. ويمكن توظيف تقانات تقييم إضافية، مثل مراقبة سلوك الطالب في إعدادات المجمع الصغيرة والكبيرة، وملاحظة براعة الطالب بالتمارين التشكيلية أو استخدام الآلة الحاسبة والحاسوب.

تغيير أنماط التفكير وأساليبه من التفكير الإجرائي إلى التفكير النقدي، وعليه ستنجح في إنشاء علاقات بين الأسئلة الهادفة والتعليم الذي يحمل معنى ملموساً.

نماذج لمهام تقييم الأداء

Examples of Performance Assessment Tasks

يُبين بأن زاويتي قاعدة المثلث متساوي الساقين متطابقتان. $\angle x = 180^\circ$.

اشتق الصيغة التربيعية.

وضح لماذا يعبر عن مساحة المثلث بالصيغة $\frac{1}{2}bh$.

استخدام التعليقات بالخطوط الحمراء لتقييم عمل الطالب

Using Rubrics To Evaluate Student Work

التعليقات بالخطوط الحمراء هي معايير تفصيلية أو إجراءات تستخدم لتقييم عمل الطلبة، وتوضح ما هي العوامل التي يراود اختبارها، وتعرض مستوى الإنجاز، وتساعد المعلم في تصف عمل الطالب على مستوى مناسب. يضاف إلى ذلك بأنها توفر للطلبة فهماً أفضل لتوقعات المعلم.

تتألف التعليقات بالخطوط الحمراء من معايير محددة لتقييم أداء الطالب، وتحتوي على مفتاح تلمين لتطبيق هذه المعايير. إن الخطوط الحمراء المسجلة تنشئ المعيار المطلوب للحكم على العمل في ضوء أداء محدد. وتساعد التعليقات - بالخطوط الحمراء الطلبة على مراقبة قيمة، وقياس، والأهداف التعليمية التي تكمن وراء الواجب البيتي والواجبات المحددة. من أجل هذا ينبغي على المعلمين مساعدة الطلبة في فهم تعليقات الخطوط الحمراء عند تكليفهم بالواجبات المحددة، لكي يصبح الطلبة أكثر ألفة مع المهام المطلوبة منهم، وقدرة على إكمال تنفيذها.

إن المسائل الآتية هي عبارة عن نماذج واقعية من عمل الطالب، وقد تم احتساب درجة كل مسألة باستخدام تعليقات حمراء بخمس نقاط (يعني، من صفر إلى 4) حيث تؤثر الدرجة صفر افتراضياً إلى عدم وجود فهم بالمسألة، أما الدرجتين 1، 2 فتؤشران إلى وجود معرفة ضئيلة ومحدودة بالمسألة، وتؤشر الدرجة 3 إلى وجود معرفة عملية وتطبيقية بالمسألة، وأخيراً تؤثر الدرجة 4 إلى وجود معرفة تامة ومهارة في التعامل مع مفردات المسألة. من الضروري أن يكون المعلمين قادرين على

استخدام مهام تقييم الأداء

Using Performance Assessment Tasks

إن مهمة تقييم الأداء تؤسس الفهم المتحقق لدى الطالب، وطبيعة الأمور التي يستطيع أداؤها. من أجل هذا ينبغي أن تكون المهمة معنوية، وواقعية، وذات جدارة وأهمية. ينبغي على مهمة الأداء أن:

- تقيم علاقة متبادلة مع الأهداف العامة والتعليمية، ومحتوى المنهج الدراسي.
- تعزز الرياضيات بوصفها عملية تتيح للطلبة فرصة عرض أفكارهم، وأسلوب صياغة المفاهيم للمسائل الرياضية.
- تمنح فرصة لتقويم العمليات المتضمنة في المهام.
- تكون ذات طابع محفز، وتتضمن تفكيراً انتقادياً، وأن تكون ذات صلة بمواقف الحياة الواقعية.
- تؤد على الفهم الإدراكي أكثر من التعلم الاستظهار.
- ترتبط بالهدف الذي يتم تقييمه بحيث يمكن مناقشة أداء الطالب.
- تكون أكثر ميلاً إلى الأسلوب المفتوح منها إلى الأسلوب المحدد.

- تكون متعددة الأوجه وإن لا تقتصر على منهجية واحدة.
- تؤدي إلى تفريعات، وامتنادات، وأسئلة رياضية من نوع آخر.
- تؤدي مهام تقييم الأداء - بذاتها - إلى صياغة البعد الإدراكي للمفاهيم والمبادئ الرياضية. بصورة عامة لا يمكن تقييم هذه المهام باستخدام الاختبارات والامتحانات القصيرة التقليدية. وتعد مهام تقييم الأداء، غالباً، موضوعات موجهة عملياتية Process-oriented، وغير مغلقة، ولعلما ينتج عنها إجابة واحدة. إن تقويم مهام تقييم الأداء يتضمن حكماً صادراً عن مربي ذي نواية وممارسة متقدمة، ويرجع أن يكون ذو معرفة موسوعية وشاملة Holistic أكثر من كونه تحليلياً Analytical.

غالباً ما يدمج عدد كبير من المدرسي مهام تقييم الأداء ضمن عمليات التقويم التي يمارسونها، وتحتوي كتب الرياضيات المنهجية التي يستخدمونها على بضعة مهام لتقييم الأداء. وفي معظم الأحيان، يمكن تحويل المسائل الرياضية، والأمثلة، والرسوم التوضيحية السائدة في هذه الكتب إلى مهمة لتقييم الأداء عن طريق طرح الأسئلة المفتوحة مثل "ما هو الفرق بين...؟"، "تحت أية ظروف سيكون...؟"، "وضح لماذا أن هذه الحقيقة قد تكون صادقة أو كاذبة؟". إن طرح الأسئلة الخصبة التي تسهل عملية تعميق الإدراك المفاهيمي، تسهم في

وعليه، ينبغي أن يكون المعلمين قادرين على التمييز بين الأخطاء المفاهيمية الرئيسية، والأخطاء المفاهيمية الخطيرة. من أجل هذا تظهر الحاجة إلى ممارسات مستمرة ومركزة لكي تكون قادرين على تشخيص وتقييم عمل الطالب بصورة دقيقة وصحيحة.

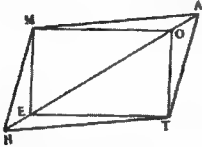
تشخيص درجات عمل الطلبة بصورة دقيقة. وهذا يعني بأن عليهم أن يكونوا قادرين على تحديد أخطاء الطلبة، وتصنيف هذه الأخطاء بصورة صحيحة. على سبيل المثال، في تقييم الأداء، قد لا يكون الخطأ في الحسابات حاسماً بالنسبة للإدراك المفاهيمي لمفردات المسألة.

مثال على تعليقات الخطوط الحمراء الرياضية كأداة لتقييم مهمة أداء Example of a Mathematics Rubrics for Assessing a Performance Task

المستوى	الإدراك المفاهيمي	الاستدلال العقلي واستراتيجيات حل المسائل	التواصل
غير مقبول	<ul style="list-style-type: none"> لا يوجد أي حل، أو أن الحل لا يرتبط بمؤال الاختبار المهارات والمهارات المستخدمة متناقضة ومتضاربة ولا تنطبق على سؤال الاختبار 	<ul style="list-style-type: none"> لا يوجد ثمة دليل على وجود استراتيجية لحل المسألة. عدم وجود خطة لاستخدام الاستراتيجية، أو استخدام إجراءات لا تساعد على حل المسألة. ليس ثمة دليل على استخدام استدلال رياضي. كثرة الأخطاء الرياضية بحيث لا يمكن حل المسألة. 	<ul style="list-style-type: none"> لم يوضح الحل، أو أن التوضيح مقتضب، أو لا يرتبط بالمسألة أصلاً. عدم وجود عرض رياضي (مثل، أشكال رسومية، أو رسوم تخطيطية، أو جداول، ... الخ) استخدام خاطئ للاصطلاحات الرياضية.
يقارب المقبول	<ul style="list-style-type: none"> حل غير متكامل، أي يعكس عدم إدراك بعض جوانب المسألة. 	<ul style="list-style-type: none"> استخدام استراتيجية مفهدة لحد ما، يؤدي إلى حل غير متكامل. بعض المؤشرات لاستراتيجيات رياضية. طرق إجرائية-رياضية غير متكاملة. 	<ul style="list-style-type: none"> هناك تبرير غير متكامل ويفتقر إلى الوضوح. هناك حد أدنى في استخدام تمثيل رياضي صحيح. هناك حد أدنى من استخدام الاصطلاح الرياضي والمؤشرات المناسبة للمسألة.
مقبول	<ul style="list-style-type: none"> يؤشر الحل بأن الطالب لديه معرفة أكثر شمولاً بالمسألة، وبالبنائات الأساسية المطلوبة لحلها. 	<ul style="list-style-type: none"> يستخدم استراتيجية بارعة تؤدي به إلى حل المسألة. يستخدم الاستدلال الرياضي بصورة صحيحة. يطبق الإجراءات الرياضية. 	<ul style="list-style-type: none"> الشرح واضح لا لبس فيه. استخدم العرض الرياضي بصورة صحيحة ومناسبة. استخدمت الاصطلاحات والرموز الرياضية بفاعلية ملحوظة.
متفوق	<ul style="list-style-type: none"> يظهر الحل وجود عمق بالإدراك المفاهيمي للمسألة، ويتضمن قدرة متقدمة في تطبيق المفاهيم الرياضية الصحيحة، والمعلومات الضرورية لحلها. 	<ul style="list-style-type: none"> يستخدم استراتيجيات منظمة بصورة جيدة، وبمستويات عالية والتي تؤدي مباشرة إلى حل بارع. يستخدم استدلال عقلية معقدة. يستخدم طرقاً إجرائية صحيحة لحل المسألة والتأكد من صحة الحل. 	<ul style="list-style-type: none"> الشرح واضح ومفصل. وقد عرضت جميع التفاصيل اللازمة لحل المسألة. وتم إدراج جميع الخطوات بحيث أن توضيح الحل قريب إلى فهم القارئ. استخدام عرض رياضي دقيق للتواصل مع المفاهيم ذات الصلة بالمسألة. استخدام لغة رياضية دقيقة، واصطلاحات دقيقة، وتم تطبيق الرموز خلال حل المسألة.

تقييم أداء: برهان هندسي

Performance Assessment: Geometric Proof



المعطى : متوازي أضلاع MOTE
 $HO \cong AE$

برهن : MATH هو متوازي أضلاع

إن التعليقات بالخطوط الحمراء الآتية توفر خطوطاً عامة وتدرج معايير لغرض استخدامها في تقييم أداء يركز إلى برهان هندسي. وهناك أكثر من أسلوب وطريقة لبلوغ هذا البرهان، ولأغراض توضيحية، سيتم الدنو من البرهان عبر نقطة مفصلة واحدة.

يضاف إلى ذلك، بأن البرهان سيمنح درجات على مقياس بخمسة درجات، وكما يأتي:

(4) يشرح الطالب ويصف سلسلة من القضايا المنطقية - الكلية بناء على خطة محددة، والتي تتضمن المعلومات المحددة، وتعريف دقيقة ومحكمة، وإفتراسات ومسلمات مناسبة، ونظريات وفرضيات لغرض استنباط الاستنتاج الصحيح للبرهان. وقد يدرج الطالب جميع خطوات البرهان، ويعتمد إلى ترقيمها وذلك بوضع القضية في عمود مستقل، والتبرير الموافق له في عمود آخر. وسيمد الطالب، أيضاً، إلى تقديم تحليل وصفي للبرهان بصورة مختصرة. ينبغي أن تكون جميع التأثيرات، والتسميات التوضيحية، والرموز، والصيغ الرياضية واضحة غير ملتبسة مع القضايا المنطقية التي تم إيرادها في البرهان.

(3) يتبع الطالب سلسلة من القضايا المنطقية التي تركز على خطة محددة، ولكنها تستبعد واحداً من: التعريفات، أو النظريات، أو المسلمات (التي تمتلك أهمية كبيرة) خلال عملية البرهنة. من أجل هذا سيتوصل الطالب إلى استنتاج خاطئ نتيجة اعتماده على معلومات غير كافية.

(2) يحاول الطالب اتباع سلسلة من القضايا المنطقية والأسباب، ولكنه يستخدم معلومات وتسميات خاطئة لاتخاذ استنتاج غير صحيح مستخدماً معلومات غير صحيحة أيضاً.

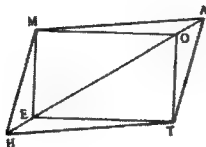
(1) يدرج الطالب المعلومات المتوفرة، دون أن تظهر لديه خطة واضحة أو تسلسل منطقي لأفكاره كي تؤدي به إلى استنتاج صحيح.

(أو)

إن الاستنتاج يتخذ بناء على قضايا وأسباب تنفقر إلى منطق سليم.

(0) الجواب خاطئ بكافة تفاصيله، وغير مترابط، أو غير منطقي، أو قد يكون الجواب صحيحاً تم التوصل إليه بعملية غير صحيحة.

طالب 1 Student



الدرجة: (4) GRADE

إن أنموذج العمل هذا يوضح الإطار المعياري للأداء. فقد أظهر الطالب قضايا منطقية شاملة ارتكزت إلى خطة محددة وباستخدام تحليل وصفي للبرهان في إطار سردي. تضمن البرهان سلسلة من التعاريف الصحيحة، والمسلمات، والنظريات التي ارتكزت إلى المعلومات المتوفرة فأرشدته إلى الاستنتاج الصحيح، والمطلوب للبرهان.

المعطى : متوازي الأضلاع MOTE

$$HO \cong AE$$

برهن : MATH هو متوازي أضلاع

ضفة: إن خطتي تهتف لك برهنة أن $\Delta MOA \cong \Delta HET$ بواسطة

$$SAS \cong SAS \text{ ، وبالبرهنة على أن } \cdot$$

$$\overline{HT} \cong \overline{MA} + \overline{HT} \parallel \overline{MA}$$

وعليه ، إذا كان احد الأضلاع المتسابقة في الشكل الرباعي متوازيًا ، ومتطابقًا ، سيكون الشكل الرباعي \square .

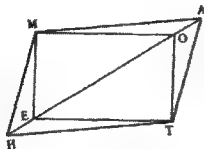
ورد في صيغة السؤال بأن MOTE هو \square ، وعليه $\overline{MO} \cong \overline{ET}$ ، وقد أعطينا أيضاً بأن $\overline{AO} \cong \overline{HO}$ ، $\overline{EO} \cong \overline{EO}$.
بسبب التماس ، وأن $\overline{HO} - \overline{EO} = \overline{AE} - \overline{EO}$ من مسلمة الطرح ،
لذا سيكون (ضلع) $\overline{EH} \cong \overline{AO}$.

$\angle MOE \cong \angle OET$ لأن الزوايا اللاحقة المتبادلة المستقيمة // تكون \cong .
والآن ، $\angle HET \cong \angle MOA$ (زاوية) لأن مكملة
الر \angle تكون \cong .
ببرهان $\Delta MOA \cong \Delta HET$ بواسطة
 $SAS \cong SAS$ ، لذا $\overline{MA} \cong \overline{HT}$ ، و $\angle THE \cong \angle MOA$.
لأن الأجزاء المتناظرة من Δ تكون \cong .

كما أن $\overline{HT} \parallel \overline{MA}$ لأن إذا لاه التسوية متقابلة المتوازي ، قد
قطعنا بواسطة مستقيم متوازي فإنها يكونان زوجاً من الر \angle
المتبادلة التي تكون \cong ، وعليه سيكون المستقيمان // .
إن MATH هو \square ، لأنه عندما يكون زوج من الأضلاع المتسابقة
في الشكل الرباعي \cong و // ، سيكون الشكل الرباعي \square .

طالب 2 Student 2

الدرجة: (3) GRADE



اتباع الطالب سلسلة من القضايا المنطقية التي تركز إلى خطة محددة، ولكنها تستبعد إحدى النظريات المهمة خلال البرهان (فعلى سبيل المثال، اغفل قيمة حقيقة أن الشكل الرباعي يكون متوازي الأضلاع إذا كان كل ضلعان من أضلاعه المتقابلة متطابقة ومتوازيتين) لذا سيذهب إلى اتخاذ استنتاج خاطئ مبني على معلومات ضئيلة لحد ما.

المعطى : متوازي الأضلاع MOTE

$$HO \cong AE$$

برهن : MATH متوازي أضلاع

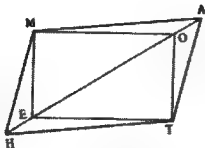
ضعة: إن ضلعي $\triangle HET$ يكون من البوصلة أولاً على أن $\triangle MOA \cong \triangle HET$ براسة SAS ، ثم برضة $HT \cong MA$. وهذا يغير بأنه إذا كان الضلعان المتقابلان في الشكل الرباعي متطابقان ، سيكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

الأسباب	التصايا
1. معطى	1. MOTE صو متوازي أضلاع .
2. الأضلاع المتجاورة متوازي الأضلاع متطابقة	2. $ET \cong MO$.
3. معطى في السؤال .	3. $AE \cong HO$.
4. تماثل .	4. $EO \cong EO$.
5. مسألة الطرح .	5. $HO - EO \cong AE - EO$.
6. الزوايا الرأسية - المتكافئة في الخطوط المستقيمة متطابقة .	6. $\angle MOE \cong \angle ETO$.
7. مكملات الزوايا المتطابقة ، متطابقة .	7. $\angle HET \cong \angle MOA$.
8. SAS	8. $\triangle MOA \cong \triangle HET$.
9. الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة .	9. $HT \cong MA$.
10. إذا كان الضلعان المتقابلان في الشكل الرباعي متطابقان ، سيكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع .	10. MATH متوازي أضلاع .

طالب 3

الدرجة: (2) GRADE

يحاول الطالب اتباع سلسلة من القضايا والأسباب المنطقية ولكن باستخدام معلومات وتأثيرات خاطئة للوصول إلى استنتاج خاطئ بتوظيف أسباب غير مقبولة.
على سبيل المثال، قام الطالب بتأشير المعلومات المعطاة بصورة خاطئة في العبارة رقم 3. كذلك، عمد الطالب إلى بيان تطابق زاويتين لا تقعان ضمن المثلثين المقصودين في الفقرة رقم 4. أخيرا فإن استنتاج الطالب في السبب رقم 7 كان محدودا.



المعطى : متوازي الأضلاع MOTE

$$\overline{HO} \cong \overline{AE}$$

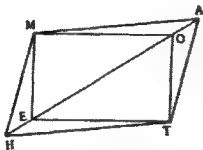
برهن : MATH هو متوازي أضلاع

الأسباب	المقضايا
1. معطى	1. MOTE صورة \square
2. الأضلاع المتساوية في متوازي الأضلاع تكون متطابقة + متوازية.	2. $\overline{ET} \cong \overline{MO}$ 3. $\overline{ET}^{(5)} \parallel \overline{MO}$
3. معطى في السؤال.	3. $\overline{OA}^{(9)} \cong \overline{HE}$
4. الزوايا الرضائية المتساوية للمستقيمات المتوازية تكون متطابقة.	4. $\angle MOE \cong \angle OET \nrightarrow (A)$
5. SAS \cong SAS	5. $\triangle MOA \cong \triangle HET$
6. الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة، متطابقة.	6. $\overline{HT} \cong \overline{MA}$
7. الأضلاع المتساوية في متوازي الأضلاع تكون متطابقة.	7. MATH صورة متوازي أضلاع.

طالب 4 Student 4

الدرجة: (1) GRADE

أدرج الطالب المعلومات المتوفرة ولكن ليس ثمة خطة واضحة أو تسلسل منطقي لأفكاره، والتي يفترض أن تقوده إلى استنتاج صحيح.



المعطى : متوازي الأضلاع MOTE

$$\overline{HO} \cong \overline{AE}$$

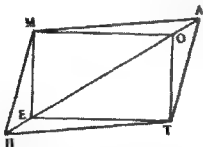
برهن : MATH هو متوازي أضلاع

MOTE هو \square ، وهو معطى في السؤال ، بحيث $\overline{ET} = \overline{MO}$ (ضلع)
 $\overline{OT} \cong \overline{ME}$ (ضلع) ، لأن الأضلاع المتقابلة في \square تكون \cong
 $\overline{AE} \cong \overline{HO}$ (ضلع) هو معطى في السؤال . لذا ،
 $\triangle MOA \cong \triangle HET$ بواسطة SSS .

طالب 5 Student 5

الدرجة: (0) GRADE

الجواب خاطئ بصورة كاملة ، وغير مترابط ، أو غير منطقي أو أن الجواب صحيح ، وقد تم الحصول عليه بطريقة غير سليمة بشكل ملحوظ.



المعطى : متوازي الأضلاع MOTE

$$\overline{HO} \cong \overline{AE}$$

برهن : MATH هو متوازي أضلاع

الأسباب

الخصائص

١ - معطى .

١. MOTE هو متوازي أضلاع .

٢ - معطى .

٢. $\overline{AE} \cong \overline{HO}$.

مهمة تقييم أداء في الهندسة Performance Assessment Task in Geometry

إذا كان قياس الزاوية الخارجية في قاعدة مثلث متساوي الساقين هو 105° . جد قياس زاوية رأس المثلث، مع توضيح جميع تفاصيل العمل.

إن تعليقات الخطوط الحمراء الآتية تفيد كخطوط عامة وقوائم للمعايير المستخدمة في تقييم المسألة التي تركز إلى الأداء، والتي سيتم احتساب درجاتها وفق مقياس يتألف من خمسة نقاط، وكما يأتي:

(4) يرسم مخططاً رسمياً دقيقاً لمثلث متساوي الساقين مع امتدادات قاعدته. (المخطط الرسومي ليس الزامياً)، ويؤشر جميع المعلومات وثيقة الصلة بالموضوع، أي والمواقع الصحيحة للزوايا والأضلاع في ضوء علاقتها بالمثلث متساوي الساقين وامتدادات قاعدته. يحدد قياس إحدى زوايا قاعدة المثلث متساوي الساقين عن طريق إيجاد قياس الزاوية المكمل للزاوية الخارجية 105° والتي تساوي 75° .

لذا باستخدام الحقيقة القائلة بأن زوايا قاعدة المثلث متساوي الساقين تكون متطابقة، يجد قياس الزاوية الأخرى لقاعدة المثلث متساوي الساقين والتي سيكون قياسها 75° أيضاً. يستخدم الحساب أو الجبر للحصول على قياس زاوية الرأس في المثلث متساوي الساقين، عن طريق استخدام الحقيقة القائلة بأن مجموع قياس زوايا المثلث تساوي 180° .

(3) المخطط الرسومي وتأشيراته صحيحة، ولكنه ارتكب خطأ حسابياً في حساب قياس زاوية رأس المثلث متساوي الساقين.

(2) ارتكب خطأ حسابياً عند احتساب قياس الزاوية المكمل للزاوية الخارجية 105° لذا انتقل هذا الخطأ إلى قياس زاوية الرأس للمثلث متساوي الساقين.

(1) يوجد قياس الزاوية المكمل للزاوية الخارجية 105° فقط

أو

يحاول استخدام الحقيقة القائلة بأن زوايا قاعدة المثلث متساوي الساقين تكون متطابقة، ولكن التعميض والجواب كان خاطئاً.

أو

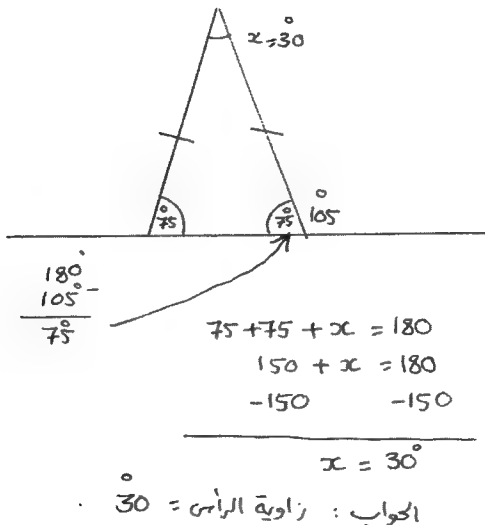
الجواب الصحيح موجود دون إظهار أي آثار للحل.

(0) الجواب خاطئ بالكامل، وغير مترابط، أو غير منطقي، أو هناك جواب صحيح تم الحصول عليه بعملية غير صحيحة.

الطالب 1 Student

الدرجة (4) GRADE

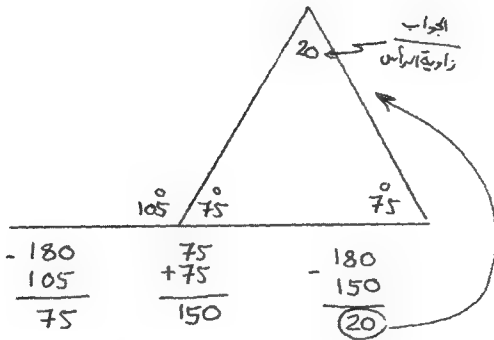
يقوم برسم مخططاً رسمياً دقيقاً لمثلث متساوي الساقين مع امتدادات قاعدته. ويؤشر جميع المعلومات - وثيقة الصلة بالموضوع، أي المواقع الصحيحة للزوايا والأضلاع في ضوء علاقتها بالمثلث متساوي الساقين قاعدته. يحدد قياس إحدى زوايا قاعدة المثلث متساوي الساقين عن طريق إيجاد قياس الزاوية المكمل للزاوية الخارجية 105° ، والتي تساوي 75° . وباستخدام الحقيقة القائلة بأن زوايا قاعدة المثلث متساوي الساقين تكون متطابقة، يجد قياس الزاوية الأخرى لقاعدة المثلث متساوي الساقين، والتي ستكون قياسها 75° . يستخدم الحساب أو الجبر للحصول على قياس زاوية الرأس 30° في المثلث متساوي الساقين وعن طريق استخدام الحقيقة القائلة بأن مجموع قياس زوايا المثلث تساوي 180° .



Student 2 الطالب 2

الدرجة (3) GRADE

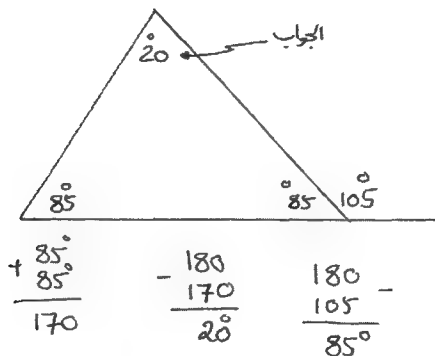
المخطط الرسومي وتأثيراً ته صحيحة، ولكنه ارتكب خطأ حسابياً في احتساب قياس زاوية رأس الثلث متساوي الساقين.



الطالب 3 Student

الدرجة (2) GRADE

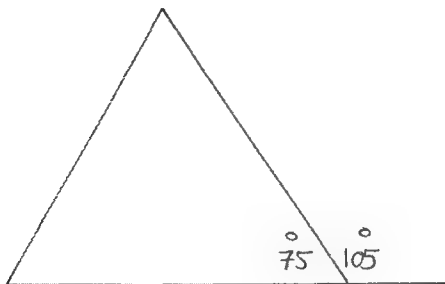
ارتكب خطأ حسابيا عند احتساب قياس الزاوية للمكمل للزاوية الخارجية 105° لذا انتقل هذا الخطأ إلى قياس زاوية رأس المثلث متساوي الساقين.



الطالب 4 Student

الدرجة 1 GRADE

يوجد قياس الزاوية المكمل للزاوية الخارجية 105° فقط



الطالب 5 Student

الدرجة (0) GRADE

الجواب خاطئ بالكامل، وغير مترابط، أو غير منطقي، أو هناك جواب صحيح تم الحصول عليه بطريقة غير صحيحة.

$$180 - 105$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ - 105 \\ \hline 85 \end{array}$$

الجواب

أية مسألة خلال العمل الصفي اليومي، أو الواجب البيتي، أو الامتحان السريع، أو الاختبار (ما لم يتم توجيههم من قبلك لأداء أمور أخرى).

تظهر العينات 1-4 نماذج من الامتحانات السريعة. كما ويمكن أن يعد لامتحان أكثر تفصيلاً لأغراض قياس مدى تضلع الطالب وتمكنه من موضوعات متعددة، ويفضل أن يخطط للامتحان بحيث يستوعب فترة الدرس لكي يتمكن الطلبة من إكمال حل مسائله. يتم إعداد مثل هذه الاختبارات، عموماً، عند اكتمال وحدة عمل Unit Work في الصف. لذا ينبغي إشعار الطلبة، قبل بضعة أيام، ليتكفوا من التهيؤ والتحضير المناسب عبر مراجعة واستعراض أقسام المنهج، والملاحظات، والواجبات البيتية المحددة، والتعارين الصفية. كما ينبغي عمل قائمة بالموضوعات على لوحة الصف مع إعطاء أسئلة اختبار نموذجية في اليوم الذي يسبق الاختبار. إن مثل هذه الاختبارات تمتلك وزناً أكبر في تقييم الطلبة مما توفره الامتحانات السريعة، ويتوقع من الطلبة بذل المزيد من الجهد والمثابرة بالتهيؤ لمثل هذه الاختبارات.

إن مجال الاختبارات التي تستغرق جل وقت الدرس يمتاز بكونه أكثر رحابة، بصورة عامة. تمثل العينات 5-7 ثلاثة نماذج اختبار: اثنان منها عبارة عن اختبارات تستغرق جل وقت الدرس، وواحد امتحان (نصف السنة) والذي يتطلب، بصورة عامة، وقتاً مضاعفاً. تتناول هذه العينات بعناية من خلال دراسة متأنية لأسئلتها، وقيم نقاطها، وأنواع الأسئلة، واستخدام وحدات تقدير إضافية Extra Credit، وغيرها من الأمور. ولاحظ بأن امتحانات الإجابة التعاونية على الأسئلة سوف تكون ذات أهمية بالغة كأداة تدريبية عندما يحتوي الاختبار على موضوعات تناسب النقاشات الدائرة في المجموعة الصغيرة، وعندما يكون بعض أعضاء كل مجموعة، أعمق معرفة بمادة الدراسة، وأن البقية تكون أقل فهماً بهذه الموضوعات.

إن الإجابات التي يتم إعدادها بصورة تعاونية تعد درساً تقديماً تراجع فيه الموضوعات المطروحة في الاختبار، وستكون ذات أهمية بالغة للطلبة الذين هم بحاجة دائماً إلى المراجعات أكثر. إن مسؤولية المجموعة تجاه فهم كل طالب لكل إجابة سوف تتعزز عندما يتم تذكيرهم بأن أي طالب قد يطلب منه توضيح وبيان أي حل يظهر ضمن صحائف الإجابات المعدة بصورة تعاونية، وأن الدرجة التجميعية للامتحان تعود إلى كل عضو من أعضاء المجموعة.

إعداد اختبار صفي

Construction Class Test

يتم التضلع بتن إعداد اختبار صفي جيد مع مرور الوقت، وبمساعدة أكبر عدد ممكن من الأصول والمنايع. ويستطيع المعلمون المبتدئون الاعتماد على خبرة الغير، إضافة إلى اختباراتهم المبكرة. وينبغي عليهم عدم التردد في عمل ذلك. يجب على المعلمين التشاور مع المشرفين، ومع نظرائهم، وبالأخص أولئك الذين قاموا أو يقومون بتعليم نفس المساقات الدراسية التي يمارسونها بالوقت الحالي، وأن يقوموا بمراجعة وتفحص ملفات الامتحانات القديمة للاطلاع على أساليبها، ومحتواها، وصياغتها.

تحتوي الكثير من مكاتب الأقسام على مثل هذه الملفات لفرض الرجوع إليها، وعلى المعلم الجديد أن يترك التردد جانباً في الرجوع إليهم. وسيكون بنية أعضاء قسم الرياضيات سعيدين بمشاركة خبراتهم مع نظائريهم الجدد، وستكون اقتراحاتهم حول إعداد اختبارات الصف، في كثير من الأحوال، مفيدة وناقمة. ينبغي على المعلم الجديد الاعتماد على جميع أصول المساعدة بقدر الإمكان، لكي يتجاوز الأخطاء التي وقع فيها الغير بالماضي.

كيف تبدأ ؟ ؟ How to Begin ?

تتمكن الخطوة الأولى لإعداد اختبار ما، بالطبع، في تحديد ماهية ما يراد اختباره. فلكل اختبار هدف محدد، سواء كان محدوداً أم شاملاً، كما وينبغي أن تكون الغاية واضحة العالم في ذهن المعلم لكي يستطيع إعداد الاختبار المناسب للصف.

قد يكون الاختبار محدوداً جداً بمجاله، فيغطي موضوعاً أو موضوعين ليس إلا، ويستمر لفترة قصيرة، تتراوح بين خمسة إلى عشرة دقائق. إن مثل هذه الاختبارات تعرف عادة بالامتحانات السريعة Quizzes، و تحوي بصورة عامة على سؤال منفرد أو بضعة أسئلة بسيطة.

تصمم الامتحانات القصيرة، عادة، لتحديد وقياس فهم الطالب للموضوع الذي تلقاه بالدرس في اليوم السابق. أو قد تعطي لتحديد فيما إذا قد قام الطلبة بإعداد واجباتهم البيتية المحددة لهذا اليوم، والتي تمتاز أسئلتها بكونها مقاربة للأسئلة المحددة في يوم سابق كواجب بيتي.

بصورة عامة لا يتم إشعار الطلبة بالامتحان السريع بصورة مسبقة، ولكن ينبغي عليك إشعار الصف في بداية الفصل الدراسي بإمكانية استخدام آلات حاسبة علمية أو رسومية لحل

عينة 1 Sample

امتحان سنة أولى جبر - سريع - (10 دقائق)

الإجابات	الاسم	اعرض جميع العمل
1	1- عبر عما يلي بتمبير ثلاثي الحدود $(2a+5)^2$.	
2	2- عند أية قيمة من قيم المتغير سيكون الكسر $\frac{X+2}{X-3}$ بلا معنى	
	أ. 3 ب. 2 ج. 3 د. 2	
3	3. عبر عما يلي بأبسط صيغة $\frac{X^2-4}{3X-6}$.	
4	4. حلل بصورة كلية $3ax+x$	
5	5. إن حاصل ضرب عاملين هو $2X^2+X-6$ فإذا كان أحدهما $(X+2)$ ، فما هو العامل الآخر؟	

عينة 2 Sample 2 امتحان سريع هندسة مستويات (5 دقائق)

إن قياس زاوية خارجية عند قاعدة مثلث متساوي هو 105° ؛ جد قياس زاوية المثلث. وبين جميع تفاصيل العمل.

عينة 3 Sample 3 امتحان سريع - جبر سنة ثانية (8 دقائق)

لديك المعادلة: $2X^2-3X-7=0$

1. احسب قيمة المميز Discriminant.

2. صف طبيعة جذور المعادلة.

عينة 4 Sample 4 امتحان سريع للصف الثامن Eighth Grade (5 دقائق)

1- ما قيمة 20% من العدد 40؟

2- عبر عن 7% كمرتبة عشرية.

3- ما هي النسبة المئوية التي تكافئ $0.\bar{3}$ ؟

عينة 5 Sample

اختبار هندسي عادي أو تعاوني - متوازي الأضلاع (فترة كاملة)

الاسم: _____

أولا: ضع الإجابة في الفراغ المخصص (5 نقاط لكل منها)

5-1 اشرح ما إذا كان: دائما، بعض الأحيان، ليس صحيحا.

1. أقطار المعين ينصف بعضهما الآخر. _____

2. إذا كان مستقيمان عموديان على نفس المستقيم في المستوى، فإن المستقيمين متوازيان. _____

3. الشكل الرباعي متساوي الأضلاع، متساوي الزوايا. _____

4. إذا كان قطرا الشكل الرباعي متعامدين، فإنه معين. _____

5. الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متكاملة. _____

9-6 اختر أفضل إجابة:

6. الزاوية الخارجية عند قاعدة المثلث متساوي الساقين تكون _____

أ. (حاد) ب. (منفرجة) ج. (قائمة) د. (تعتمد على نوع المثلث)

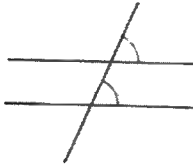
7. إذا كانت قياسات زوايا مثلث بالرموز x , y , $x+y$ فإن: _____أ. (حاد) ب. (منفرج) ج. (قائم) د. (غير معروف-يعتمد على قيمتي x, y)

8. أي مما يلي استخدم في البرهنة على أن الرسم المرفق (لستقيم مواز لستقيم معطى خلال نقطة محددة) كان صحيحا. _____

(أ) من خلال نقطة خارجية ممطة يمكن رسم خط مستقيم واحد // للمستقيم المعطى.

(ب) إذا كان مستقيمان متوازيان، فإن الزوايا المتناظرة تكون متطابقة

(ج) المستقيمان // فإن الزوايا المتناظرة متطابقة.

9. في المثلث ABC، مد الخط المستقيم \overline{BC} خلال النقطة C مكونا $\angle x$. أي مما يأتي ينبغي أن يكون صحيحا؟ _____(أ) $m\angle x > m\angle BCA$ (ب) $m\angle x < m\angle BCA$ (ج) $m\angle x > m\angle LB$ (د) $m\angle x < m\angle B$

10-13 إذا كان دائما صحيحا اكتب "صحيح"، وبالعكس اكتب "خطأ".

10. في مستوى، المستقيمان إما أن يكونان متوازيين أو متقاطعين. _____

11. إذا قسم قطر الشكل الرباعي إلى مثلثين متطابقين، فإن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع. _____

12. منصف الزوايا المتقابلة بالمتوازي الأضلاع متطابقة. _____

13. إذا كان قطرا الشكل الرباعي متطابقان، ومتعامدان، فإن الشكل الرباعي هو مربع. _____

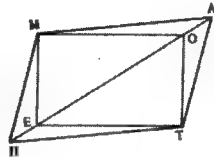
14-16 أعداد

14. جد محيط المثلث الذي نشأ عن ربط نقاط منتصف أضلاع المثلث بالاطوال الآتية: 5، 12، 13.
15. لديك المعين ABCD حيث $AB=5$ و $m\angle ABC = 120^\circ$ ، جد BD.
16. لديك متوازي الأضلاع ABCD حيث $m\angle A=50^\circ$ و $m\angle ABD=75^\circ$ ، جد قياس $m\angle CBD$.

ثانيها: (20 درجة)

الأسباب

القضايا



المعطى: متوازي الأضلاع MOTE

اطو الصفحة واستمر بالبرهان في الجانب الآخر

$$\overline{AE} \cong \overline{HO}$$

برهن: MATH متوازي أضلاع

للحصول على تقدير ودرجات إضافية (اعرض العمل على الجانب الآخر)
برهن: إذا كانت أقطار شبه المنحرف متطابقة، يكون متساوي الساقين.

عينة 6 Sample

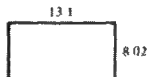
اختبار رياضيات، مقدمة للجبر - الكسور والأعشار (حصة كاملة)

التاريخ:

الاسم:

9. في الكسر $\frac{9}{4}$ ، الرقم 9 هو جزء الكسر الذي يطلق عليه

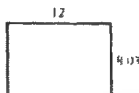
1. جد المساحة:



10. جد الرقم المفقود:

$$\frac{4}{100} = \frac{2}{12} \quad (أ) \quad \frac{2}{12} = \frac{3}{100} \quad (ب)$$

2. جد المحيط:



11. اجمع (قم بتبسيط الجواب):

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \hline \end{array} \quad (ج) \quad \begin{array}{r} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \hline \end{array} \quad (ب) \quad \begin{array}{r} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \hline \end{array} \quad (أ)$$

3. اطح 0.33 من 269.

4. جد نواتج القسمة:

$$0.5 \overline{) 51.510} \quad (ب) \quad 7 \overline{) 14.35} \quad (أ)$$

5. ارسم دائرة حول الكسور المتساوية للكسر الأول في كل مما

يأتي:

$$\frac{?}{4} = \frac{13}{4} \quad (ب) \quad 1\frac{?}{8} = \frac{13}{8} \quad (أ)$$

13. اجمع (وبسط):

$$\begin{array}{r} \frac{7}{10} \\ \frac{9}{10} \\ \hline \end{array} \quad (ب) \quad \begin{array}{r} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \hline \end{array} \quad (أ)$$

$$\begin{array}{r} \frac{20}{40}, \frac{7}{15}, \frac{5}{10}, \frac{4}{8}, \frac{3}{5} \\ \frac{14}{35}, \frac{7}{15}, \frac{8}{20}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9} \end{array}$$

6. بسط ما يأتي:

$$\frac{5}{45} \quad (ج) \quad \frac{8}{56} \quad (ب) \quad \frac{9}{24} \quad (أ)$$

14. غير إلى كسور مركبة:

$$\frac{29}{4} \quad (ب) \quad \frac{38}{5} \quad (أ)$$

15. اكتب كسورا مكافئة بالمضاعف المشترك الأصغر لكل من

الأزواج التالية:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} \\ \hline \end{array} \quad (ب) \quad \begin{array}{r} \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \\ \hline \end{array} \quad (أ)$$

7. استخدم الرمزين < و > بين الأرقام الآتية:

$$\begin{array}{r} \frac{3}{8} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{2}{5} \end{array} \quad (أ) \quad \begin{array}{r} \frac{3}{5} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{1}{2} \end{array} \quad (ب) \quad \begin{array}{r} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} \end{array} \quad (ج)$$

8. ارسم شكلا لتوضيح الكسر $\frac{2}{3}$.

عينة 7 Sample: سنة ثانية جبر- امتحان نصف السنة (80 دقيقة)

اكتب بوضوح

اظهر عملك على ورقة الإجابة

لا تكتب على هذه الورقة

القسم الأول: اجب عن جميع الأسئلة (5 درجات لكل مما يأتي).

1. عبر بدلالة i مجموع 5 و $3\sqrt{-100}$.2. (أ). إذا كان $93.000.000 = 9.3 \times 10^8$ ، جد قيمة n .(ب). إذا كان $0.0000286 = 2.86 \times 10^k$ ، جد قيمة K .

3. بسط ما يأتي:

$$\frac{a-2}{b} - \frac{a^2}{4b^2}$$

4. إذا كان $a = \log x$ ، $b = \log y$ ، $c = \log z$ عبر عن $\log \frac{\sqrt{xy}}{z^3}$ بدلالة a ، b ، c .5. اكتب المعادلة التربيعية التي جذورها $1+i$ و $1-i$.6. استخدم آلة حاسبة لإيجاد قيمة x إذا كان $\log x = 8.4365 - 10$.7. إذا كانت $x = 7$ ، جد قيمة $3x^0 + (x+2)^{1/2} - 49x^{-2}$.8. إذا كان $R = \{(1,2)$ ، $(-1,5)$ ، $(6,2)$ ، $(3,-7)\}$ جد قيمة R^{-1} وبين فيما إذا كانت R ، R^{-1} دوالاً، ولماذا؟.9. حل المعادلة بدلالة x : $3^x = 9^{x-1}$.10. جد قيمة k بحيث أن المعادلة الآتية تكون متساوية الجذور $x^2 - 4x + k = 0$.11. إذا كان $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ، جد قيمة $f(1/2)$.

القسم الثاني: اجب عن (3) أسئلة فقط (15 درجة لكل مما يأتي).

12. جد الجذور مقربة إلى اقرب مرتبة عشرية $2x^2 - 3x - 1 = 0$.13. حل المعادلات الآتية بدلالة a ، b ، c وتأكد من صحة ذلك في المعادلات الثلاثة.

$$a + 3b - 4c = -13$$

$$2a - b + 2c = 4$$

$$4a - 6b + c = -1$$

14. اكتب معادلة أو مجموعة معادلات يمكن استخدامها في حل المسائل الآتية. وبين في كل حالة ماذا تمثل المتغيرات (حل المعادلات ليس مطلوباً)

أ. قارب بخاري يقطع مسافة 8 أميال جنوباً في $\frac{1}{3}$ ساعة، ثم يعود إلى الشمال حيث نقطة بدايته في $\frac{1}{2}$ ساعة. جد (مقدراً بوحدة

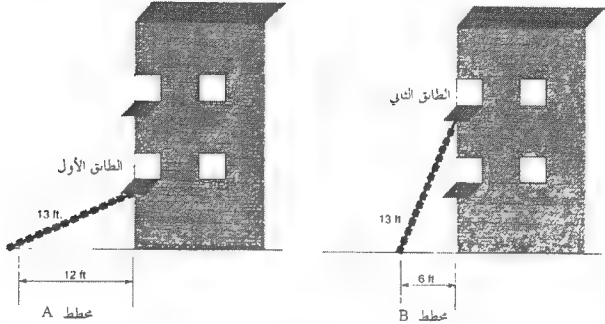
ميل/ساعة) سرعة القارب في الماء الراكد، وسرعة جريان التيار.

ب. عدد يتألف من رقمين هو أقل بـ 2 من 5 أضعاف حاصل جمع رقميه. إذا تم قلب الرقمين، سيكون الرقم الجديد أكبر من الرقم الأصلي بـ 9. جد الرقم الأصلي.

عينه 8 Sample تقييم أداء

مسألة السلم الخشبي Ladder Problem

تم تثبيت سلم خشبي بطول 13 قدم على نهاية فوصل إلى حافة نافذة الطابق الأول (انظر الرسم التخطيطي A أدناه). تبعد قاعدة السلم بـ 12 قدم عن قاعدة البناية. ولكي يصل السلم الخشبي إلى حافة الطابق الثاني من البناية، تم تحريكه بحيث أصبح أكثر قرباً بـ 6 أقدام من البناية (انظر الرسم التخطيطي B أدناه).



جد المسافة التي تحركها السلم إلى أعلى (مقرباً إلى أقرب قدم) من حافة نافذة الطابق الأول إلى حافة نافذة الطابق الثاني. وبين كيفية حصولك على الإجابة. إن عناوين تعليقات الخطوط الحمراء الآتية ستوفر خطوطاً دالة وقائمة معايير يمكن استخدامها في تقييم المسألة أعلاه والتي تركز على الأداء، وسيتم احتساب درجاتها على مقياس بأربعة نقاط، وكما يأتي:

(4) يجد ارتفاع 5 أقدام في الرسم التخطيطي A باستخدام مبرهنة فيثاغورث أو الدوال المثلثية. يجد ارتفاع 11.53 قدم أو 12 قدم في الرسم التخطيطي B باستخدام مبرهنة فيثاغورث أو الدوال المثلثية. يطرح 5 أقدام من 12 قدم للحصول على الإجابة الصحيحة 7 أقدام.

(3) جميع الحسابات صحيحة، لكن الإجابة لم تقرب إلى أقرب قدم أو

ارتكبت خطأ في حساب الارتفاع ولم يجد قيمة الفرق.

(2) توصل بنجاح إلى 5 أقدام بوصفها الارتفاع الأول في الرسم التخطيطي A وبذل جهداً لاستخدام مبرهنة فيثاغورث في إيجاد الارتفاع بالرسم التخطيطي B ولكنه قام بحسابات/تمويض خاطئة.

أو

قام بحساب الارتفاعين المطلوبين باستخدام مبرهنة فيثاغورث أو دوال مثلثية، ولكن باستخدام تمويضات خاطئة.

(1) وجد ارتفاع 5 أقدام كالارتفاع في الرسم التخطيطي A فقط

أو

حاول استخدام مبرهنة فيثاغورث أو الدوال المثلثية لكن التمويضات والإجابة كانت غير سليمة.

الطالب 1 Student

الدرجة 4 :GRADE

يوجد ارتفاع 5 أقدام في الرسم التخطيطي A باستخدام مبرهنة فيثاغورث أو الدوال المثلثية. يوجد ارتفاع 11.53 قدم أو 12 قدم في الرسم التخطيطي B باستخدام مبرهنة فيثاغورث أو الدوال المثلثية.
ي طرح 5 أقدام من 12 قدم للحصول على الإجابة الصحيحة 7 أقدام

الرسم التخطيطي B

باستخدام نظرية فيثاغورث

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 13^2 - 6^2$$

$$b^2 = 169 - 36$$

$$b^2 = 133$$

$$b = \sqrt{133}$$

$$b = 11.53$$

$$b = 12 \text{ قدم}$$

(مقرباً 12 أقرب قدم)

الرسم التخطيطي A

باستخدام نظرية فيثاغورث

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 13^2 - 12^2$$

$$b^2 = 169 - 144$$

$$b^2 = 25$$

$$b = 5 \text{ أقدام}$$

$$12 - 5$$

$$7 \text{ قدم}$$

Student 2 الطالب 2

الدرجة 3 GRADE

جميع الحسابات صحيحة، لكن الإجابة لم تقرب إلى أقرب قدم.

$$C^2 = a^2 + b^2$$

$$13^2 = 12^2 + b^2$$

$$169 = 144 + b^2$$

$$-144 \quad -144$$

$$\sqrt{25} = \sqrt{b^2}$$

$$5 = b$$

$$b = 5'$$

$$C^2 = a^2 + b^2$$

$$13^2 = 6^2 + b^2$$

$$169 = 36 + b^2$$

$$-36 \quad -36$$

$$\sqrt{133} = \sqrt{b^2}$$

$$11.532' = b$$

$$11.532$$

$$- 5$$

$$6.532 \text{ قدم}$$

Student 3 الطالب 3

الدرجة 2 GRADE 2

توصل بنجاح إلى 5 أقدام بوصفها الارتفاع في الرسم التخطيطي A، وبذل جهداً لاستخدام مبرهنة فيثاغورث في إيجاد الارتفاع بالرسم التخطيطي B، ولكنه قام بحسابات / تعويضات خاطئة (66 لقيمة b^2) وقد انتقل هذا الخطأ خلال حل المسألة.

الرسم B

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$6^2 + b^2 = 13^2$$

$$66 + b^2 = 169$$

$$b^2 = 103$$

$$b = \sqrt{103}$$

$$b = 10.14$$

$$b = 10 \text{ قدم}$$

الرسم A

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$12^2 + b^2 = 13^2$$

$$144 + b^2 = 169$$

$$b^2 = 25$$

$$b = 5$$

10 قدم

- 5 قدم

5 قدم

Student 4 الطالب

الدرجة 1 GRADE

يحاول استخدام مبرهنة فيثاغورث أو الدوال المثلثية لكن التعويضات والإجابات كانت خاطئة. اكمل جزءا محددا منها فقط، ولا يوجد حل نهائي.

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 \\12^2 + b^2 &= 13^2 \\144 + b^2 &= 169 \\b^2 &= 25 \\b &= 5\end{aligned}$$

ينبغي أن يؤثر المعلم أوراق الاختبار فوراً، ودون إبطاء. وسيكون استخدام مساعدي الطلبة Student Assistants في تقدير الدرجة ذو خطورة بالغة لأنهم قد يرتكبون أخطاء، مع توفر احتمالية محاباتهم، ومعلمهم إلى أصدقائهم. لذا يمكن اعتماد مساعدي الطلبة، فقط، عندما يمكن إرشادهم ومراقبتهم بعناية.

قد يكون جديراً بالاهتمام (بالنسبة للطلبة) القيام بتكليفهم، بين الحين والآخر، بتمارين محدد أو نشاط مقابل درجات إضافية لغرض تحسين ملكة التفكير النقدي لديهم ولكي يصبحوا أكثر اعتياداً على تعليقات الخطوط الحمراء.

ومن ناحية أخرى، فإن من الأفضل للمعلم تثبيت درجات الامتحانات لكي يكون أكثر قرباً من جهة: تشخيص، وتحديد الأخطاء التي يرتكبها الطلبة، مع ازدياد قدرته على التعامل معها. ووفق المواصفات المثالية، ينبغي أن تثبت درجات الامتحان وتعاد إلى الطلبة في اليوم التالي، بينما لا زالت مادة الاختبار عالقة في أذهان الطلبة. وإذا أعيدت الاختبارات في

سواء كان الامتحان من النوع القصير، أو امتحان نصف السنة طويل، ينبغي اتباع طرق إجرائية محددة خلاله. وفي حالة اختبار الموضوعات والأسئلة، ينبغي على المعلم أن يحاول تضمين عدد من المسائل تشابه تلك التي أنجزت داخل الصف، أو كجزء من الواجب البيتي المحدد، ولكن بأسلوب يسود فيه تحد أكبر. إن الاختبار الذي يمتلك أهمية خاصة لدى الطلبة توازي تلك التي يمتلكها الاختبار الصفي بالفترة الزمنية الكلية للدرس ينبغي أن لا يكون محشووا بالمفاجآت (أسئلة غير متوقعة أو مبتكرة) ولكن ينبغي إعداده بحيث أن الطالب الذي قام بإنجاز واجباته بصورة امينة، ولديه استيعاب مقبول بالموضوع، سوف ينال فرصة مناسبة للنجاح.

يمكن عرض عينة اختبار ومناقشتها في اليوم الذي يسبق الاختبار الحقيقي بحيث يصبح الطلبة أكثر ألفة مع صيغة الاختبار وأسلوبه، ونوع الأسئلة التي ستطرح خلاله. وعليه ستوفر للطلبة فرصة التركيز على المحتوى المفاهيمي والمعرفي في يوم الاختبار.

حد كبير، على الغاية التي اعد الاختبار من اجلها. وبصورة عامة، فإن العلم يسعى من إعداد الاختبار قياس إنجاز الطالب. فتنوع اختبارات إنجاز الطلبة في طيغها من الامتحانات السريعة - المختصرة إلى الأمثلة الشاملة التي تطرح في امتحانات نصف السنة والامتحانات النهائية. قد يعد الامتحان السريع اختبار فهم الطالب بمفهوم ما أو مفهوميين، أو قد يصمم لتحقيق بداية عاجلة لدرس من الدروس، أو لتفحص قدرة الطالب على فهم الواجبات البيتية المحددة، أو بالعمل الذي تلقته خلال اليوم السابق. إن إدارة وتبديل أنواع متعددة للتقييم ستزود المعلم بمواتب ومعلومات إضافية تسهم بدورها في تقدير عمل الطالب وإنجازاته بدقة.

تتضمن الاختبارات الشاملة لإنجازات الطالب، اختبارات الصف بحصة كاملة حول العمل الذي تم تغطيته خلال فترة ممتدة إلى أمد طويل، ولفترة تصل إلى أسبوعين أو أكثر، وامتحانات الوحدة، وامتحانات نصف السنة، والامتحانات النهائية.

يمكن إعداد الامتحانات النهائية بواسطة معلمين فرديين لأغراض الإدارة في صفوفهم الدراسية، أو قد تعد بواسطة لجنة من أعضاء القسم لاستخدامات المنظمة. وبأي حال من الأحوال ينبغي أن تعد الاختبارات بعناية لقياس موضوعات الوحدة، أو الفصل الدراسي، والحد الذي حققه الطالب من الأهداف.

قد يطلب من معلمي الرياضيات، في بعض الأحيان، إعداد أنواع أخرى من الاختبارات. وتستخدم الاختبارات التشخيصية Diagnostic Tests لبيان مقدرة الطالب ومواطن ضعفه في ميدان محدد بالرياضيات، بحيث يستطيع المعلم بناء وتخطيط أنشطة علاجية لمواطن الضعف الموجودة لدى الطلبة. وبرغم وجود عدد لا بأس به من هذه الاختبارات التي أعدت تجارياً للعرض على الحواسيب، فقد يطمح المعلم بإعداد اختبارها / اختبارها الشخصي لقياس جوانب محددة من الخلفية العلمية للطلاب، أو تكمل المعلومات التي قد توفرت من خلال الاختبارات القياسية. ومع ذلك عندما يعد المعلمون اختباراً ما، ينبغي أن يصار إلى توفير مجموعة من الخطوط العامة - الإرشادية لتقييم صلاحية الاختبار بدلالة معيار صدق المحتوى، وموثوقية الاختبار.

ما هو صدق المحتوى؟: What Is Content Validity?

إن المعيار الأساسي للاختبار الصحيح يمكن في قدرته على قياس حصيلته التي تتطابق مع أهدافه التعليمية. إن أي أداة تعمل على قياس ما نتوقع منها قياسه يقال عنها بأنها تمتلك

بداية الفترة، ينبغي أن يكون المعلم متهيئاً لاستعراض الاختبارات خلال جل تلك الفترة (باستثناء الامتحانات السريعة التي قد روجعت مباشرة بعد إعطائها). أما إذا أعيدت أوراق الاختبار في نهاية الحصة، فيمكن تكليف الطلبة بتصحيح أوراقهم في البيت، والتهوؤ للمراجعة داخل الصف في اليوم القادم. وتكمن أهمية إعادة أوراق الاختبار عند نهاية الحصة في تجنب الشغب والهياج الذي قد ينشعب عن إعادتها في البداية، نظراً لأن الطلبة شغوفون بمعرفة الدرجات التي حصل عليها أقرانهم بالمرحلة، أكثر من اهتمامهم بموارد الخطأ في أوراق اختبارهم.

اختيار الأولويات من بين المفردات والمفاهيم التي تم تدريسها

Selecting Priorities Among Topics and Concepts Taught

لا يوجد ثمة اختبار، مهما كان اتساع مدى موضوعاته، يستطيع ضمان اختبار كل صغيرة وكبيرة لدى الطالب. وعندما نتذكر بأن معظم الاختبارات التي تعطى من قبل المعلمين خلال مدة الفصل الدراسي المدرسي، أو خلال السنة تكون محددة بحصة درس منفرد، سوف ندرك بأن الأولويات تشكل مطلباً ضرورياً، وينبغي إرساء حدودها بعناية. لذا ينبغي على المعلم أن يختار، من بين جميع المفردات التي تم تدريسها داخل حلقة الدرس، خلال فترة زمنية محددة، ما ينبغي تضمينه أو استيعاده من دائرة الاختبار. إن هذا الأمر لا يعني بأن الموضوعات الأخيرة والخاتمة لن يتم إدراجها في الاختبار، ولكنها يمكن أن تختبر في الاختبارات الصفية - المستقبلية، وخصوصاً، في أحد الاختبارات التراكمية، وستدرج - بصورة أكيدة - في امتحانات نصف السنة والامتحانات النهائية، سواء كان المعلم متهيئاً أو بالتنسّق من خلال القسم. كما ينبغي على المعلم، كذلك، أن يقرر فيما إذا كان سيرجع بصورة حلزونية إلى الموضوعات التي تم تدريسها في مراحل مبكرة من الفصل الدراسي.

وإذا توفرت إمكانية، ينبغي على المعلمين إعطاء اختبار يستمر لفترة تعادل حصتين دراسيتين. وبهذه الطريقة سيكون الاختبار أكثر شمولاً وتفصيلاً ولن يعاني الطلبة من الحاجة إلى التمتع في إجاباتهم.

أنواع الاختبارات Types of Tests

يعتمد نوع الاختبار المقدم إلى طلبة درس الرياضيات، إلى

الضروري استخدام أكثر من استراتيجية واحدة لحل المسألة، وعليه سيكونون بحاجة إلى ثلاثة أو أربعة دقائق إضافية للإجابة على السؤال. ينبغي على الطلبة عرض أسباب اختيار أفضل إجابة، بصورة موجزة.

- أسئلة الإتمام **Completion Questions**: تقلل هذه الأسئلة عدة جوانب من الحز والتخمين وتتطلب من الطالب تزويد الإجابة الصحيحة لعبارة غير متكاملة.
- أسئلة الماثلة **Matching Questions**: تسمح ببعض التخمين ولكن يمكن التقليل من ذلك عن طريق توفير مزيد من الخيارات في العمود الذي يتم الاختيار من خلاله بالمقارنة مع بقية الأعمدة.
- إن التعاريف العددية والجبرية هي "أسئلة موضوعية" تستخدم لاختبار فهم المبادئ، واستدعاء الصيغ وتطبيقها، وأمور أخرى مماثلة.
- أسئلة المناقشة **Discussion Questions** التي تدعو الطالب إلى مناقشة موضوع ما، وتوضيح مفهوم (تم اختبار محتواه). ويتضمن هذا الأمر توضيح وشرح نظرية، ووصف علاقة بين أكثر من موضوع، والبرهنة على نظرية ما،... الخ.

إن أنواع الأسئلة المذكورة آنفاً (باستثناء النوع الأخير) هي موضوعية بالأساس، أما البراهين الهندسية فتقع في فئة الموضوعات الذاتية Subjective (كما في النوع الأخير من الأسئلة)، والتي تقابل أسئلة الاختبار المقالية Essay Questions في ميادين موضوعات أخرى. وكما هو الحال بالنسبة لأسئلة الاختبار المقالية، يمكن إعداد البرهان بعدة طرق تصح جميعها (يعني) قد يوجد أكثر من إجابة صحيحة لنفس السؤال). وتحتاج هذه الأسئلة إلى استدعاء مسلمات، وتعريف، ونظريات قد برهنتم في مراحل سابقة. وقد تتطلب أيضاً إلى عملية تذكر، لحد ما، نظراً لأن بعض النظريات تمتلك أهمية خاصة بحديث، رغم وجود براهينها في الكتب المنهجية، فإن استدعاء الطالب لتفاصيل برهانها يمتلك أهمية بالغة: إن النظريات الأخرى التي تطلب برامها في الاختبارات توفر قياساً لقدرة الطالب على الاستنتاج والمقايضة العقلية بصورة منطقية ومتسلسلة أكثر من تلك التي يمكن تذكرها دائماً.

إن الأسئلة التي تتطلب إلى استنتاجات متسلسلة Sequential Reasoning عبر عدة أجزاء بحاجة إلى أن تعد بعناية بالغة، ويفضل أن تكون أجزاؤها مستقلة عن بعضها، كلما كان ذلك ممكناً. وبعبارة أخرى، فإن ظهور خطأ مبكر في عمل

صفة "صدق المحتوى". وإذا لم تمتلك إدارة التقييم هدفاً أو غاية ما. فإن من المستحيل تحديد صدق المحتوى وسريان تأثيره.

ما هي موثوقية الاختبار؟ What Is Test Reliability?
إن اصطلاح الموثوقية يستخدم لبيان دقة الاختبار. وتشير الموثوقية إلى درجة توافق الاختبار وملاءمته في قياس ما تريد قياسه. آن بعد آن، وفترة بعد فترة. إن الثبات والرسوخ حول عاملي الزمن والفترة هو المفهوم الأساس الذي تركز إليه الموثوقية.

أنواع الأسئلة Types of Questions
يتم تحديد أنواع الأسئلة المتضمنة في اختبار ما في ضوء جملة من العوامل. والتي تشمل: مستوى قابلية الصف وقدرات طلبته. وطبيعة المادة التي يراد اختبارها، والوقت المتوفر لسملة الاختبار. ونذكر فيما يأتي أمثلة لبعض أنواع الأسئلة التي يشيع وجودها في اختبارات مادة الرياضيات:

- أسئلة صح / خطأ **False-True Questions**: تتضمن هذه الأسئلة قراراً بسيطاً بشكل من الأشكال. وقد يحتاج المعلم إلى تضمين إجابة (خطأ) بتعديل الطالب للعبارة التي عرضت عليه في الاختبار.
- أسئلة: دائماً، في بعض الأحيان، قط **Always-Sometimes-Never Questions**: إن هذه الأسئلة هي عبارة عن تعديل لأسئلة (صح/خطأ) نظراً لكونها تحتاج إلى تحديد فيما إذا كانت القضية تصح دائماً (والتي تؤثر بالإجابة "صح" إذا كانت الصيغة صح/خطأ) أو تكون في بعض الأحيان صحيحة، أو لا تصح قط (إن كل من الخيارين الآخرين تتطلبان الإجابة بـ "خطأ" في اختبارات صح/خطأ). إن القرار الذي يمتاز بخيارين (في النوع السابق) أصبح قراراً يوازن بين ثلاثة خيارات.
- أسئلة الاختيارات المتعددة **Multiple Choices Questions**: تمتاز هذه الأسئلة بروح تحدي أكبر مما هي عليه في النوعين السابقين نظراً لأنها تحتاج إلى اختيار الجواب الصحيح من أربعة أو خمسة إجابات مطروحة في السؤال.

▪ أسئلة الاختيارات المتعددة - المعززة **Enhanced Multiple Choices Questions**: تتطلب من الطلبة إقامة علاقات بين جملة من المفاهيم قبل الوصول إلى الإجابة التي تمثل "الخيار الأفضل". وقد يجد الطلبة من

سيكون فيه خطأ في الجزء (ب) أيضاً. ويمكن تجنب هذه الصعوبة بعكس التقسيم (أ)، (ب) وإعادة صياغة القسم (أ) الجديد بطريقة تزيل اللبس والغموض عن عبارته: (أ) جد طول السلك.

كتابة سؤال جيد وتنظيم الأسئلة

Writing a Good Question and Arranging Questions

إن كتابة إعداد اختبار جيد يعد فناً بلا مراء. فينبغي أن تعد الأسئلة بعناية، وتنظم على ورقة الاختبار لتمكين الطلبة من تحقيق أفضل إنجاز يتناسب مع قدراتهم الشخصية. وقبل المباشرة الفعلية بإعداد أسئلة الامتحان، ينبغي أن يعد المعلم قائمة بالمفردات والمفاهيم التي سيشملها الاختبار، متضمنة معظم الحقائق، والمهارات، والمفاهيم، والمبادئ. ثم يصار إلى إعداد أسئلة واضحة، وجيزة، ومباشرة لكل من هذه المجالات. إن الخطوط الإرشادية المستخدمة في إعداد أسئلة صافية - جيدة تستعمل في كتابة أسئلة الاختبار أيضاً. فعلى سبيل المثال، ينبغي أن تكون أسئلة الاختبار بسيطة في إنشائها، ودقيقة العبارة؛ وإذا تم تضمين جملة مفاهيم في صياغة أسئلة محددة، ينبغي أن تضمن في أقسام منفصلة بكل سؤال. وعلى فقرات الاختبار أن تختبر قدرات الطلبة على التفكير النقدي بالإضافة إلى استادة المعلومات فحسب. وستتغير أنواع الأسئلة في ضوء طبيعة المحتوى المراد اختباره، وقدرات طلبة الصف، لكن الجهود ينبغي أن تنصب على تضمين كل من الأسئلة الموضوعية والأسئلة غير الموضوعية، مثل مسائل وبراهين توظف الآلة الحاسبة الرسومية. ويمكن حفظ أسئلة الامتحانات في ملفات لأغراض الاستخدامات المستقبلية وضمن الملف الشخصي للمعلم، أو في ملفات يحافظ عليها في مكتب قسم الرياضيات. وينصح المعلمون الجدد بعرض اختباراتهم، مسبقاً، على زملائهم ممن يتمتعون بخبرة جيدة، وأو على الاستشاريين الذين يعملون معهم. وبهذه الطريقة يمكن النقاط الهفوات غير المتوقعة، والأفور غير المنتظمة أو المقبولة في الأسئلة، قبل أن تصل الأسئلة إلى أيدي الطلبة.

وقريباً سيتعلم المعلم الجديد كيف أن سؤالاً قد يبدو مباشراً بعميار المعلم، بينما يظهر غامضاً أو ملتبساً لدى الطالب.

مثال EXAMPLE

جد ميل المستقيمات التي معادلاتها كما يأتي:

$$1. y = 3x - 5$$

الطالب سينجم عنه مجموعة أخطاء بحيث يصبح من المستحيل على الطالب استمرار العمل على الأقسام اللاحقة للسؤال. إن المثال الأول - الآتي - يمثل نظرية يتوفر برهانها في جل الكتب المنهجية التي تعالج الهندسة المستوية. ويمكن أن تعد المثال الثاني مثلاً مبتكراً لأنه يقيم تحدياً مع الطلبة لرسم وتأشير رسم تخطيطي، بصورة صحيحة، وإقامة استدلال منطقي سليم. ويتطلب استدعاء إضافي لخصائص مثلثات متماثلة، وتناسبات Proportions، واستعراض مفاهيم نسب التشابه Ratio of Similitude. وأخيراً، فإن السؤال يجمع بين الهندسة، والجبر، والحساب.

مثال EXAMPLE (هندسة) (Geometry)

1. برهن أن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي 180° .

2. في متوازي الأضلاع ABCD، تمثل النقطة M نقطة

منتصف المستقيم \overline{AD} ، وإن المستقيم \overline{BM} يقطع القطر

\overline{AC} في نقطة E.

برهن:

$$(أ). \triangle AEA \sim \triangle BEC$$

$$(ب). (CE)(ME) = (BE)(AE)$$

$$(ج). إذا كان BE = 8، ما هو طول ME؟$$

مثال EXAMPLE (حساب مثلثات) (Trigonometry)

رأية علم ارتفاعها 40 قدم، ثبتت على الأرض بواسطة سلك يمتد من قمة العمود إلى نقطة تبعد 30 قدم عن قاعدته. إذا علمت بأن عمود الزاوية متعامد مع سطح الأرض.

(أ) جد قياس الزاوية بين السلك وسطح الأرض، مقربة إلى اقرب درجة.

(ب) جد طول السلك، مقرباً إلى اقرب قدم.

إن الطالب الذي يستخدم نتائج الفرع (أ) للإجابة عن الفرع (ب)، وباستخدام دوال الجيب والجيب تمام، سوف يحصل على نتائج تختلف إلى حد ما عن النتائج التي يحصل عليها الطالب الذي قام بحل الفرع (ب) بصورة مستقلة وباستخدام مبرهنة فيثاغورث. وبالحقيقة، فإن الطالب الثاني قد يعجب من خاصية "مقربة إلى اقرب قدم" حيث أن النتيجة التي حصل عليها 50 بالتحديد أما الطالب الأول فيقبل هذا التخصيص حيث أنه أمر متوقع ويقوم بتقريب الإجابة إلى 50 أيضاً. ما لم يرتكب/ترتكب خطأ في الحل في القسم (أ) والذي

جملة من العوامل التي تتضمن، الأهمية النسبية، وصعوبة كل سؤال من الأسئلة، والزمن الذي يتوقع استراقه بواسطة التلميذ العادي لحل كل مسألة. وبالنسبة لاختبار الحصة الواحدة Period Test-Single ، فإن الأسئلة التي لا تحوي على عنصر تحدي للطالب تتطلب وقتاً أقل (مثل الأسئلة الموضوعية ذات الطبيعة الحسابية والواقعية، وأسئلة صح/خطأ، وأسئلة دائماً، في بعض الأحيان، قطع) وينبغي أن تحدد لهذه الأسئلة، غالباً، علامات متدنية، ربما ثلاثة إلى خمس نقاط لكل منها. وتستحق أسئلة أملاً الفراغ خمسة إلى ستة نقاط أما الأسئلة التي تستغرق وقتاً أكبر والتي تتضمن مهام تقييم الأداء، والتي يتم تحديد ثقل أهميتها باستخدام تعليقات الخطوط الحمراء فتستأثر بخمسة نقاط وتستحق البراهين الهندسية والمسائل اللغوية خمسة عشر أو حتى عشرين نقطة. وينبغي على المعلم أن يباشر الاختبار بنفسه لفرض التأكد من الوقت الذي يتطلبه حل الأسئلة قبل أن يقدمه لطلبة الصف. إن اختباراً أعد لكي يستغرق الطلبة في إكمال حل أسئلته خلال أربعين دقيقة ينبغي أن لا يستغرق أكثر من عشرة دقائق من وقت المعلم لإكمال حل جميع مسائله.

عرض الاختبار Presenting The Test

قد تكتب الاختبارات على اللوحة، أو يتم إسقاطها على المارسة باستخدام جهاز الإسقاط العلوي الضوئي، أو قد تعد عدة نسخ منها لكل طالب باستخدام جهاز الاستنساخ Duplicating Machine. ويفضل معظم المعلمين الأسلوب الأخير، كلما كان ذلك ممكناً، نظراً لأنها توفر نسخة من أسئلة الاختبار لكل طالب. تقلل الاختبارات المطبوعة (لكنها لا تلغي جميعاً) الأخطاء الفاجعة عن نقل الأسئلة، وقراءة الرموز، وقراءة التوجيهات، واتباع التعليمات، وأمور أخرى قد تنسل خفية. وقد يكتب تمرين الامتحان السريع - المفرد، على اللوحة بصورة دقيقة ويعطى للطلبة بضعة دقائق لكتابة إجاباتهم على صفحة الورق. ويستعمل جهاز الإسقاط العلوي الضوئي، على سبيل المثال، لإسقاط برهان هندسي - جزئي على المارسة، ويمكن أن يكلف الطلبة بإكمالها على صفحة ورقية. ينبغي أن يمارس المعلم التمرين من النسخة الأصلية وقبل توزيعها على الطلبة لكي يدرك الأخطاء الطباعية قبل أن يصاب الطلبة بالإحباط نتيجة لاستمرار محاولاتهم غير المجدية في حل سؤال غير ممكن. ويسري هذا الأمر على الاختبار المكتوب على اللوحة حيث ينبغي قراءة بدقة للتأكد من خلوها من الأخطاء.

$$2x+y=3 \quad \text{ب.}$$

$$y=-7 \quad \text{ج.}$$

$$x=2 \quad \text{د.}$$

يختبر السؤال فهم وإدراك الطالب لدلالة ميول الخطوط المستقيمة من معادلاتها، لكن المستقيم الذي وردت معادلته في الفرع (د) لا يمتلك ميلاً. ومن خلال عبارة السؤال، سيتصور الطالب بأن كل من المستقيمات الواردة في المسألة ينبغي أن يكون لها ميل لذا سيمسح يبحث لا طائل منه، أو يقتض بطريقة خاطئة عن عدد لا وجود له ليضعه مقابل قيمة ميل الفرع (د). إن صياغة عبارة السؤال بصورة دقيقة، ستجنب الطالب هذه المعضلة، فتصبح العبارة الجديدة: "جد ميل كل من المستقيمات التي معادلاتها كما يأتي. وإذا لم يكن هناك ثمة ميل اكتب (لا يوجد)".

ينبغي أن تستمر أسئلة الاختبار متدرجة من البسيط إلى الأكثر تعقيداً. إن هذا التنظيم يساعد على ترسيخ ثقة الطالب، ويشجع الطالب الأكثر ضعفاً على بذل أفضل ما يمكنه من جهد. لأنه يواجه الأسئلة الأبسط أولاً. وقد يتسائل المعلمون في بعض الأحيان، هل إن من الحكمة تزويد الطلبة باختبار الأسئلة في الاختبار. إن الاختبارات توجد بكثرة في الامتحانات النهائية. وبالمخصوص في الامتحانات الموحدة لكافة القسم. وتوفر الاختبارات للطلبة حرية ومدى إضافياً لتعويض الاختلاف في عمق معالجة المفردات والموضوعات المنهجية بواسطة مختلف المعلمين. وفي مثل هذه الحالات ستكون عملية اختيار الأسئلة مناسباً. أما في الاختبارات الصفية، المختصرة لحد ما (تمتد لحصة كاملة أو أقل)، فلا يوصى بعملية الاختبار نظراً لأن الطلبة غالباً ما يضيعون أوقاناً كثيرة في استعراض الأسئلة. فيباضرون بدايات هزيلة، ثم يتركزون أسئلة، فيفقدون وقتاً ثميناً ودرجات يحز الحصول عليها.

تحديد تعليقات العلامات الحمراء مع قيم النقطة لأجزاء من الاختبار

Assigning a Rubric with Point Values to Parts of The Test

ينبغي أن يحدد المعلم درجة لكل سؤال قبل أن يعطي الاختبار لطلبة الصف. ويعمل الطلبة، على الدوام، إلى معرفة كم سيستأثر كل سؤال من الدرجات الكلية للاختبار. وتوفر القيم دليلاً يعتمد على الطلبة في تحديد كيفية تقسيم وقت الامتحان على أسئلة الاختبار. وينبغي أن تحدد قيم العلامات في ضوء

ترك مقاعد شاغر على كل جانب من جوانب الطالب (وكذلك أمامه وخلفه) يبدو بوضوح كإجراء احترازي إزاء الغش أثناء الاختبار. أو، إذا كان أثاث الصف قابل للحركة، يمكن أن يصار إلى إعادة تنظيمه بشكل يضمن انتشار الطلبة بصورة جيدة على رقعة الصف. كما وينبغي بذلك كل الجهود لإبعاد وإزالة موارد الإغواء بعيدا عن الطلبة. وإذا لم تتوفر أمامهم أية فرصة للغش ستكون النتائج حقيقية وتصف بوضوح ودقة قدراتهم وإنجازاتهم العقلية.

يعد بعض المعلمين إلى إعادة ترتيب الأسئلة على ورقة الاختبار بحيث يعرض للطلبة ما قد يبدو لأول وهلة بأنه اختبار مختلف.

إن هذه الاختبارات تستخدم في صفوف Rows متبادلة لتقليل مشاكل الغش، أو في صفوف مدرسية مختلفة، وبغض الموضوع الذي يوافق أوقاتا مختلفة خلال نفس اليوم. إن هذا الإجراء قد يكون مناسباً لفترة ما، ولكن الطلبة يدركون ما يدور حولهم، وبعبارة أخرى يستطيعون التغلب على هذه التقانة وإفراغ مضمونها. إن الأسلوب الأفضل من ذلك، إلى حد ما، وبالمخصوص للصفوف التي تلتقي في أوقات مختلفة ويتم اختبارها بنفس المادة، سححو بالمعلم إلى إعداد صيغ أو نماذج بدلة لكل سؤال، وبغض، إعداد إصدارتين Versions مختلفتين لنفس الاختبار. وستكون الإصدارات المختلفة عادلة، فقط، إلى الحد الذي تكون فيه النماذج البدلة للأسئلة متساوية في الصعوبة، وإن الاختبارات تكون متكافئة بصورة حقيقية. وخلاف ذلك، فإن مصير طالب محدد سوف يميله عليه المقعد الذي سيختاره/ ستختاره، أو الاختبار الذي سيحدد داخل الصف.

اليقظة خلال المراقبة

Alertness During Proctoring

رغم جميع الإجراءات الاحترازية المتخذة لأغراض كف عملية الغش أو الحد منها، فإنه لن يسلم حتى أكثر المعلمين خبرة ودراية، ومهارة من مواجهة مشكلة الغش في بعض الأحيان. ويفترض أن ينبه طلبة الصف، عند بداية مدة الاختبار، بالانتشال بإنجاز حلولهم، وإبقاء أنظارهم على الأوراق التي تستقر بين أيديهم. وفي حالة إن هذا التنبيه قد حصل فعلاً، فما هو طبيعة الإجراء الذي سيتخذه المعلم عند حصول انتهاك لهذا الأمر أثناء الاختبار؟

إن جل المعلمين الذي يلاحظون محاولات للغش في الاختبار، غالباً ما يتحدثون بهدوء مع الذنب أولاً. حيث يتم

إدارة الاختبار Administering A Test

إن الهاجس الرئيسي لدى المعلم عند إدارة اختبار الصف ينبغي أن يتوجه صوب توفير الظروف المثلى، بحيث تتوفر للطلبة أفضل فرصة متاحة لبيان معرفتهم. ولتحقيق هذا الهدف المقصود، يمكن للمعلم أن يتبع عدداً من المبادئ البسيطة في عرض اختبار الصف.

بدائل للإدارة Alternatives for Administration

ينبغي أن يبتدئ كل اختبار فوراً من غير إبطاء بحيث يتوفر للطلاب كامل وقت الاختبار المخصص للمعلم على الأسئلة المروضة. وإن البداية المتأخرة، مهما كان سبب تأخيرها، تؤدي إلى إقلاق الطالب وحرماته من استغلال كامل الوقت المخصص. وسواء كتب الاختبار على اللوحة بواسطة المعلم (وهو إجراء بطيء وغير مرغوب فيه)، أو تم توزيعه على جميع الطلبة في صحائف مستنسخة للطلبة، ينبغي أن تكون الأسئلة متوفرة بين يدي الطلبة بعد فترة قصيرة من ابتداء الحصة المخصصة. إن هذا التوزيع الفوري لأسئلة الاختبار يمتلك أهمية خاصة إذا كان قد خصصت للاختبار فترة زمنية كاملة، نظراً لأن الوقت الذي سيضيق في بداية المدة قد يصعب استعادته فيما بعد.

ينبغي أن يتخذ المعلم قراراً فيما إذا كان على الطلبة الإجابة على الأسئلة أو العمل على المسائل مباشرة على ورقة الأسئلة في الفراغات الهيئة لذلك، أو على ورقة مستقلة. كما ينبغي أن يوفر فراغ مناسب للطلبة لحل المسائل وكتابة الإجابات، وإذا كان هناك ثمة نموذج محدد لصحائف الإجابات، و إذا كان على الطلبة إعداد هذه الصحائف بأنفسهم. ينبغي أخذ الوقت المستغرق في إعدادها بعين الاعتبار عند إعداد الاختبار. كذلك، ينبغي إخبار الطلبة، مسبقاً، في حالة وجود حاجة إلى أية أداة خاصة يتوقع منهم إحضارها إلى الاختبار، مثل المساطر، والفرجار، والآلات الحاسبة، أو أوراق الخطوط البيانية Graph Papers.

تنظيم الصف Classroom Arrangement

يهتم المعلمون، غالباً، بمشكلة الحصول على نتائج صادقة عند إعطاء الاختبارات. إن الطلبة الذين ليس لديهم ثقة كافية بالنفس، أو الذين يمتلكون فعلياً معرفة محدودة جداً بالمادة التي يتم اختبارها، سوف يساقون إلى مقاييس متهورة وطائشة. وإن من الأفضل، بالطبع، بالنسبة إلى المعلم أن يتوقع مثل هذه المشاكل، ويحاول منع حدوثها بدلاً من التعامل معها بعد أن تصبح حقيقة واقعة. فإذا كان الصف واسعاً جداً، وتتوفر مقاعد شاغرة فيه، يمكن تفريق الطلبة الواحد عن الآخر. أن

سوف تكون بأن أفضل الطلبة هم الوحيدون الذي سيتوفر لديهم وقت كاف للمحاولة في حل هذه المسائل أو إكمال حلولها بصورة صحيحة. وبأي حال من الأحوال، فإن الطلبة يستحقون الحصول على علامات إضافية، أو أية إمكانية بمنح العلامات، والتي يعدها المعلم مناسبة للمسائل الإضافية التي ينجحون في حلها. يفترض بالمتكافآت التشجيعية لمثل هذه العلامات أن تتضمن درجات عالية في نهاية فترات التقدير، أو عند نهاية الفصل الدراسي.

المتغيبون Absentees

إن مشكلة التعامل مع الطلبة الذين يتغيبون عن الاختبار تعد مسألة مزمنة وتفتقر إلى حل مباشر أو مقبول. إن أفضل نصيحة للمعلمين المبتدئين هي ضرورة تقدير كل حالة بحسب ظروفها وملابساتها، ومناقشة الموقف مع الاستشاري. ويمكن الشيء الأساسي في أن تكون عادلاً ومنصفاً مع جميع الطلبة المتغيبين.

تقدير درجة الاختبار Grading A Test

تعتبر مهمة تقدير درجات الاختبار مضحية للوقت، ولكنها أهم مهمة للمعلم. ولا تعني الاختبارات أنها تقوم لعمل الطالب. ولكنها أيضاً لتقوم بعمل المعلم ذاته. ويستطيع المعلم قياس فعالية تعليمه من خلال دراسة أساليب حلول الطلبة وتحليل أخطائهم. وسيواجه المعلم، أثناء تصحيحه الاختبار، عدداً من المواقف القريبة من بينها سوء فهم الطلبة.

تحديد علامة جزئية Assigning Partial Credit

إن منح جزء من العلامة بدلاً من علامة كاملة لجواب الطالب الذي يظهر جزءاً، وليس فهماً كاملاً في طريقة الوصول إلى ذلك الجواب، هو أمر لا مñas منه. كذلك، فإن الطالب الذي يرتكب، بصورة واضحة، خطأ هيناً يستحق معظم العلامة التي تستحقها المسألة. تمتاز كثير من الأسئلة، بالطبع، بخصائص تحول دون إمكانية تطبيق مبدأ تحديد جزء من العلامة المخصصة للإجابة. وتتضمن هذه الفئة، أسئلة صح/خطأ، وأسئلة دائماً، بعض الأحيان، وقط، والأسئلة الواقعية Factual Questions (مثال، اكتب الصيغة التريبية). من جهة أخرى، تتضمن الأسئلة المطولة حجماً كبيراً من الحسابات المتسلسلة (والتي قد يخطئ الطالب في إحدى خطواتها بحيث يسري الخطأ إلى النتيجة النهائية) وتستحق هذه الحالات جزءاً من العلامة. تعد البراهين الهندسية بدرجة كافية من الدقة، وبأخطاء

تنبيه الطالب، دون إحداث ثورة غضب قد تؤدي إلى إقلاق بقية الطلبة وهم يحاولون التركيز على فهم المسائل ومباشرة حلها: وخصوصاً عندما يتم تغيير مقعد الطالب المذكور.

وينبغي أن يثبت المعلم ملاحظة على ورقة اختبار الطالب موضحاً في أي نقطة من الاختبار تم حصول الغش، بصورة افتراضية. وإن الخطوات التي تلي تلك النقطة تعد خاصة بإنجاز الطالب (إذا لم تلاحظ محاولات أخرى للغش). كما ينبغي أن يقرر كل معلم عقاباً وجزاء صارماً على الغش، ويبدو بأن الاستئناس بمشورة الاستشاري بهذا الخصوص أمراً مفيداً.

إن الخبرة ستعين المعلم على صياغة نتائج/نتائجها والممارسات التي سيتخذها إزاء هذه المشكلة وصل هذه العوامل بوصفها تغيير في الظروف والملابسات. إن اكتشاف الغش بعد انتهاء مراسيم الاختبار، وأثناء تحديد درجات أوراق الاختبار، يعد مسألة مختلفة وتمتاز بصعوبة ملحوظة عند التعامل معها. فالأخطاء المتماثلة التي تظهر على أوراق الاختبار الطلبة الذين جلسوا على مقاعد متقاربة خلال الاختبار قد تفرح غشاً البقطة من جانب المعلم. إن الاتهامات عند هذه النقطة قد تؤدي إلى ما هو أكبر من إقامة أساسيات سيئة، وسيترك الطلبة الفعل الخاطئ. وقد يكون أحد الطلاب بريئاً بالواقع! فقد يلجأ أحد الطلبة إلى نسخ إجابة زميله دون أن يكون الثاني عارفاً بهذه المخالفة. ويلجأ بعض المعلمين إلى إعادة اختبار العناصر التي تدور حولها شكوكه، بيد أن الكثير يفضل اللجوء إلى تقليل درجات الطلبة المشتركين بهذا الأمر، وتوجيه ملاحظة عقلية إلى نفوسهم لكي يصبحوا أكثر يقظة في المرات القادمة. وسيتلقن المعلم من الخبرة كما يتعلم الطالب، سواء كانت الخبرة إيجابية أو لم تكن كذلك.

المنجزون مبكراً Early Finishers

ينبغي أن يعد الاختبار بحيث يتطلب الوقت المخطط لإكماله بواسطة جميع طلبة الصف، ودون استثناء. وإذا أنهى عدد كبير من الطلبة الاختبار بصورة مبكرة، فيعد هذا الأمر مؤشراً على قصر الاختبار. بصورة عامة، يلاحظ وجود بضعة طلاب في كل صف ينجزون عملهم أسرع بكثير من زملائهم في الصف، وسيتسبب، نتيجة لهذه الظاهرة، انتهاءهم من الاختبار قبل مرور كثير من الوقت. ويمكن أن يصار إلى مشاغل هؤلاء الطلبة باستمرار عبر مسائل إضافية - اختيارية، أو مسائل متقدمة للحصول على علامات عالية ومميزة بينما يتاح لأقرانهم من طلاب الصف إكمال الجزء المطلوب من أسئلة الاختبار. كما ينبغي أن تتوفر هذه المسائل لجميع الطلبة ولكن الأرجحية

إجابة الطالب :

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin (45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

في هذه الحالة يستحق الطالب جزءاً من العلامة بلا ريب، رغم أنه قد أربك النماذج نصف القطرية لقيم الدوال المثلثية . إن استحقاق العلامة يعود إلى إدراك الطالب بأن $\sin 75^\circ$ يمكن أن تعاد كتابته بوصفه جيب مجموع الزاويتين $45^\circ, 30^\circ$ ، ولمعرفته بأسلوب فتح الصيغة $\sin (A+B)$ ، ولمعرفته بأسلوب ضرب الكسور وجمعها بصورة صحيحة، ولو أن هذه الكسور كانت غير صحيحة. وعليه، فإنه لو استحق السؤال عشرة درجات، يمكن أن يمنح علامة بستة درجات.

في الهندسة، يطالب التلاميذ بكتابة برهان النظريات في الامتحانات، لذا ينبغي على المعلم، بدايةً، أن يلقى نظرة عجلية على سائر البرهان لتحديد هل ان محتواه يحمل مفهوماً معقولاً. يتركب كثير من الطلبة أخطاءً في بعض العبارات والقضايا، وأو التعليل الواردة في الفرضيات والنظريات. وإذا كانت الأخطاء كثيرة ومتعددة، وكانت الاستنتاجات هزيلة وتكسر تدني الفهم من جانب الطالب، بعدها لن يستحق الطالب أية علامة على البرهان الهندسي. ولكن إذا كانت إجابة الطالب تعكس معرفة جيدة بالموضوع، ولكن مع وجود أخطاء يسيرة، أو قد لا تكون خطوات الحل متصلة بصورة صحيحة، وفي مثل هذه الحالة يستحق الطالب تقديرًا وعلامات جزئية على الحل. بصورة عامة، فإن الخطأ الميكانيكي البسيط يمكن أن يعاقب عليه إلى حد حسم 10%، بينما تتراوح نسبة الأخطاء الأساسية في الجزء النظري بين 30-50% من قيمة العلامة المخصصة للسؤال، واعتماداً على أهميتها. إن هذه الأمور لا تزيد عن كونها خطوط إرشادية عامة، وإن المعلم / المعلمة الجديد سوف يلجأ إلى تغييرها إلى ضوء تراكم الخبرة لديه بمرور الوقت.

هل يمكن لجواب خاطئ أن لا ينتج عن حسم علامات؟
Can a Wrong Answer Not Result in a Deduction?

غالباً ما يحصل الطالب على إجابات غير صحيحة لمسألة

ضئيلة قد يرتكبها الطالب في بعض الأحيان، وتستحق هذا الأمور إدراكاً واضحاً لأسلوب منح العلامة لحلول الطلبة في هذا المضمار. إن الخبرة المتراكمة مع مرور الوقت، واستشارة الآخرين ستسهم في مساعدة المعلم المبتدئ على صياغة سياسات واضحة المعالم لنح جزء من العلامة، والسعي إلى تعديلها بحسب ما تتطلبه الحالات المختلفة.

يوجد لدى الطلبة الكثير من الخطوات الصحيحة ذات الصلة بتمرين الاختبار، لكن هفوة غير مقصودة على طريق الحل قد تؤدي إلى الحصول على إجابة غير صحيحة. وعلى النقيض من ذلك، فإن بعض الطلبة قد يكون لديهم التقليل من الخطوات الصحيحة لحل تمرين محدد، لكنهم قد يصلون إلى الإجابة النهائية الصحيحة!

تأمل الأمثلة الآتية:

مثال (الجبر الأولي) Elementary Algebra

تبسيط الكسر.

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

الإجراء الصحيح.

$$\frac{(x+5)(x-5)}{x-5} = x+5$$

الإجراء الخاطئ للطالب:

$$\frac{x+5}{x-5}$$

بهذا الإجراء، حصل الطالب على إجابة صحيحة عن طريق إجراء شنيع Outrageous. ورغم أن هذه الطريقة قد أعطت إجابة صحيحة، لكنها تظهر بوضوح غياب فهم تحليل ثنائي الحد، أو اختصار الكسور الجبرية لدى الطالب الذي استخدمها في حله للمسألة، لذا فإنه لا يستحق أي علامة مهما كان نوعها. إن المنهج الاعتيادي في تقدير الدرجة ومنحها، يعتمد على رؤية المعلم للجواب، دون الطريقة المستخدمة للوصول إليه، ثم منح الدرجة!

مثال (حساب مثلثات Trigonometry) مثال (حساب مثلثات Trigonometry)
جد قيمة جيب الزاوية 75° في الصيغة الجذرية Radical.

عن ماذا نبحث ونتطلع عند تحديد درجات اختبار

What to look for in grading a test

ينبغي أن يبذل المعلم كل ما يستطيع بذله من جهود لتقدير درجات كل ورقة اختبار بعناية بالغة ودون أي تحيز. وعندما يعدد الطلبة إلى مقارنة أوراق الاختبار ذات الدرجات بأوراق اختبار أقرانهم وزملائهم في الصف، سحابون بانزعاج إذا حصل لديهم اعتقاد بأنه لم تتم معاملتهم بصورة عادلة أسوة بزملائهم، كذلك قد يلجأون إلى مقارنة أوراقهم مع أوراق اختباراتهم السابقة أثناء الفصل الدراسي لمعرفة مدى تقدمهم. عموماً، فإن المعلم سيقوم بفحص أوراق الاختبار لتحديد مدى فهم المفاهيم - التي تم اختبارها - مدى قدرات الطلبة على الاستدلال المنطقي، والاستنتاج التسلسلي، وقابليتهم على حل المسائل وقدراتهم على إنجاز الحسابات العددية والطرق الإجرائية الجبرية بصورة صحيحة ودقيقة. وأثناء تحديد درجات أوراق الاختبار، يكتشف المعلم أكثر الأخطاء الشائعة التي يرتكبها الطلبة فتتوفر لديه فرصة مناسبة لإعداد خطط علاجية، أو أنشطة إعادة تعلم. ينبغي استكشاف هذه الأخطاء بعناية مع الصف، لتقليل أرجحية تكرار الطلبة لها في اختبار لاحق. بالحقيقة، إن عموم الاختبار ينبغي مراجعته مع الصف بعد إعادة أوراقه للطلبة، مصححة وقد حددت علاماتها. وتتم عملية المراجعة عن طريق إدراج الطلبة لحلولهم الشخصية لكل مسألة من المسائل على اللوحة ثم مباشرة توضيح وبيان الطرق الإجرائية المعتمدة في الحل لزملائهم بالصف، والإجابة على الأسئلة التي يطرحها عليهم زملائهم خلال المناقشة. وعندما يكون الوقت عاملاً مهماً، يمكن إكمال المراجعة بواسطة المعلم عن طريق توزيع نسخا مصورة من الصحائف التي تحوي الحلول الصحيحة للأسئلة لجميع الطلبة، ثم مباشرة الإجابة على استفسارات الطلبة وأسئلتهم التي تدور حول طرق الحل، شريطة أن يتوفر لهم وقت كاف لدراسة هذه الحلول عن كثب. ورغم أن هذه الطريقة توفر جزءاً لا بأس به من الوقت، فإنها تسهم في تقليل حجم مساهمة الطالب في عمليتي المراجعة والتعلم. إن هذا الأسلوب يصلح في إجراء مراجعة شاملة للأسئلة من قبل الصف بأكمله. وتتميز المجاميع الصغيرة بأنها أكثر فاعلية عند مراجعة الدروس بالمقارنة مع المجاميع الكبيرة، نظراً لأن فرصة كافية ستتوفر للطلبة في: مناقشة، وتأمل، وتصحيح أخطائهم في هذا الأسلوب من التنظيم، وبالمقارنة مع مجاميع أكبر قد تشمل الصف بأكمله. وفي كل حالة من هذه الحالات ينبغي على المعلم إعداد صحيفة الإجابات لإرشاد

ما رغم استخدامه لطرق إجرائية صحيحة وعدم ارتكابه لأخطاء ميكانيكية. كيف يكون هذا الأمر ممكناً؟ إن الأمر بالغ البساطة. فالطالب يعمل على مسألة تتضمن استدلالاً متسلسلاً وعدة خطوات، تعتمد بعضها على الإجابات التي تم الحصول عليها في خطوات مبكرة. ينبغي أن يحاسب الطالب على الخطأ /الأخطاء الأصلية فقط. ويجب عدم تكرار حسم العلامات لرتين أو أكثر بسبب الخطأ الأولي.

مثال (حساب المثلثات Trigonometry) EXAMPLE

في المثلث ABC، $\angle C$ هي زاوية قائمة، وقياس $m\angle A = 37^\circ$ وطول قطعة $BC = 6$. جد، مقرباً إلى اقرب عدد صحيح، AC و AB.

إجابة الطالب:



$$\begin{aligned} \tan 37^\circ &= \frac{6}{x} \\ 0.6018 &= \frac{6}{x} \\ x &= 10 \text{ مقرباً إلى اقرب رقم صحيح} \end{aligned}$$

خطأ Error: قام الطالب بقراءة الجدول، أو غلط مفتاح الآلة الحاسبة بصورة خاطئة - فحصل على قيمة $\sin 37^\circ$ بدلا من $\tan 37^\circ$. فيظن الطالب / الطالبة بأنه قد وجد قيمة AC، لكنه بالحقيقة قد حصل على طول قطعة المستقيم AB. وإذا حاولت الآن إيجاد قيمة AB بواسطة مبرهنة فيثاغورث، ستحصل على الجواب 12، مقرباً إلى اقرب عدد صحيح، وبذلك تكون قد ارتكبت ما يعرف بالـ "الخطأ المترابط Consistent Error" لذا سيكون هناك حسم واحد، نظراً لأنه هناك خطأ واحد ولا شيء سواه.

إن ترتيب الإجابات في مراحل مبكرة من حل المسألة قد يؤدي إلى كثير من الأخطاء لاحقاً في نفس المسألة. لذا ينبغي صياغة المسائل بحيث تقلل تأثيرات هذه الطرق الإجرائية إلى حدودها الدنيا. كذلك فإن تبني طرقاً وأساليب بديلة في الحل (مثال. استخدم مبرهنة فيثاغورث أو استخدم مثلثات المثلث قائم الزاوية لإيجاد أطوال أضلاع، أو وتر المثلث) قد ينتج عنه نتائج مختلفة جزئياً، وإذا أريد استخدام هذه النتائج في أجزاء تليها من المسألة ذاتها، فقد تظهر مشاكل ملموسة بالحل. لذا ينبغي أن يكون المعلم منتبهاً لمثل هذه الاحتمالات.

جدا، أو غير واضحة، أو تورث التباسا، أو تكون عرضة لسوء التفسير نتيجة لاستخدام اصطلاحات وعبارات هزيلة، أو قد تكون غير منصفة في ضوء تحديد العلامة المناسبة.

يعين تحليل الاختبار المعلم، أيضاً، على تحديد المقدرات والموضوعات التي كانت بمثابة عن إيفهامهم.

يتألف تحليل الفقرات من تحليل سؤال- بعد - سؤال لإجابات الطالب، وغالبا ما يؤدي إلى الخروج باستنتاج يخص صلاحية سؤال محدد وأهميته بالنسبة للاختبار ومن يمتلكون قدرات وقابليات متميزة.

والسؤال الجيد عبارة عن معزز ذي فاعلية بين الطلبة ذوي القدرات العالية والقدرات المتدنية.

اختبارات الاختيارات المتعددة

Multiple Choice Tests

مع الازدياد المستمر - ودون هواة - في أعداد الحواسيب في المدارس ازداد التوجه نحو الاختبارات ذات الإجابات القصيرة والمختصرة، في حين كانت تجتنب هذه الأسئلة في سنين خلت. إن أكثر الاختبارات شيوعا هو اختبار الاختيارات (أو الإجابات) المتعددة. وبعد استخدام الحاسوب (في هذا الأسلوب من الأسئلة) مناسباً جداً، نظرا لأن المصيب Respondent يقدم إجابات لا تزيد كل منها على حرف واحد فقط ولجعل مثل هذا الامتحان مؤثرا ونو فاعلية ملموسة، ينبغي بذل عناية خاصة في إعداد هذه الأدوات وتفسيرها.

عند كتابة فقرات الاختبار، ينبغي أن يكون المعلم متيقظا (على الدوام) لضمان خلوها من الإيهام واللبس. وإذا كان هناك فرصة كافية من الوقت، فمن الحكمة كتابة الاختبار وتركه جانبا ليضمة أيام، وستظهر القراءة الثانية للقارئ (بعد مرور فترة كافية من الوقت)، غالبا، وجود التباسات محتملة. إن كتابة فترة الاختيارات المتعددة ليست أمرا بسيطا، كما يعتقد البعض، لأن الجزء، الأهم من فاعليتها يرتكز إلى قدرة الكاتب على صياغة "مركبات" جيدة - إجابات غير صحيحة. وسيكون لزاما على معد الاختبار محاولة توقع طبيعة، وأنواع الأخطاء التي قد يرتكبها الطالب عند كل فترة واشتقاق هذه المركبات من بين هذه الإجراءات الخاطئة.

بصورة طبيعية، إذا كان لدى أحدنا وقتا كافيا، آنذاك ينبغي تحليل كل فترة بمفردها قبل أن توزع أوراق الاختبار. لكن هذه الطريقة تتطلب إدارة الاختبار لمجموعة مثالية من

المجاميع أثناء مراجعاتهم. كذلك يجب على المعلم أن يكون متأهبا للإجابة على أسئلة إضافية، أو اقتراح تعليقات إضافية، إن ظهرت الحاجة لذلك.

تفسير نتائج الاختبار

Interpreting Test Results

بعد إعطاء الاختبار للصف، وتقدير درجاته، ومراجعتهم مع الطلبة، يصبح لزاما على المعلم فحص الاختبار عن كثب لتفسير النتائج المستحصلة منه. بعدها يستطيع المعلم تخطيط التعليم للوحدات المقبلة بعناية أكبر، ويخطط للأساليب الضرورية للعلاج، أو إعادة تعليم كامل مفردات مادة محددة، ويخطط لإعداد أفضل للاختبار القادم إذا كان الاختبار الحالي يحوي على مفاجآت، أو قد سبب مشاكل غير متوقعة (سوء فهم الطلبة لمضمون الأسئلة، أو عدم توفر وقت كاف لإكمال حل المسائل، ... الخ).

ما هي دلالة نتائج الاختبار

What the Test Results Indicate

تعد الاختبارات أدوات للقياس، وعليه فإنها تدل على درجة فهم الطالب للمادة قيد الاختبار. وتتوفر في الاختبار إمكانية قياس مقدار ما يستوعبه الطلبة من المبادئ التي يتلقونها أثناء الدرس، وقدراتهم على تطبيق المبادئ والمفاهيم في حل مسائل بموضوعات مختلفة، وكذلك يعد مؤشرا على أداء الواجبات اليومية المحددة التي انيطت بهم. كذلك يوفر الاختبار معلومات عن المعلم / المعلمة والاستراتيجيات التي يتبناها أثناء تعليمه للطلبة. وغالبا ما تعكس درجة فهم الطلبة للمعلم. ويبدو بأن المعلم الجديد الذي يشعر بإحباط وقلق بالغ بسبب عدم أداء الطلبة وفق الحدود المقبولة هو عادة الذي سينتهي به الأمر بأن يكون معلما جيدا، ويبحث وينقب باستمرار عن وسائل إضافية لتحسين تقانات تعليمه للارتقاء بتعلم الطلبة ويعمق فهمهم.

تحليل فقرات منفردة أو أجزاء من الاختبار

Analyzing Individual Items or Parts of a Test

إن تحليل الاختبار الذي قد تم تحديده هي تقانة بالغة الفائدة لتحسين وتطوير أعداد الاختبارات. فهو يساعد المعلم على تحديد الأسئلة التي كانت تعاني من بساطة شديدة، أو صعوبة بالغة بالنسبة لعموم الطلبة، ولكنها كانت مناسبة بوصفها أسئلة متميزة، أو أسئلة لتحعلامات إضافية، أو بالغة الصعوبة على جميع الطلبة، أو مختصرة جدا، أو مسهبة

ثلاثية المعلم - الطالب - الأيوبين. سيحاول المعلم تقديم وعرض دروس مناسبة، ويعطي امتحانات عادلة ومنصفة، ويحدد مهام ومشاريع معقولة ومناسبة، وهكذا. وينبغي على الطالب أن يقيم ملتزمًا بمهام محددة لكي ينال النجاح. ولكن ماذا ينبغي على الطالب فعله بالضبط؟ إن بعض هذه المسؤوليات تتضمن الآتي:

1. الواجبات البيتية المحددة Homework Assignments

يكون الطالب مسؤولاً عن:

- الحصول على الواجبات المحددة بصورة صحيحة.
- متابعة التعليمات في أمثلة الواجب البيتية.
- العمل بجد وإتقان.
- إنجاز كل واجب محدد بصورة تامة.
- هـ. بذل الوسع في الحصول على مساعدة، إن ظهرت الحاجة لذلك.
- و. إنجاز الواجبات المحددة حتى في الأيام التي يقفون فيها.
- ز. مراجعة الواجبات اليومية المنجزة بصورة دورية (في ضوء الحاجة لذلك).

2. للمشاركة الصفية Classroom Participation

يحتاج الطلبة إلى:

- أن يكونوا متاهبين بسرعة في بداية الدرس.
- ب. لديهم جميع المعدات الضرورية: دفتر الملاحظات، أقلام،...
- ج. محاولة التركيز على المادة التي تدور النقاشات حولها.
- د. طرح أسئلة تتعلق بدروس اليوم.
- هـ. الإصتص إلى أسئلة الغير وإجاباتهم.
- و. أن يكونوا مشاركون فاعلين في جميع مناقشات المصامع والصف.
- ز. التطوع بأداء الواجبات على اللوحة أو الإجابة على الأسئلة وهم جلوس على مقاعد.

3. الاختبارات Tests

يمكن رفع وتحسين نتائج الاختبارات إذا كان الطلبة:

- أ. يستعرضون المواد بصورة كافية بصورة مسبقة، بحيث يستطيعون أداء فعل غير متمجل وشامل، خلال الاختبار، لعكس قدراتهم الحقيقية.
- ب. قراءة أقسام مناسبة وتصارين نموذجية في الكتب المنهجية.
- ج. يؤمنون بقدراتهم ويتذكرون دائماً بأن الدرجة النهائية سوف تحسب على أساس جميع نشاط الفصل وليس على أساس اختبار واحد.

الطلبة: وتحليل مدى تأثير كل فترة بوصفها صفة مميزة بين تحقيق النقاط: العليا، والمتوسطة، والدنيا. وتمد الفترة فعالة إذا كان الحاصلون على أعلى النقاط هم الذين أجابوا عليها بصورة صحيحة، وإن الحاصلين على أقل النقاط لم يحسنوا ذلك. وغالباً، لا يكون تحليل الفترة عملياً في اختبارات الصفوف العادية، نظراً لأن إدارة الاختبار مرتين يكون أمراً مستحيلاً. أما بالنسبة لاختبارات معظم المدارس، فإن مثل هذا الإجراء قد يبدو أكثر قبولاً، وخصوصاً إذا كان الاختبار يستخدم في أكثر من فصل دراسي واحد.

يبدو السؤال المطروح حول كفاءة تحديد نقاط اختبار بخيارات متعددة، في بعض الأحيان، مصدراً لإثارة مزيد من الجدول والخلاف. فيدعي بعض التربويين بأن عدد الفقرات التي تمت الإجابة عليها بصورة صحيحة تعد الأساس الذي ترتكز إليه عملية تحديد نقاط الاختبار، بينما يذهب آخرون بأن اختبار الخيارات المتعددة ينبغي "أن يصحح من أجل التخمين والحزب Corrected for Guessing". أي أن عملية تحديد نقاط الاختبار (الدرجة الخام Raw Score) ينبغي الحصول عليها من الصيغة:

$$R - \frac{W}{n-1} = \text{مجموع الدرجات الخام (الأولية)}$$

حيث أن R تمثل عدد الفقرات الصحيحة، W عدد الفقرات الخاطئة، و n عدد الخيارات التي تم توفيرها لكل فترة. إن عدد الفقرات المهملة لا يحمل تأثيراً مباشراً على الحسابات.

رغم سهولة تحديد درجات اختبارات الخيارات المتعددة (وبالخصوص مع المساعدة التي يوفرها الحاسوب) عند إعدادها بصورة صحيحة، فإن الصعوبة تكمن في إعدادها نظراً لأن هناك أمور بحاجة إلى عناية وتنظيم أكثر من إعداد السؤال بذاته، وإن البحث عن مادة جيدة تؤثر الطلبة التباساً عند اختبار الإجابة الصحيحة من بين الخيارات المطروحة وهو أمر بالغ الصعوبة وبيتلغ الوقت ابتلاعاً.

مسؤوليات الطالب Student Responsibilities

إن الانضباط الذي يؤسس مفهوم أن اجتياز الفصل الدراسي أو الفصل فيه يعتمد فقط على معدل درجات الاختبار، أو على مداومة الحضور في الصف، ينبغي أن يصار إلى تغييره بحيث يدرك الطالب بأن ما ذكر لا يعدو عن كونهما عاملين من جملة عوامل تساعد على تحديد الدرجة النهائية. إن الجهود التي تضمن النجاح للطلاب في فصل دراسي هي حيلة تكامل

على إرشاد وتوجيه الطالب في العملية التعليمية، كما قد تدرب لإجتياز ذلك. ويمسك الأبوان باليد الأخرى، وهما اللذان يلتزمان أخلاقيا، وشرعا بإرشاد وتوجيه تعليم ولدهما بأفضل ما يستطيعان من بذل جهود ورعاية.

وعليه، فإن الأبوين يشاركان في المسؤولية التي تخص أداء الطالب في الصف. ورغم أن مسؤولية الأبوين قد تكون قليلة، وتختلف لحد ما عن المسؤوليات الملقاة على عاتق الطالب، وعاتق المعلم، لكنها لا تقل أهمية عن هاتين المسؤوليتين في كثير من جوانبها. وفي الحقيقة، تتركز مسؤولية الأبوين الطبيعية بوصفهما مصدر لنح الثقة، والتشجيع المستمر، إضافة إلى كونهما مراقبين دائمين.

1. التأكد من قيام الطلبة بأداء الواجبات البيتية - المحددة بصور متكاملة ودقيقة.
2. إظهار اهتمام خاص بنتائج اختبارات أولادهم، مع توفير التشجيع والدعم كلما كان ذلك مناسباً.
3. الاتصال بالمعلم، من حين إلى آخر، للتأكد من تقدم الطالب.
4. مناقشة مشاكل أبنائهم وبناتهم والتي قد تؤثر على عملية التعلم.
5. التقدم بمساعدة إضافية أن اقتضت الحاجة ذلك.

تحديد درجة الفصل الدراسي

Determining The Course Grade

فلسفات تحديد الملامات الدراسية

Grading Philosophies

قبل معالجة كيفية تحديد الدرجات، يجب أن يكون المعلم على دراية كافية بفلسفته الشخصية بخصوص تحديد الملامات الدراسية للطلبة. كما ينبغي أن يدرك المعلم بأنه كما أنه ليس هناك شمة نقاط اتفاق بخصوص الموقف السياسي الصحيح أو الخاطئ، فكذلك الحال بالنسبة لفلسفة وضع الملامات Marking Philosophy.

وأن المعلم الذي يمتلك فلسفة صارمة في وضع الملامات سوف يلتزم بشدة في تقييم الطالب على أساس متوسطات الاختبارات، دون النظر إلى الطالب كمعطى كلي عند تحديد الدرجة. وسيكون هذا المعلم مؤمناً إيماناً مطلقاً بأن هذه هي الطريقة الوحيدة للحفاظ على الثوابت والمعايير، والارتقاء بمستوى الأداء الذي قد انخفض بشكل كبير في المدارس العامة. يميل هذا النوع من المعلمين إلى إعطاء درجات منخفضة للطلبة.

من جهة أخرى، يعمل المعلم الذي يتبنى فلسفة متعاطفة من جهة أخرى، Sympathetic Philosophy إلى التأكد على أن علامات

د. أن تكون لديهم جميع المعدات اللازمة: كالأقلام، والفرجار،...

هـ. يتبعون التوجيهات، ويقرأون التعليمات بعناية.

و. يظهرون جميع العمل بصورة واضحة.

ز. بذل كل ما يستطيعون من جهد للتحضير بصورة جيدة لكل امتحان.

ح. إنجاز واجباتهم اليومية بصورة منتظمة.

4. الحضور في الصف Attendance in Class

ينبغي أن يتذكر الطلبة بأن:

- أ. التغيب ليوم واحد عن درس الرياضيات هو أمر خطير لأنه يعني خسارة حقيقية لعمل يومين - اليوم الذي تغيبوا فيه واليوم التالي الذي عاودوا الدوام فيه (نظراً لأنه قد لا يتوفر لديهم فهم تام بما يقوم به المعلم عند عودتهم إلى الصف).
- ب. مقاطعة الصف هو نقض للانضباط المدرسي، إضافة إلى كونه خسارة ليوم من الدراسة.
- ج. القعود متأخرين إلى الصف يعني خسارة وقت ثمين قد يتململون خلاله شيئاً مفيداً. يضاف إلى ذلك، إن التأخير يؤدي إلى تشتت المعلم، وفك عرى الصف. إن التأخير المستمر يعكس مهلاً ضعيفاً للطلاب تجاه المادة.

5. الانضباط المدرسي Discipline

ينبغي أن يتم إخبار الطلبة بأن:

- أ. السلوك غير الصحيح في الصف يؤثر بشكل ملحوظ على الجميع.
- ب. التصرف السيئ لن يكون مجدياً، وسهؤلاً على المعلم وبقية الطلبة في تكوين انطباع سيئ وسلبي تجاه المذنب.

6. الموقف والجهد Attitude and Effort

ينبغي أن يظهر الطلبة بأنهم حريصون على الأداء الجيد عن طريق:

- أ. البحث عن مساعدة إضافية عندما تظهر الحاجة لها من المعلم، أو زملاء الصف، أو مجموعة العمل، أو خارج المدرسة.
- ب. إنجاز عمل بعلامات إضافية عند تحديد الواجبات.
- ج. عدم الدخول إلى الصف متأخراً، أو تكوين موقف سلبي، بصورة مسبقة، تجاه الرياضيات.
- د. التعاضد مع المهام المدرجة سابقاً.

المسؤوليات الأبوية Parental Responsibilities

يمتلك كل إنسان بالغ يدين، ويمسك المعلم بواحدة لمساعد

$$81-90 = B$$

$$71-80 = C$$

$$65-70 = D$$

$$F = \text{دون } 65$$

غالباً ما يسمّى الآباء والطالبه فهم الطرق التي اعتمدها المعلم بالوصول إلى تحديد الدرجة. وإن تراكب سوء الفهم هذا هو حقيقة امتلاك الدرجات درجة من الذاتية وتكون في بعض الأحيان اعتباطية. كذلك فإن مجموع درجات الاختبار يعكس درجة محددة من الذاتية، نظراً لأنها تنتج من الاختبار الذي يده المعلم، والتي تمتاز بكونها أداة ذاتية بحد ذاتها إلى حد ما. ورغم بذل محاولات متعددة لتحديد طريقة علمية أو موضوعية للوصول إلى بطاقة تقرير التقديرات، فلم يفلح أحد في تحقيق ذلك، أي لم يفلح أحد في استبدال الحكم الاحترافي للمعلم بصفة موضوعية. إن بعض الطرق التي تمهد للوصول إلى تحديد درجة، قد نوّقت بتفصيل أكبر في العناوين الآتية، والتي تتضمن:

1. استخدام صيغة.
 2. إجراء مقارنات مع طلبة آخرين في الصف.
 3. تحديد مقدار التحسن.
 4. استخدام سجلات مميزة بدلاً من الدرجات.
 5. تحديد درجتي "مرور" Pass أو "إخفاق" Fail فقط.
- تأمل الصيغة الآتية والتي تحدد فئات معلومة بنسب من الدرجة النهائية.

40%	معدل اختبار الصف.
20%	العمل الصفي وعمل المجموعة.
	الحقيبة المدرسية (والتي تتضمن الواجب
20%	البيتي، والمشاريع، والتقارير، وغيرها).
20%	الامتحان النهائي.

قد تعتقد بأن هذه الصيغة تمثل قاعدة عقلانية أو خطأ إرشادياً لتحديد الدرجات، ولكن الحقيقة، هو أن صيغة مشابهة قد استخدمت من قبل الكثير من المعلمين. علاوة على ذلك، تأمل الذاتية للتضمنة في أمور مثل: إعداد الاختبارات وتحديد درجاتها، بالإضافة إلى تحديد قيم النسب المثبتة. يضاف إلى ذلك، إن فقرات مثل الدقة في مراعاة المواعيد، والحضور، والوقت، والأنشطة تمتلك تأثيراً كبيراً على قرار المعلم بطريقة ذاتية. لذا حتى نجد تطبيق الصيغة، فإن العلامة المحسنة قد تعدل إلى قيمة أعلى أو أدنى كما يراها المعلم مناسبة لكل حالة.

الجميع تتأثر في الخلفية بالإضافة إلى القدرة. لذا فإنه يؤمن بأن العوامل التي تقع خارج تحكم الطالب وسيطرته والتي يحوزها فحسب بولادته مصادفة، ينبغي أن لا تستخدم في تحديد الدرجات التي قد تؤثر تأثيراً حاسماً على مستقبلهم - سواء كان في الكلية أو الوظيفة. أن مثل هذا المعلم يميل إلى منح الطلبة درجات عالية.

ورغم أن هناك الكثير من الجدل والنقاش الدائر بين أنصار وجهتي النظر هاتين، لا شك أن الأفضل - بالنسبة للمعلم - هو التوجه صوب تحديد مسار متوازن. وينبغي أن نشد توازناً يحاول التوفيق بين الحساسية تجاه الطالب وخلفيته، بالإضافة إلى الرسوخ والثبات في طلب شواهد متينة على الأداء المقبول. إن هذين الأمرين بحاجة إلى الاعتبار بعناية عند تحديد درجات الطالب.

تقانات لتحديد الدرجات

Techniques for Determining Grades

مضى تم اعتبار مسؤوليات الطلبة، والآباء، والمعلمين في العملية التعليمية سيكون كل من الطلبة والآباء على أهمية الاستعداد لهم كيف وصل المعلم إلى بطاقة تقرير الدرجة. إن بطاقة تقرير التقديرات المرسلة Report Card Rating عدة مرات خلال السنة للطلبة وآبائهم، تعد ذروة عملية التقييم. وفي تلك الأوقات، تقوم باختبار سجلاتك الخاصة بفقرات نوعية وكمية الواجب البيتي للطلبة، وجميع جوانب أنشطتهم الصفية، وعلامات اختبارهم، والحضور، والأنشطة داخل الصف، والوقت الشامل، ومشاركاتهم في مناقشات المجموعات الصغيرة والكبيرة، والمشاريع، ومجموع علامات الاختبارات المعيارية، ومهام تقييم الأداء، وحقيبة التقارير والمكتوبات الأخرى، والمعرفة بالآلات الحاسبة، والحواسيب، والممارسات التشكيلية المناسبة.

وبعبارة أخرى، أن تحاول تحديد مدى إيفاء الطالب بمسؤولياته، وإلى أي حد نجح/أو نجحت في تحقيق ذلك. وأخيراً سوف تصل إلى تحديد درجة، سواء كانت عبارة عن حرف:

A = مستوى رائع من الأداء.

B = مستوى جيد من الأداء.

C = مستوى مقبول من الأداء.

D = مستوى هزيل ولكنه أدنى حد مقبول من الأداء.

F = مستوى الفشل من الأداء.

أو عبارة عن رقم:

A = 91-100

تجابه المعلمين نظرا لضرورة اتخاذ مجموعة كبيرة من القرارات الذاتية. وكيف يستطيع المعلم أن يحدد موضوعياً فيما إذا كان الطالب يؤدي واجباته بقدر القدرة المتاحة، أو ما هو موقف الطالب تجاه الموضوع؟. يضاف إلى ذلك أن الدرجة ذاتها تتغير في المعنى والدلالة إلى حد كبير. فقد تدل علامة "A" على "عبقري أو موهوب في العمل" أو "مجاهد ومكافح في العمل". ومع ذلك، فإن كثيراً منا، ممن يعد نتائجنا واقعياً لنظم مدارسنا، بالإضافة إلى أولئك الذين لا زالوا فيها، قد تعلمنا من خلال بعض طرق الحاسة السادسة ماذا تعني الدرجة. وإذا أردت أن تسأل الطلبة في صفك أن يباشروا بتقييم أنفسهم قبل تقارب تلك التي ستذهب إلى منحهم إياها، وإلى حد مقبول. إن المعلمين الذين يسلون طلبتهم بإعداد تقييم ذاتي لتقدمهم وإنجازاتهم في الصف عند نهاية الفصل الدراسي على علم بما ذكرناه آنفاً. وعلى كل حال، فإن الأشياء ليست تصادفية كما قد تظهر لأول وهلة، ومن أجل هذا تظهر حالات فهم غير مكتوبة بين الطلبة والمعلمين بخصوص ما هي العلامة المحددة التي يستحق الحصول عليها نتيجة لأدائه خلال المساق الدراسي. ومع ذلك، تعد درجة الطالب التي يستحق الحصول عليها، خلال المساق الدراسي غير صالحة لأن تكون مؤشراً على القدرة والإنجاز. ورغم ذلك، فإنها الدرجة، والعلامة الدقيقة التي يفترض بها أن تخبر: الطالب، والأبوين، والكلية، أو الجهة الموظفة بنجاح الطالب أو فشله في المساق الدراسي. وقد تستعمل، في بعض الأحيان، في توقع النجاح أو الفشل المحتمل في مجال واسع من الأنشطة والفعاليات المستقبلية. إن مثل هذا التأثير الكامن على مجرى الحياة المهنية للطالب، يستلزم بذل عناية بالغة عند إعداد تقييمات الطالب.

اختبارات الصف وامتحاناته السريعة – المعدلة

Adjusted Classroom Tests and Quizzes

إن التأكيد على اختبار "المعايير" القبلية Pre- Standards Testing يهدف إلى قياس براعة الطالب وتكثفه من وقائع ومهارات محددة. ومنذ تقديم "المعايير" التي قام بإرسالها المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات، فإن التأكيد والاهتمام قد اتجه نحو طرائق وأساليب بديلة لتحديد إمكانية الطالب. من أجل هذا اقترحت أساليب ومعالجات تختلف عن الطرائق التقليدية السائدة.

تركز الأساليب المستحدثة على تقويم الطالب من خلال الكتابات التي تشمل: التقارير، وسجلات العمل، والمفكرة

إن التقانة الثانية لحساب التقرير تركز إلى مبدأ مقارنة أداء الطالب الفعلي مع أداء طلبة آخرين في الصف. وعليه، فإن الطلبة الذين يبدلون بلاء، حسناً في نتائج الاختبار، والواجب البيتي. وبغية المهام (في ضوء قرار المعلم) سوف تكون علاماتها A: والفتة التي تليها ستكون علاماتها B، وهكذا تعد هذه التقانة الأفضل بالنسبة لصفوف الشرف والصفوف البيئية أكثر من كونها صالحة للصفوف المتوسطة. أن تفسيراً مسهلاً لهذه التقانة سوف يأتي بمرحلة لاحقة من هذا الفصل. أما التقانة الثالثة فتتخطى إلى احتساب مقدار التحسن الذي حصل خلال الفترة الزمنية المستغرقة. فعلى سبيل المثال، فإن طالباً في صف علاجي Remedial Class والذي ابتدأ بمستوى الحساب يكافئ الصف الخامس (وفقاً للاختبارات المعيارية)، ولكنه أنهى الفصل الدراسي بمستوى الحساب يكافئ الصف السابع، يكون قد حصل على درجة معينة لكفاية التقدم بمستين خلال فصل دراسي واحد. وفي موقف من مثل هذا النوع، ستحدد فلسفة المدرسة فيما إذا اجتاز الطالب الفصل الدراسي، حتى ولو كان العمل دون المستوى المناسب للمدارس الثانوية. وستحدد سياسة المدرسة فيما إذا ستضمن هذه العلامة في المعدل الكلي للمدارس الثانوية الذي يخص الطالب المذكور (بالتكافؤ مع مساقات دراسية مثل الإنجليزية والدراسات الاجتماعية).

لقد حاز التقرير الذي يستخدم سجلات مميزة للطلبة والآباء شعبية ملحوظة في بعض قطاعات المدرسة. وبدلاً من أن يلجأ المعلم إلى تحديد درجة حرفية أو رقمية، يلجأ إلى تقديم وصف مكتوب لموقف كل طالب من طلبته، ونتائج الاختبار، والواجب البيتي، والسلوك، وعوامل أخرى. ترتبط هذه التقانة، في بعض الأحيان، مع الدرجات الحرفية أو الرقمية مرة واحدة بالسن، على الأقل.

حصلت تقارير "مرور – إخفاق Pass-fail" على شعبية واسعة في عقد الستينات وبداية عقد السبعينات. وفي هذا النظام يصدر المعلم حكماً يصدر عبور طالب محدد للمساق الدراسي، من عدمه، وهل يستحق الحصول على وحدة تقديرية Credit، أم لا يستحق. ورغم أن عدداً لا بأس به من الناس يعبر عن تأييده التام لهذا النظام، فإن قطاعات محدودة من نظم المدارس لا زالت مستمرة على استخدامه. ويعود السبب الرئيسي لترجعه إلى وضعه القدرة الأكاديمية المعتدلة على نفس المستوى الذي يتبوه الإنجاز الفعلي. إن غياب إدراك وتمييز: الموهبة، والقدرة، والثقافة يعد أمراً غير مقبول لدى فئة كبيرة من الأشخاص.

تعد عملية تحديد الدرجات من أكثر المهام الصعبة التي

من النوع الذي "يرتكز إلى الحقائق Fact-based" إلى تقييم أنه ستكون غير تعديل بسيط لسؤال الاختبارات المتعددة واستبعاد الخيارات من مضمونها.

أمثلة على أسئلة بتوجيهات "المعايير"

Examples of Questions with Standards

Orientation

1. أ. وضح برسوم تخطيطية مناسبة معنى أن دالة $\log x$ تساوي عددا سالبا.

ب. استخدم آلة حاسبة علمية أو رسومية لحساب قيمة x مقربة إلى اقرب عشرة إذا كان $\log x = -1.5365$.

2. أ. اعرض تطبيقا عمليا وبرهن باستخدام رسم تخطيطي النظرية القائلة بأن نقطتين أو أكثر والتي تبعد كل

منها بمسافة متساوية عن نهايتي قطعة مستقيم تحدد النصف العمودي لقطعة ذلك المستقيم.

ب. بين وبرهن معكوس النظرية الواردة في الفقرة (أ).

3. استخدم الرسم التخطيطي - الشجري Tree Diagram لعرض الاحتمالات الآتية:

إذا انقلبت قطعة نقود كبيرة خمس مرات، جد احتمالية الحصول على 3 أوجه (كحد أدنى)، أو 3 أوجه بالضبط، أو 3 أوجه وظهريين.

4. اكتب بأبسط صورة حدود مفكوك $(x+y)^5$.

5. جد المتوسط، والوسيط Median، والنوال Mode، والانحراف المعياري لمجموعة الأعداد: 16، 4، 1،

20، -8، -7، 13. - ارمس مخطط المستقيم المكسور Broken Line الذي يضم هذه النقاط

نظم أخرى لتحديد العلامات المدرسية

Other Grading Schmes

إن إحدى التقانات البسيطة المستخدمة لتحديد درجات الطالب، والتي استخدمت بنجاح بواسطة أكثر من معلم تتضمن عدة خطوات:

1. إهمال مبدأ 100 بالمائة التقليدي بوصفه مؤشرا على ورقة الاختبار المثالية. فهناك، بالواقع، بعض الاختبارات التي تمتاز بكونها أكثر صعوبة، وأكثر تفصيلا، أو أكثر أهمية بمعيار رياضي من البقية. وعليه، فإن تحديد علامات جميع أنواع الاختبارات على أساس 100 بالمائة يبدو غير معقولا بصورة صارخة، وبالأخص، عند إيجاد معدل علاقاتها، وكانت جميعا متوازنة من حيث وزن علاقاتها. لذا يمكن أن تعد الاختبارات بحيث يكافئها أي مجموع

الشخصية، والحقبة المدرسية. إن استخدام هذه الأساليب لا يعني ترغيب المعاني التي تمتاز بها الاختبارات الصعبة، والتي قد ألفنا التعامل معها، أو وجود ثمة إمكانية لاختلافها من درس الرياضيات. وبالحقبة فإن الاختبارات والامتحانات السريعة سوف تبقى الآلة الرئيسية لتقويم الطلبة وتحديد درجاتهم. وينبغي أن نتذكر على الدوام، بأن الاختبارات والامتحانات السريعة هي طرق قد نجحت، وبمرور الزمن، في اجتياز الاختبار فأضحت أساليب لا غبار على قدراتها في تقويم أداء الطالب، في حين لا زالت الأساليب والطرائق الجديدة بحاجة إلى أن تقدم لنا براهين ملموسة على عنصر القيمة الذي تمتاز به. وهناك حاجة ملموسة إلى بعد زمني قد يستغرق بضعة سنين قبل أن ينتفع المعلوم، والطلبة، والاستشاريين، والآباء بجودهاا وصلاحياتها.

إنشاء اختبارات جديدة من أخرى قديمة

Creating New Tests from Old

تبدو مسألة تبديل الاختبار سهلة نسبيا حتى تشخص أمامها عقبة التطابق والتكيف مع توجهات "المعايير" الجديدة. ويمكن تعديل الأسئلة لكي تعكس عمق الإدراك المفاهيمي في الرياضيات. فعلى سبيل المثال، إن المسألة الآتية قد أعدت بأسلوب الاختبارات المتعددة: يقوم هاري بتصميم إشارة حملة Campagin، وقد استخدم الحرف العلوي H على:

1. نقطة تماثل واحدة فقط

2. خط تماثل واحد فقط

3. خطي تماثل ونقطة تماثل واحدة فقط

4. نقطتي تماثل وخطي تماثل.

في هذا السؤال تبرز، في بعض الأحيان، صعوبة تحديد هل أن الطالب قد أدرك المفهوم الرياضي، أم أنه يارع في مهارات التعامل مع الاختبار. ولنفرض التحكم بهذا الأمر، يمكن أن تعرض المسألة دون إدراج الاختيارات الأربعة، فتصبح المسألة، "يقوم هاري بتصميم إشارة حملة، مستخدما الحرف العلوي H.

اعرض وحدد عدد نقاط / خطوط التماثل الموجودة". إن تعديل هذه المسألة قد نتج عنه تغير ملحوظ في مهام الطالب من دائرة الاختيار إلى دائرة "الأداء"، أي، سيتوجب على الطالب عرض وتحديد المعرفة المفاهيمية Conceptual Knowledge لتماثل النقاط والخطوط ورغم سهولة تحديد درجة أسلوب الاختبارات المتعددة، لكن هذا الأسلوب لن يكون أفضل أداة تقييم يمكن استخدامها لتحديد الإدراك المفاهيمي. وعليه فإن الاستراتيجية المقودة في تحويل اختبارات الاختبارات المتعددة

بواسطة المهارة أو المفهوم. إن الفائدة الأساسية من هذا النظام تكمن في إخبار الطلبة (بالإضافة إلى ذويهم) بمواطن القوة والضعف المتبعة لديهم خلال مساق دراسي محدد، وبالمقارنة مع التقدرات التجميعية لمعظم المساق الدراسي.

ولا يوفر الأخير أي تجزئة وتقسيم بالخبرة كما يفعل سابقه. ولسوء الحظ، فإن القرار الخاص باختيار نظام تحديد العلامات الدراسية لا يقع في دائرة اختيار المعلم، لأن مثل هذه القرارات تتخذ، غالباً، بواسطة إدارة المدرسة، وعليه ستكون معرفة المعلم بالخيارات المتعددة مثيرة ومفيدة إذا استدعته الإدارة لفرض المشاركة في عملية صنع القرار الذي يخص استراتيجيات التقييم وتحديد الدرجات.

خلاصة SUMMARY

ماذا يحمل عبور المساق الدراسي من معانٍ؟ انه يعني بأن الطالب قد استكمل جميع المسؤوليات التي تخص الواجب النهائي، والمشاركة الصفية، والحضور، والموقف، وقواعد انضباط السلوك الصفية، والحصول على نتائج اختبار مقبولة. وهناك دور حاسم أمام الأبوبين والمعلمين لكي يشاركوا في إدارته بمساعدة الطالب على استكمال المسؤوليات: الأبوبين بوصفهما مراقبين، والمعلم بوصفه مرشداً.

وبطريقة مشابهة، "النضل في مساق دراسي" يعني بأن الطالب لم يباشر المسؤوليات الملقاة على عاتقه، وأن من الواضح بأنه ليس المعلم بمفرده الذي يحمل على عاتقه مسؤولية هذه الواقعة.

يقوم المعلم بتقييم الطالب في ضوء إكماله للمسؤوليات عدة مرات خلال الفصل الدراسي، ويحدد علامات الطالب بواسطة درجات حرفية أو رقمية، أو بواسطة تقرير مكتوب، واعتماداً على السياسة التي تنتهجها المدرسة. ورغم الجهود المبذولة لإرساء تقدير درجات الطالب على أسس علمية محكمة، فإن الحكم الذاتي للمعلم يلزم بسبب دور حاسم في عملية التقييم.

في مسألة تحديد الدرجة، ذهب بعض الناس إلى استعراض دور المعلم كما هو دور الناسخ الذي لا يزيد ما يفعله على تدوين أداء الطلبة. إن هذا المنظور الضيق يجاني الواقع الملموس، ويحد من مساحة الدور الذي يتصدهر الحكم الاحترافي للمعلم، والذي ينبغي أن يمارسه في عملية تحديد العلامات الدراسية.

من العلامات استناداً إلى حكم المعلم بخصوص قيمة العلامة لكل سؤال.

2. عند نهاية فترة تحديد العلامات، يتم جمع نقاط الاختبار. يضاف إلى ذلك أن الصيغة التي يحددها المعلم، ومن النوع الذي تم وصفه سابقاً، وتتضمن: الواجب البيتي، والأداء الصفية، والموقف، والحضور، وأمر أخرى، يمكن استخدامها أيضاً في تحديد درجة تشمل مواضيع خارج الاختبار في التقييم الشامل للطلاب، وبعدها يتم احتساب المجموع الكلي لكل من نقاط الاختبار وما سوى الاختبار.

3. تعد قائمة بأسماء الطلبة مرتبة من أكبر مجموع كلي للنقاط نزولاً إلى أقل مجموع كلي. وعلى هذا الأساس يكون الطالب الأول حاصل على درجة 99% (أو 100%)، أو 95% في ضوء قرار المعلم) وستتغير قيم درجات الطلبة الذين يولونه بالترتيب وفقاً لهذه الصيغة.

4. بعد إكمال عملية تحديد الدرجات، تظهر الحاجة إلى تفحص نهائي يباشره المعلم لمعرفة فيما إذا نجم عن استخدام هذا الأسلوب أي نوع من الجور الواضح على أحد الطلاب، فحصل على درجات قليلة جداً لا تتناسب مع ما حصل عليه أقرانه، أو زيادة غير مبررة. فعلى سبيل المثال، رغم أن الطالب قد يؤدي أداء هزيل في النصف الأول من فترة تحديد العلامات، فقد يكون ذو أداء متفوق في النصف الثاني، والذي قد يكون الجزء الأهم منهما. آنذاك قد يعيل المعلم إلى عكس هذه الحالة الواقعية في الدرجة النهائية للطالب، وسيمعد آنذاك إلى تعديل الدرجة في ضوء ذلك. وهذا مثال آخر على الحكم الذاتي الذي قد يلجأ المعلم إلى استخدامه في تحديد الدرجات.

تتوفر أساليب أخرى من نظم تحديد العلامات الدراسية لاستخدامات المعلمين في بعض المدارس. أحدها نظام معياري المرجع Criterion Referenced (بخالف نظام معياري المحك Norm Referenced والذي تم وصفه سابقاً) والذي يتيح للمعلم فرصة تقييم مقدار ما توصل إليه الطالب في أمور موضوعية محددة. ويتم تصنيف هذه الأهداف وتدرج في فقرات

مراجع مقترحة Suggested References

- "Assessing Justification and Proof in Geometry Classes Taught Using Dynamic Software." *Mathematics Teacher*. (January 1998) 76-82.
- Assessment Standards for School Mathematics. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1995.
- Battista, Michael T. "The Mathematical Miseducation of America's Youth: Ignoring Research and Scientific Study in Education." *Phi Delta Kappan* 80 (February 1999): 424-433.
- College Board. "1998 Free-Response Questions." www.collegeboard.org/ap/calculus/frq98/index.html.
- Crocker, Linda, and James Algina. *Introduction to Classical and Modern Test Theory*. New York: Holt, Rinehart, & Winston, 1986.
- Darling-Hammond, L., and B. Falk. "Using Standards and Assessments to Support Student Learning." *Phi Delta Kappa* (November 1997) 190-199.
- EQUALS: Assessment Alternatives in Mathematics. California Mathematics Council.
- Evaluation in Mathematics. 1972 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1972.
- "Focus Issue on Assessment." *Arithmetic Teacher* 84 (February 1992).
- "Focusing on Worthwhile Mathematical Tasks in Professional Development: Using a Task from the National Assessment of Educational Progress." *Mathematics Teacher*. (February 1998) 156-161.
- Greer, Anja S., Helen L. Compton, Alice B. Foster, Jo Ann Mosier, Lew Romagnano, and Carmen Rubino. *Mathematics Assessment: A Practical Handbook for Grades 9-12*. Assessment Standards for School Mathematics Addenda Series. Edited by William S. Bush and Jean Kerr Stenmark. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1999.
- "Implementing the Assessment Standards for School Mathematics." *Mathematics Teacher* 94, no. 1 (January 2000): 31-37.
- Office of Educational Research and Improvement (OERI). *Facilitating Systemic Change in Mathematics and Science Education: A Toolkit for Professional Developers*. North Central Regional Educational Laboratory. U. S. Department of Education. 2001.
- Office of Educational Research and Improvement (OERI). *Improving Classroom Assessment: A Toolkit for Professional Developers*. North Central Regional Educational Laboratory. U. S. Department of Education. 2001.
- Ott, Jack. *Alternative Assessment in the Mathematics Classroom*. New York: Glencoe-McGraw-Hill, 1994. 5-17.
- Principles and Standards for School Mathematics. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.
- Rubrics: North Central Regional Educational Laboratory (1998). <http://www.iecrel.org/sdrs/areas/issues/methods/instrctn/in51k59.htm>
- Simmons, W., and L. Resnick. "Assessment as a Catalyst of School Reform." *Educational Leadership* (February 1993): 11-15.
- "Students Generating Test Items: A Teaching and Assessment Strategy." *Mathematics Teacher*. (March 1998) 198-212.
- "Student Portfolios in Mathematics." *Mathematics Teacher* (April 1998) 318-325.
- "Student Self-Assessment and Self-Evaluation." *Mathematics Teacher*. (October 1996) 548-554.
- Thompson, Denisse R., and Sharon L. Senk. "Implementing the Assessment Standards for School Mathematics Using Rubrics in High School Mathematics Courses." *Mathematics Teacher* 91 (December 1998): 786-793.
- Tuckman, Bruce W. *Testing for Teachers*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1986.

إثراء تعليم الرياضيات

Enriching Mathematics Instruction

7

تنسجم العقيدة التي تؤكد على ضرورة إثراء تعليم الرياضيات، كلما كان ذلك ممكناً ومناسباً، مع جميع إصدارات المعايير التي أبصرت النور خلال السنين القليلة الماضية. وفي البداية ينبغي أن ينص بصورة مشددة بأن إثراء الرياضيات لن يقتصر على ذي المواهب، فجميع الطلبة بكافة مستويات قدراتهم يجب أن يحصلوا على إثراء ملموس في تعليم الرياضيات. وسنحاول في هذا الفصل استكشاف الطرق التي يمكن أن تكون مصدراً خصياً في إثراء تعليم الرياضيات لجميع الطلبة.

يمكن أن ينجلي إثراء الرياضيات ذاتياً بثلاثة طرق مختلفة، على الأقل. إن أسهل هذه الطرق وأقلها إبداعاً وابتكاراً في الإنجاز هي طريقة التسجيل acceleration. وترتكز هذه الطريقة إلى عملية نقل الطالب الأفضل خلال المسار الرياضي بصورة أسرع. بصورة عامة، تعاني عملية التسريع من بضعة عوائق، (الأول) يمكن نقل الطالب بسرعة كبيرة بحيث يتجاوز حدود الرياضيات. أي، إن الطالب قد ينهي متطلبات المساق الدراسي الذي تقدمه المدارس الثانوية، دون أن يتبقى لديه أي مساق من مادة الرياضيات يمكن أن يناله في حين لم يكمل بقية متطلبات المساقات الدراسية للواء الدرجة في قائمة متطلبات المدارس الثانوية. وفي مثل هذه الحالة، قد يستمر الطالب بصورة شخصية مع معلم يتطوع بأن يكون الناصح المخلص Mentor له خلال الفترة المتبقية أمامه، أو قد يلجأ إلى التسجيل على مساق دراسي في إحدى الكليات القريبة (إذا توفر الخيار)، أو قد يمنح الطالب نفسه عطلة من الرياضيات "Takes Vacation". وتعد الخطوة الأخيرة خبزاً لا يغتفر، لأن الطالب اللامع قد يضع تماماً عن دراسة الرياضيات في المستقبل القريب.

إن مبرراً آخر لإثراء المعرفة الرياضية للطلاب بطرق أخرى غير تعجيلها / أو تعجيلها لأن مثل هذا الإثراء قد يؤدي إلى حث وتحفيز الطالب على مواصلة دراسة الرياضيات بجدية في الفترات اللاحقة، أو قد تؤدي ببساطة إلى تحفيز الطالب على تحسين فهمه المفاهيم والأفكار الرياضيات. وهناك المزيد من الموضوعات والمفردات الرياضية التي يستطيع الطالب استكشافها، والتي تقع خارج دائرة المنهاج الدراسي النظامي. إن اعتبار هذه المواضيع المتعددة (والتي قد تعد "خارج المسار المألوف Out off the Beaten Path") يمكن أن يؤخذ بصورة أكثر جدية بعد استعراض جملة من الأفكار المتعددة والتي تعرض بوصفها وحدات إثرائية في نهاية هذا الكتاب.

يطلق على النوع الآخر من الأساليب الإثرائية "التوسيع Expansion". يشير هذا الاصطلاح إلى عمق الموارد المعرفية لمعلم الرياضيات بحيث ينتقب في مفردات وموضوعات المنهاج الدراسي المقرر بصورة تفصيلية خارج السياقات التقليدية المطلوبة. إن عرض المزيد من التفاصيل الدقيقة سوف يحث الطلبة المتميزين والناهجين على التنقيب في أعمق حقيقتها بالموضوعات التي تدرس داخل الصف. يشير اصطلاح "الاستطرد Digression" إلى أسلوب إثرائي آخر، يعمل إلى تخصيص جزء من وقت الدرس لمراجعة موضوع يقع خارج نطاق المنهاج الدراسي المقرر، بيد أنه يرتبط بصلة واضحة مع إحدى

المفردات الموجودة فيه. إن الخروج عن التخوم الحصينة للمقرر الدراسي وإلى موضوعات تمت إليه صلة، ودراسة هذه الموضوعات بتفصيل مناسب قد يفتح أفقا جديدة أمام اهتمامات الطلبة. ولكن ينبغي أن يبقى عالقا في أذهاننا، على الدوام، بأن الطلبة الصغار لا يمتلكون (بصورة عامة) قدرات محنكة على التجريد كما هو الحال مع الكبار، أو الطلبة الأكثر نضوجاً.

وقد تجلى بوضوح من خلال الوحدات الإثرائية الموجودة في هذا الكتاب، بأننا نتمتع عقيدة إثراء تعليم الرياضيات في المدارس الثانوية، وأن جزءاً من وقت الموضوعات المقررة الذي اقتطع لإجراء أنشطة إثرائية لا يمكن أن يعد وقتاً ضائعاً من التدريس النظامي. ولكن يصح العكس! فالوقت المستخدم في الأنشطة الإثرائية هو بالحقيقة استثمار للوقت. وسيصبح الطلبة المشاركون أكثر نشاطاً في قاعة الدرس، ومتعلمين بكفاءة أكبر عندما سيصرف المدرسون جزءاً من الوقت لتحفيزهم وتعميق اهتمامهم بالرياضيات. إن المستمع "Turned on" يحتاج إلى زمن أقصر لتعلم المفاهيم الجديدة.

الهندسة: في البداية

Geometry: In the Beginning

إن النمو والتطور الأصيل للرياضيات في مصر وبلاد الرافدين كانت نتيجة لرغبة الكهان في بناء المعابد والصب، والطموح الذي لا يعرف حدوداً لدى الملوك والفرعنة الذين يريدون الاستيلاء على مساحات شاسعة من الأراضي، واقتناء الضرائب من أصحابها، والعاملين فيها. كانت التقانات السائدة في تلك العصور بسيطة، وبدائية، ومحددة بالبداهة لكنها كانت دقيقة ومناسبة لتغطية متطلباتهم. وتتوفر لدينا شواهد تاريخية لبعض من هذه التقانات في ورق البردي لآحمن Ahmes Papyrus والتي قد دونت في حدود عام 1650 قبل الميلاد وتم العثور عليها في القرن التاسع عشر، وقد احتفظ بأجزاء منها في كل من متاحف لندن ونيويورك.

احتوت أوراق البردي على صياغات لاحتساب مساحة المستطيل، والمثلثات قائمة الزوايا، وشبه المنحرف الذي يحتوي على ساق واحد عمودي على القاعدة، وأخرى لتقريب مساحة الدائرة. ويبدو بأن المصريين قد نجحوا في تطوير هذه الصياغات من خبرتهم في التعامل مع مساحات الأراضي المنتشرة لديهم.

يعد طالس (640-546 ق.م) أول رياضي الذي أبدى معارضته وعدم ارتياحه لإزاء الطرق التي تركزت إلى الأخيرة بصورة كلية. ونحن نكن لهذا الرجل احتراماً بالغاً في هذه الأيام بصفته الإنسان الذي كان يؤكد دائماً مقولته الشهيرة "برهن ذلك Prove It" وكان يكثر من تطبيق مقولته على أرض الواقع. ومن بين أفضل النظريات المعروفة، والتي برهنت للمرة الأولى بحججه الرياضية والمنطقية هي:

■ زاوية قاعدة المثلث متساوي الساقين متطابقة.

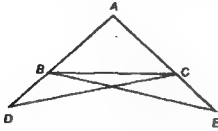
إثراء تعليم الرياضيات بواسطة الأسلوب التاريخي Enriching mathematics instruction with a historical approach:

تذهب الأسطورة الشائعة إلى أن درس الرياضيات لا حياة فيه. وأنه فاتر باهت. ول سوء الحظ، غالباً ما تكون هذه الأسطورة مقاربة للصواب - ولو أنها بحاجة لأن لا تكون كذلك. وكثيراً ما نجد أنفسنا غارقة بالتركيز على تعليم الرياضيات للوصول إلى الموعد النهائي للإنجاز Deadline، مثل تقديم اختبار. أو إكمال مساق دراسي. إن التمتع بتعليم ماهية الموضوعات التي تعالجها الرياضيات يبدو بعيداً عن تناول أيدنا المتعبة. ولكن هل هذا هو الواقع؟ فنحن نستطيع أن نعلم ببساطة موضوع من أين جاءت الرياضيات، ومن سبق في التفكير والتأمل بها، ومن قام في مرحلة لاحقة بتطويرها وتخليصها من الشوائب العالقة بمفاهيمها.

ببساطة، نستطيع توظيف تاريخ الموضوع، والذي يشمل: الواقع الحي، والحب، والنجاحات، والإخفاقات الذي عاينه الأشخاص الذين اخترعوا الرياضيات وأبدعوا تفاصيلها، لكي ننفع بالحياة في جسدنا الذي لولا هذه المحاولة ل بقي فاتراً لا حياة فيه ولا دماء تدب في أوصاله. وتظهر أوقات حيث يتكامل التاريخ مع مادة الموضوع بطريقة مشرقة مليئة بالحيوية والنشاط.

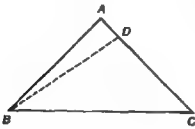
إن القسم الآتي سيوفر عينة مقبوضة حول كيفية تحقيق هذا التكامل في موضوعات محددة بالرياضيات المدارس الثانوية. إن البيولوجرافيا التي تم اختيارها بعناية بالغة ستظهر في نهاية هذا الفصل، وستسهم في مد يد العون لك في تنمية وتطوير الخلفية المطلوبة لاستخدام الأسلوب التاريخي عند تعليم مادة الرياضيات.

لأنها تطرح مسألة منتصف الزاوية قبل حلول أوانها. بيد أن إقليدس قد قام في عرضها بأسلوب مختلف. إن رسماً تخطيطياً لبرهانه كما يلي:



المعطى: المثلث ABC وفيه $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$ ، قم بمد المستقيمين \overline{AB} و \overline{AC} خلال النقطتين B ، C ، على التوالي، إلى النقطتين E ، D بحيث $\overline{CE} \equiv \overline{BD}$ ، إذن $\triangle ADC \equiv \triangle AEB$ بحيث $\angle D \equiv \angle E$ و $\overline{EB} \equiv \overline{DC}$ ،
بعدها $\triangle BDC \equiv \triangle CEB$ ، حيث $\angle DBC \equiv \angle ECB$ ،
إذن $\angle ABC \equiv \angle ACB$.
وهو المطلوب إثباته Q.E.D. (و.م.أ.).

إن النظرية التي استكمل برهانها انفا، كانت تعرف بـ "Pons a Sinorum" أو "جسر تخمين (المجانين)" في العصور الوسطى. إن المعنى المضمن في هذه التسمية يعود إلى أن بعض الطلبة يعانون من صعوبة "اجتهاز" هذا الجسر لكي يستطيعوا الاستمرار بدراساتهم للهندسة. لقد برهن إقليدس نقض هذه النظرية بطريقة غير مباشرة (reduction ad absurdum).



المعطى: المثلث ABC ، حيث $\angle B \equiv \angle C$ ، إذا كان $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ ، بعدا افترض $\overline{AB} < \overline{AC}$ ، ثبت نقطة D على قطعة المستقيم \overline{AC} بحيث $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$ ، ثم $\triangle DCB \equiv \triangle ABC$ ، وهذا أمر مستحيل. $\therefore \overline{AC} \equiv \overline{AB}$.

خلال تيار التاريخ الإنساني، وبالأخص خلال القرون الأربعة الأخيرة، فإن عناصر إقليدس قد بقيت تعاني من تحريفات وتشويهات لا يمكن تصورها. فقد تم: تبسيطها،

■ الزوايا القائمة متطابقة.

■ الزاوية المعاسة المرسومة في نصف دائرة هي زاوية قائمة.

اقتنى فيثاغورث (582-507ق.م) واتباعه الذين ينتمون إلى تيار الفيثاغورية آثار خطي طاليس، واستخدموا طريقته في البرهان بتطوير نظرية فيثاغورث، والنظريات التي عنيت بمجموع قياسات زوايا الأشكال متعددة الأضلاع، وخواص المستقيمت المتوازية، والأجسام الخمسة الصلبة-المنتظمة، والكميات غير القابلة للقياس Incommensurable Quantities. لقد كانت جهود طاليس وآراؤه الرياضية، الحجر الأساس لبداية عصر التطور الرياضي والتي أضحت فيها الاستنتاج الرياضي المنهج الأكثر قبولا في دائرة الاستدلال المنطقي. استخدمت هذه الطريقة لاشتقاق وتوليد النظريات من مسلمات، وفرضيات، وبهذه الطريقة، بدأت بتطوير نظام يتألف من عبارات وقضايا ذات نسق منطقي محكم. لقد وصل هذا العصر إلى ذروته مع عناصر إقليدس Euclid's Elements بعد طاليس بثلاثمائة عام.

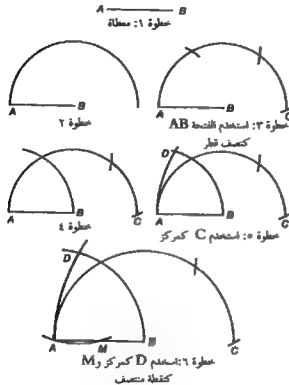
توجه إقليدس، في "العناصر"، نحو توحيد عمل المدرسين Scholars الذين سبقوه عبر جمع وعرض الإرث الرياضي في زمنه وبأسلوب منهجي - وبعد حقا إنجاز رائعا. تضمن عمله، أيضاً، على عناصر إبداعية وأخرى مستحدثة، وباستخدام مناهج استدلالية نجح في وصف كم هائل من المعرفة التي يمكن إحرازها واكتسابها بواسطة الاستنتاج الرياضي فقط. لقد ضمن إقليدس في كتاباته الجبر، ونظرية العدد، والهندسة.

لقد أصبح كتاب "العناصر" عملاً رياضياً ذو أهمية بالغة في حضارة العالم المتعدن، وقد بوشتر بترجمته من اللغة اليونانية إلى اللغة العربية (عام 800م) ثم من العربية إلى اللاتينية (عام 1120م). ولقد ظهرت الطبعة الأولى-اللاتينية عام 1482م، وقد تبعها طبعات أخرى متلاحقة. يأتي "العناصر" بعد كتاب الإنجيل في عدد الطبعات والإصدارات بلغات متعددة، حيث لا ينافسها كتاب آخر في تاريخ الحضارة الأوروبية. لقد كتب العمل الأصلي في ثلاثين قطعة رق منفصلة (كتاب). إن النظرية الخامسة في الكتاب I هي النظرية المعروفة "زوايا قاعدة المثلث متساوي الساقين متطابقة" (اشتقت كلمة متساوي الساقين Isosceles من كلمتين يونانيتين هما:

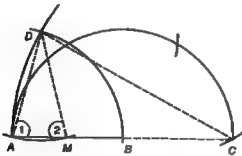
isos والتي تعني متساوي، و skelos والتي تعني ساقين). إن الطريقة التي تستخدم حالياً، بكثرة، للبرهنة على صحة هذه النظرية تتطلب إنشاء منتصف زاوية من خلال زاوية الرأس. وتورث هذه الطريقة خلافاً مع الصغائية Purists، نظراً

(م) Q.E.D هو اختصار quod erat demonstrandum والتي تعني "وهو المطلوب إثباته". وتكتب في بعض الأحيان بعد استنتاج البرهان في الرياضيات.

المعطى قطعة المستقيم \overline{AB} . احتسب بواسطة الفرجار، فقط، نقطة المنتصف M لقطعة المستقيم \overline{AB} .
ان التسلسل الآتي للأشكال الرسومية يستمر الفرجار المؤلف في أيامنا هذه، ويظهر الحل الخاص بالمسألة المطروحة.



ويظهر هنا مخطط آخر للبرهان على صحة الإنشاء.



ارسم خطوط الإنشاء كما مبين، ولاحظ بأن \overline{ABC} هو خط مستقيم.

1. بما إن المثلث $\triangle ABC$ هو مثلث متساوي الساقين،

$$\angle CDA \cong \angle 1$$

2. بما إن المثلث $\triangle DAM$ هو مثلث متساوي الساقين،

$$\angle 2 \cong \angle 1$$

3. إذن، $\triangle ACD \sim \triangle DAM$.

$$4. \text{ إذن، } AM = \frac{(AD)^2}{AC} \text{ أو } \frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AD}$$

وتعقيدها. وإسقاطها، وتشويبهها، وتحريقها، وفي أحليين أخرى غيرت بحيث ضاعت معالمها. وكانت النتيجة؟ هندسة تحليلية. وهندسة وصفية، وطوبولوجيا، وهندسة لا القيدية، ومنطق. حتى التفاضل والتكامل (الحسبان)، والفيزياء النظرية المعاصرة. ولا زالت النهاية بعيدة عن تخيلاتنا الواهنة!

إنشاءات: الفرجار والمسطرة العدلة

Constructions Compasses and Straightedge

حيثما كانت الإنشاءات مطلوبة في ميدان الهندسة، فإن الأدوات التي ينبغي استخدامها (وما لم يشر إلى أمر محدد) تتألف من الفرجار المألوفة ومسطرة عدلة بلا تأشيريات فقط^(*). أن تبرير وتوظيف هذه الأدوات يستند إلى المسلمات الثلاثة الآتية. والتي ذكرت في بداية "عناصر" اقليدس:

لنسلم بما يأتي:

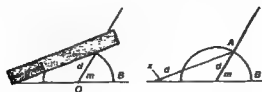
1. إن الخط المستقيم قد يرسم من نقطة إلى أية نقطة أخرى (مسطرة عدلة).
2. إن قطعة الخط المستقيم يمكن مدّها بأي امتداد على طول خط مستقيم (مسطرة عدلة).
3. إن الزاوية يمكن رسمها من أي مركز، وبأي مسافة من ذلك المركز (الفرجار).

لقد مارس اقليدس عمله بواسطة فرجار بدائي، أما الفرجار الذي نستخدمه في هذه الأيام فيمكن استخدامه، فقط، في المسلمات السابقة، وتمتلك القابلية على عمل إنشاءات أكثر سهولة. لحد ما، من تلك التي كانت لا لاقليدس.

يمكن إجراء الإنشاءات الممهودة للهندسة الاقليدية بواسطة الفرجار فقط في عام 1797، كتب الرياضي الايطالي، لورنزو ما شيروني Lorenzo Mascheroni، هندسة الفرجار Geometry of Compass، والتي برهن من خلالها بأن جميع إنشاءات المسائل التي يمكن حلها باستخدام المسطرة العدلة والفرجار، يمكن حلها بواسطة الفرجار فقط^(**). وتعرف هذه القضايا باسم "إنشاءات ماشيروني". وتدرج فيما يأتي مثالا بسيطا عن إنشاءات ماشيروني:

(*) الكلمة فرجاتر هي اسم جمع. مثل كلمات القصر، والبرول لأن كل منها يحتوي على فرعين. ورغم استخدام كلمة فرجار Compass لبيان كلمة Compasses فإن كلمة فرجار Compass، بهيكل محدد، هي أداة لتحديد الاتجاه (المؤلف).

(**) للحصول على برهان بأن المسطرة العدلة يعقدها تحمل أن تكون بديلا عن المسطرة والفرجار انظر كتاب.

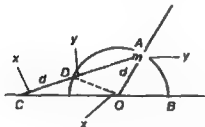


خطوة 4

خطوة 5

يمكن نسخ $x = \frac{1}{3} \angle m$ بطرق الإنشاء المعاد في $\angle m$.

البرهان:



1. المستقيم \overline{OD} قد رسم حيث $d=OD$.

2. المثلث متساوي الساقين DCO فيه زوايتي قاعدة

متطابقتان، وكذلك الحال بالنسبة للمثلث متساوي الساقين

ADO.

3. في المثلث DCO، $y=x+x=2x$.

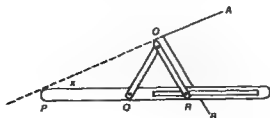
4. في المثلث ACO، $m=y+x$.

5. إذن $m=2x+x$ أو $x = \frac{m}{3}$.

إن هذا الإنشاء قد أصبح ممكناً لأن قواعد اللعبة (المسلمات) قد تم تغييرها. وقد عمد رياضيون في العصور السابقة، وآخرون في عصرنا الحالي إلى تغيير القواعد بصورة جذرية فانتجوا طرائق بارة وذكية لتقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية.

فقد اخترع الرياضي الفرنسي بليز باسكال Blaise Pascal آلة غير تقليدية للتقسيم الثلاثي للزاوية. إن القضبان قد مثلت بواسطة قطع المستقيمت \overline{PQ} ، \overline{QO} ، و \overline{OR} متساوية الأطوال. إن كل من O، Q، و R مركبات متحركة Movable Pivot، وتتحرك R على طول الشق. يمكنك أن تبرهن بسهولة أن:

$$x = \frac{1}{3} m \angle AOB$$

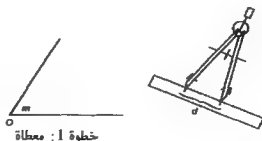


5. لكن، $2(AB)=AC$ ، $AB=AD$ ،

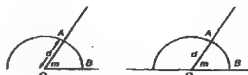
6. إذن، $AM = \frac{AB}{2}$ أو $AM = \frac{(AB)^2}{2(AB)}$

إن تصنيف قطعة مستقيم أو زاوية ما بواسطة الفرجار والمسطرة العدلة لا تزيد عن كونها أمراً بالغ السهولة. أما تقسيم قطعة المستقيم إلى ثلاثة أقسام فتتأخر بكونها أكثر صعوبة وتعقيداً، لكنها ممكنة. وقد أصعب المهندسين اليونان-الأوائل- بحيرة وارتباك عندما فشلوا في محاولاتهم المستمرة لتقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية بواسطة الفرجار والمسطرة العدلة فقط (نحن نتحدث هنا عن زاوية عامة General Angle. وليس زاوية خاصة مثل الزاوية القائمة، والتي يمكن تقسيمها إلى ثلاثة أقسام متساوية عن طريق إنشاء زاوية بقياس 60° ثم زاوية بقياس 30°).

إن إحدى التقانات الأكثر خصوصية في الرياضيات، هي تلك التي تعمل على تغيير التعليمات Regulations التي تعتمد إلى اتباعها. وعندما تصبح هذه المحددات قيوداً تكبل يديك عن فعل ما تريد. وعليه، إذا استخدمت أدوات الإنشاء التقليدية فانك ستفشل بالبحث عن حل لمسألة التقسيم الثلاثي Trisection Problem، ربما قد تكون هناك أدوات أخرى تستطيع إنجاز هذا العمل البارع. وهذا يعني، بالطبع، بأن مسلمات اقليدس الإنشائية ينبغي أن تعدل ويصار إلى تغييرها. اقترح أرخميدس Archimedes بأن من الممكن تقسيم زاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية بواسطة الفرجار والمسطرة العدلة والتي تحوي على تأثيرتين عليها، فقط. ويظهر فيما يأتي وصف لإنشاء أرخميدس، ويأتي من بعده البرهان.



خطوة 1: معطاة



لتكن المسافة بين التأثيرتين d.

إن اكتشاف هذه النظرية الرائعة والاستثنائية أقضت كاوس بالدخول إلى حقل الرياضيات كميدان عمل علمي استغرق طوال حياته بدلا من علم العلوم اللغوية التي كان متوقفا فيها أيضاً. أن نصبا تذكاريًا أقيم له في مدينة برونزويك Brunswick، حيث مسقط رأسه، تألف من متعدد أضلاع بسبعة عشر ضلعا 17-gon، ليرمز إلى إنجازهِ الكبير.

حساب مثلثات العملية: أصل الجيب

Practical Trigonometry: The Original Sin

بالرغم من أن اقليدس قد عرض في "عناصره" بأن المثلثين المتطابقين بالنسبة لضلعين وزاوية متضمنة هما متطابقان (SAS)، بعبارة أخرى، وأن مقياس هذين المثلثين ثابت عندما يكون قياس 'S'، A، و 'S' قد أعطى بهذا الترتيب؛ لكنه لم يبد اهتماما خاصا بإيجاد قياسات الأجزاء الثلاثة المفقدة من المثلثين.

ويصح الأمر، بصورة ماثلة، مع ASA و SSS. إن الفيلسوف-الرياضي اليوناني في عصر اقليدس لم يأخذ بنظر الاعتبار الهندسة "العملية" أو "التطبيقية" ولم يعرها أي اهتمام. وقد نجم عن هذا المنظور، تباطؤ ملحوظ في نمو ذلك الفرع من الرياضيات والذي عرف بحساب المثلثات^(*). ويصرف النظر عن الرأي الشائع تجاه أية دراسة جدية لهذا الموضوع، فإن حساب المثلثات قد نجحت بأن تولد بين اليونانيين. وأن مخترعها، هيباركوس Hipparchus (140 ق.م)، قد عانى من الحاجة إلى قياسات المثلث التي ارتبطت بعمله الدؤوب في ميدان علوم الفلك، وقد لجأ إلى تطوير تقانات لاحتساب مقياس أبعاد مثلث ثابت. ثم شارك مينيلوس Menelaus (100م) بتعميق المعرفة العلمية في هذا الحقل عن طريق تطوير "حساب المثلثات الكروية Spherical Trigonometry"، والتي تعني بقياس المثلثات على السطوح الكروية، والتي كان يأمن الحاجة إليها أثناء عمله في مضمرا علوم الفلك.

وبقي الأمر بانتظار بطليموس Ptolemy (150م) العالم الرياضي والفلكي الشهير الذي عاش في مدينة الإسكندرية، لإنجاز المساهمة الأساسية - الأولى في ميدان حساب المثلثات (بالارتباط مع الفلك، أيضاً) في كتابه "المجسطي" Almagest.

هناك إنشاءات أخرى حيرت اليونانيين، ولا زالت تحير الرياضيين الذي أتوا من بعدهم لمدة تزيد على 2000 عام. إحداها مسألة "تربيع دائرة Sequaring a circle"، التي تحتاج إلى إنشاء مربع تكون مساحته مساوية لمساحة دائرة. وأخرى، "مضاعفة حجم المكعب Duplication of the Cube" (مضاعفة الحجم). والتي تتطلب إنشاء مكعب بحجم يساوي ضعف حجم مكعب آخر. إن هذه المسائل تشابه إلى حد كبير، مسألة التقسيم الثلاثي، والتي برهن فقط في أوقاتنا الحالية بأنه لا يمكن أن تنشأ بواسطة الفرجار والمسطرة العدلة بمفردهما^(**).

إن إنشاءات أخرى قد تمتعت ويصعب نوالها بواسطة افضل الرياضيين لعدة قرون، بينما يمكن إنشاء أشكال محددة لمتعدد الأضلاع بتوظيف بسيط وسهل للأدوات الهندسية التقليدية، وأشكال أخرى مثل متعدد الأضلاع المنتظم ذو السبعة أضلاع، (heptagon, or 7-gon) أو ذو السبعة عشر ضلعا (17-gon)، والتي كانت في حينها صعبة النوال.

ففي عام 1796 برهن الشاب ذو الـ 19 عاما، كارل فريدريش كاوس^(*) إمكانية إنشاء متعدد الأضلاع المنتظم بسبعة عشر ضلعا، بواسطة الفرجار والمسطرة العدلة فقط، بينما لا يمكن إنشاء أشكال أخرى محددة مثل متعدد الأضلاع المنتظم بسبعة أضلاع (7-gon). إن ما استطاع "كاوس" البرهنة عليه هو إن الشكل متعدد الأضلاع - المنتظم بعدد أضلاع فردية قابل للإنشاء إذا تحققت إحدى الشروط الآتية:

شرط 1 Condition 1: عدد الأضلاع يساوي $2^n + 1$ ، حيث أن n هو العدد الكلي وأن $2^n + 1$ هو عدد أولي. ويمكن الحصول على أمثلة متنوعة في الجدول الآتي.

n	$2^n + 1$	هل يمكن إنشاء متعدد الأضلاع	عدد الأضلاع
0	3	نعم	3
1	5	نعم	5
2	17	نعم	17
3	257	نعم	257
4	65537	نعم	65537
5	ليس أوليا	كلا	—

الشرط 2 Condition 2: إن عدد الأضلاع هو حاصل ضرب عددين أو أكثر من تلك التي نحصل عليها من شرط 1. (تستطيع أن تنشئ متعدد الأضلاع-منتظم، بخمسة عشر ضلعا. لأن $15=3 \times 5$ ، وأن 5، 3 هي أعداد اشتقت من القاعدة الموجودة في الشرط (1)).

(*) يؤشر الحرف 'S' إلى الضلع Side، أما الحرف 'A' فيؤشر إلى الزاوية Angle - فأنته.

(**) اشتقت كلمة حساب مثلثات Trigonometry من الكلمتين اليونانيتين trigonon والتي تعني "مثلث"، وكلمة metria والتي تعني "قياس Measurement".

(*) للوقوف على برهان عدم إمكانية التقسيم الثلاثي للزاوية، انظر الوحدة الإثباتية 97

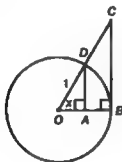
في هذا العمل، والذي يعني عنوانه "الأعظم The Greatest" حيث ظهرت الجداول المثلثية الواسعة والشاملة.

في هذا العمل، والذي يعني عنوانه "الأعظم The Greatest" حيث ظهرت الجداول المثلثية الواسعة والشاملة.

بقيت علوم المثلثات خادما أميناً لعلوم الفلك، وحتى عام 1464م. عندما كتب الرياضي الألماني يوهان مولر "Johann Muller" (والذي يعرف أيضاً باسم ريغيومونتانون) كتاباً يعالج المثلثات كموضوع رياضي صرف، نشأ عن نمو وتطور ياحدى جوانب علم الهندسة، قارنى العلم الجديد حدوده ويبرهن على أهليته وصلاحيته.

أضحى حساب المثلثات، في هذه الأيام، أداة مهمة في الرياضيات نتيجة للطبيعة التي تتقارن بها الدوال المثلثية كونها مناسبة للاستخدام في تحليل الظاهرة الفيزيائية التي تحدث بصورة دورية، كالكهربائية، والموسيقى، والضوء.

إننا نقول بأنه "قد تم حل مثلث A Triangle is Solved" عند احتساب قياس أبعاده الستة (ثلاثة زوايا وثلاثة أضلاع). وأن الأدوات الأربعة - الرئيسية - والتي تستخدم لحل المثلثات هي:

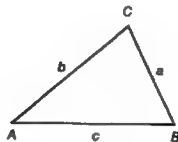


ب- اشتقاق الكلمة "جيب": إن قطعة المستقيم AD في الشكل التخطيطي هي نصف الوتر الذي يعرف بـ ajiva باللغة السنسكريتية. إن هذه الكلمة قد عثر عليها، للمرة الأولى، في الكتابات الهندية عام 510. وقد اخطأ المترجمون بكتابة هذه الكلمة كـ jaiv في اللغة العربية جيب أو حفرة. وقد ترجمت الكلمة العربية، في آخر الأمر، إلى الكلمة اللاتينية المكافئة لكلمة "حفرة = Sinus". وعليه فإن نصف الوتر، jiva، قد أصبحت كلمة جيب Sine، والتي يرمز إليها بالصفة المختصرة Sin.

ج- استخدمت صيغات محددة في تطوير الجداول المثلثية التي ظهرت في كتاب المجسطى Almagest. إن كثيراً من هذه الصيغات تتبع ما يأتي:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
3. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
4. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
5. $\sin \frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$
6. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

إن الصيغة السادسة، والخاصة بـ tanx، قد استخدمها الرياضي العربي الحبيب في عام 860 لإعداد الجدول الأول لتقيم الظل Tangents. (إن اشتقاقات هذه الصيغات نجدها



1. نظرية فيثاغورث.
2. مجموع قياس زوايا المثلث يساوي 180° .
3. قانون الجيوب: في أي مثلث ABC.
4. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
5. قانون جيبوس التمام: في أي مثلث ABC،

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac \cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{أو}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{أو}$$

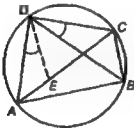
إن الجداول المثلثية، التي نستخدمها في هذه الأيام، في حل مسائل المثلثات تشابه الجدول السابق الذي اخترعه بطليموس. ولقد عرضنا الآن فكرة عامة عن كيفية تطوير بطليموس للجدول المثلثي، باستثناء استخدامنا لرموز واصطلاحات حديثة ومعاصرة (استخدم بطليموس قياساً ستينياً

1.4142 وبهذه الطريقة يستطيع المرء التحويل من جداول بطليموس للأوتار إلى دوال الجيب المعاصرة.
إن جيوب التمام والظل يمكن أن تحتسب، فيما بعد من الصيغات الآتية:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

يظهر فيما يأتي الخطوط العامة لبرهان يعرف بنظرية بطليموس Ptolemy's theorem، والتي اشتق من خلالها بطليموس مجموعة من الصيغات التي احتاج إليها في إنشاء جداول مثل $\sin(x+y)$, $\sin(x-y)$

نظرية THOREM إذا كان الشكل ABCD رباعي الأضلاع ومرسومًا في داخل دائرة، فإن مجموع حاصل ضرب الأضلاع المتقابلة يساوي حاصل ضرب قطريه.



المعطى: الشكل الرباعي ABCD مرسومًا في داخل دائرة، وقطريه \overline{BD} , \overline{AC} .

- برهن: $AB \times CD + BC \times AD = DB \times AC$
1. $\angle BDC \equiv \angle ADE$ أنشئ
 2. $\angle CDE \equiv \angle ADB$
 3. $\angle ACD \equiv \angle ABD$
 4. $\triangle CED \sim \triangle ADB$ ∴
 5. $\frac{CE}{AB} = \frac{CD}{DB}$ ∴ أو $DB \times CE = AB \times CD$
 6. بين أن $\triangle CDB \sim \triangle ADE$
 7. $\frac{AE}{BC} = \frac{AD}{DB}$ ∴ أو $AD \times BC = DB \times AE$
 8. من الخطوتين 5 و 7:

$$\begin{aligned} AB \times CD + BC \times AD &= CE \times DB + DB \times AE \\ &= DB(CE + AE) \\ &= DB \times AC \quad (\text{إ.م.و}) \end{aligned}$$

تمرين Exercise:

استخدم نظرية بطليموس لاشتقاق الصيغة:

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

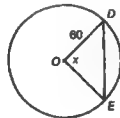
في أي كتاب مثلثات معياري).

د- احتسب بطليموس جدولًا لأطوال الأوتار لأقواس من 0° إلى 180° . وبخطوة قدرها $1/2^\circ$ ، وفي دائرة يساوي نصف قطرها 60 وحدة. وعليه، فقد أعطى جدولته قياس الوتر \overline{ED} والذي يقطع قوسًا لـ x° ، بقيمة تتراوح $0^\circ < x^\circ < 180^\circ$.

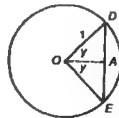
وقد ترجم قسم من الجداول، إلى نظرية يمكن تبسيطها بسهولة. إن أطوال الأوتار قد أعدت بالنظام الستيني، على سبيل المثال. فإن الرقم 2، 5، 40 بالنظام الستيني تصح:

$$2 + \frac{5}{60} + \frac{40}{60^2} = 0.0350 \text{ في العشري}$$

أوتار Chords	أقواس Arcs
0, 31, 25	$1/2^\circ$
1, 21, 50	1°
1, 34, 15	$1 1/2^\circ$
2, 5, 50	2°
2, 37, 4	$2 1/2^\circ$
3, 8, 28	3°
3, 39, 52	$3 1/2^\circ$



إن الجداول المثلثية المعاصرة، تعطي طول نصف الوتر \overline{AD} (siny =) للزاوية المناظرة 2y في دائرة بنصف قطر قدره وحدة واحدة.



وعليه. إذا تأملت قيمة جيب 45° في الجداول المثلثية الموجودة لديك، ستجد بأنها تكافئ 0.7071، بينما تظهر القيمة المناظرة في جداول بطليموس، بعد إجراء تحويلات مناسبة، والتي تخبرك بأن قوسًا بـ 90° تقطع وترًا بطول

لعبت المعادلات التربيعية وحولها دورا بارزا في تاريخ الجبر، فقد نجح البابليون، قبل غيرهم، في حل بعض أشكال المعادلات التربيعية قبل ما يزيد على 3600 عام، كما ظهر في الرقم الطينية الموجودة الآن ضمن مجموعة YBC6967 في جامعة ييل Yale University. أن ترجمة المسألة الموجودة على هذه الرقم تكافئ "جد مقاسات المستطيل الذي يزيد طوله على عرضه بمقدار 7 إذا كانت مساحته تساوي 60".

لم يستخدم الحل البابلي رموزا جبرية ولكنه قدم انموذجا أوليا Prototype لمسألة مشابهة. وعليه، فإن حل المعادلة التربيعية - البابلية:

$$x^2 + px = q, \quad q > 0$$

قد عرض في الرقم الطيني كما يأتي:

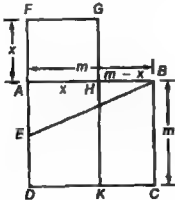
$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$

لذا، إذا كانت $y = \text{الطول}$ ، $x = \text{العرض}$ فإن المعادلتين، $xy = 60$ ، $y = x + 7$ وبعد استخدام تعويضات مناسبة، ستصبح وفق النوع البابلي $x^2 + 7x = 60$ ، وعليه، سيكون حل المسألة المعروضة:

$$x = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 9} - \frac{7}{2} = 5$$

حاول أن تقارن هذا الحل مع صيغة حل المعادلة التربيعية التي نكثر من استخدامها في هذه الأيام.

هناك معادلة تربيعية، أخرى، قد ناع صيتها، وعمد القليدس إلى حلها هندسيا في الموقع 11 من الكتاب الثاني من "المناصر".



قضية Proposition لتقسم خط مستقيم إلى قطعتين بحيث إن المستطيل المنشأ على الخط المستقيم وإحدى قطعه يساوي مربع القطعة المتبقية { بمعنى آخر، أن تقوم بتقسيم المستقيم $(AB = m)$ إلى مستقيمين x و $(m - x)$ بحيث يكون $\{m(m-x) = x^2$

المعادلات، يدرس إلى يومنا هذا. إن أول امرأة رياضية وردتنا أخبارها من الأزمنة القديمة هي هايبتايا (1410م) Hybataia والتي قد قامت بتدوين شروح وتعليقات على الأعمال الرياضية لدايوفانتوس.

في الجزء الآخر من العالم، اهتم علماء الرياضيات الهنود بطرائق حل المعادلات، وبالأخص المعادلات التربيعية. وتكمن أهم مشاركتهم في معالجة الموضوع باستمتاعهم في معالجة المسائل بطريقة غنية بالألوان. وسنعرض مثالا (وهناك المزيد من هذه الأمثلة في كتب تاريخ الجبر، والتي قد أدرجت في المصادر الموجودة بنهاية هذا القسم).

من مجموعة فواكه المانجو، اخذ الملك $\frac{1}{3}$ ، وأخذت الملكة $\frac{1}{4}$ المتبقي، وأخذ الأمراء الكبار - الثلاثة $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{7}$ من نفس المتبقي، وأخذ الطفل الصغير فواكه المانجو الثلاثة المتبقية. أو، يا من كنت بارعا في الكسور، اذكر عدد ثمار المانجو الموجودة في تلك المجموعة.

هيمن العلماء العرب - المسلمون على مسرح العلوم لجبرية في العصور القديمة ولمدة قرون. إن اكبر علماء المسلمين في الجبر ومن جهايزته هو محمد بن موسى الخوارزمي (825م) والذي يعد كتابه "الجبر والمقابلة" إماما ومرجعاً في هذا الميدان، ومصدرا لاشتقاق اصطلاح "الجبر". إن أهم الإسهامات العلمية لهذا العالم الجليل هو اختراعه للخوارزميات Algorithms بوصفها أداة رياضية فاعلة. وقد اشتقت كلمة الخورزميات من اسم العلامة الخوارزمي لكي تؤسس مكانته في تاريخ الرياضيات والجبر عبر الأجيال والقرون.

أصبح الإنتاج العلمي للخوارزمي وإبداعاته في ميدان الجبر معروفا وشامنا في أوروبا خلال القرن الثاني عشر، وبدأت خلال القرن السادس عشر الرموز التي نستخدمها في الجبر، هذه الأيام. تظهر ببطي، ويصار إلى تطويرها وصقلها. وندرج، في هذا المقام، مثلين على كيفية كتابة المعادلات في السنين المذكورة. وستلاحظ كم كان الأمر شاقا في كتابة هذه المعادلات والتعامل بها (م إلحاق الصيغ المعاصرة بين الأقواس).

$$1545: \text{cubus } P6 \text{ rebus aequalis } 20 (x^3 + 6x = 20)$$

$$1613: xxx + 3bbx = zccc (x^3 + 3b^2x = 2c3)$$

إن علامة "=" قد استخدمت للمرة الأولى بواسطة روبرت

ريكورد Robert Recorde (1557) في كتابه "The Whetstone of Witte". وفي عام 1637 اخترع رينيه ديكارت Rene Descartes رمز الأس الذي نستخدمه في حل العمليات الرياضية بوقتنا الراهن.

وقيمة كبيرة لكل هذه الاستخدامات.

- Beckmann, Petr. A History of π . New York: St. Martin's Press, 1971.
- Bell, E. T. Mathematics, Queen and Servant of Science. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1979.
- Bell, E. T. Men of Mathematics. New York: Simon & Schuster, 1937.
- Boyer, Carl B. A History of Mathematics. New York: John Wiley, 1968.
- Burton, David M. The History of Mathematics, An Introduction. Boston: Allyn and Bacon, 1985.
- Campbell, Douglas M., and John C. Higgins, Eds. Mathematics: People, Problems, Results. Belmont, CA: Wadsworth, 1984.
- Dunham, William. Journey Through Genius. New York: Wiley, 1990.
- Eves, Howard W. An Introduction to the History of Mathematics. New York: Saunders College Publishing, 1983.
- _____. The Other Side of the Equation. Boston: Prindle, Weber, and Schmidt, 1971.
- _____. In Mathematical Circles, Vols. 1 and 2. Boston: Prindle, Weber, and Schmidt, 1969.
- _____. Mathematical Circles Revisited. Boston: Prindle, Weber, and Schmidt, 1971.
- Gamon, George. One, Two, Three ... Infinity. New York: Viking Press, 1947.
- Gray, Shirley B., and C. Edward Sandifer. "The Sumario Compensio: The New World's First Mathematics Book." Mathematics Teacher 94 (2001): 98-103.
- Kaplan, Robert. The Nothing That Is: A Natural History of Zero. New York: Oxford University Press, 1999.
- Kasner, E., and J. Newman. Mathematics and the Imagination. New York: Simon and Schuster, 1940.
- Kelley, Loretta. "A Mathematical History Tour." Mathematics Teacher 93 (2000): 14-17.
- Lee-Chua, Queen N. "Mathematics in Tribal Philippines and Other Societies in the South Pacific." Mathematics Teacher 94 (2001): 50-55.
- Mathematics Teacher 98 (November 2000) the entire issue.
- Moritz, R. E. On Mathematics: A Collection of Witty, Profound, Amusing Passages about Mathematics and Mathematicians. New York: Dover, 1958.
- National Council of Teachers of Mathematics.

الحل Solution

1. أنشئ المربع ABCD على قطعة المستقيم \overline{AB} .
2. قم بتصنيف قطعة المستقيم \overline{AD} عند E وارسم \overline{EB} .
3. مد \overline{AD} خلال A إلى النقطة F بحيث $\overline{EF} \equiv \overline{EB}$.
4. أنشئ المربع AFGH على قطعة المستقيم \overline{AF} .
5. مد المستقيم \overline{GH} بحيث يقطع المستقيم \overline{DC} في نقطة K.
6. إذن المستطيل HBCK يساوي في مساحته المربع AHGF.

البرهان PROOF

1. $\overline{AF} \equiv \overline{ED}$ (لأن E هي نقطة منتصف).
2. مساحة المستطيل $FGKD = (EF + ED)(EF - ED)$.
3. مساحة المستطيل $FGKD = EF^2 - ED^2$.
4. مساحة المستطيل $FGKD = EF^2 - AE^2$.
5. $\therefore FGKD + AE^2 = EF^2$.
6. $AB^2 + AE^2 = EB^2 = EF^2$ (لأن $EB = EF$ وإن المثلث AEB هو مثلث قائم الزاوية).
7. $\therefore AB^2 + AE^2 = FGKD + AE^2$ أو $AB^2 = FGKD$.
8. $\therefore FGKD = AH^2$ (يطرح FGKD من طرفي المعادلة (١-٥)).

إن ما فعله أقليدس في هذا الموضوع، تمت ترجمته إلى رموز جبرية، لبيان كيفية تقسيم قطعة المستقيم AB إلى قطعتين x و (m-x) بحيث $m(m-x) = x^2$ ، وأن القطعة AH، أو x، هي العدد المطلوب. ونحن الآن عبر استخدامنا الصيغة التربيعية التي تنص بأن:

$$x = \frac{m(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

إن الذين ينتهون خارج الدائرة رياضيات المدارس الثانوية يعلمون بأن الجبر قد أصبح أداة فاعلة في حل المسائل عبر نظرية الزمرة والجبر الخطي.

ملاحظات تاريخية Historical Notes

إن الزينة التي تنتج عن إدراج الملاحظات والتعليقات التاريخية في درس الرياضيات قد تمد إثراء في مفرداته. وعادة ما يفضل الطلبة الموضوع ويميلون إليه إذا توفرت أمامهم فرصة لإقامة العلاقة مع الأصول والموارد التي نشأ عنها. إن أي كتاب يعالج موضوع تاريخ الرياضيات قد يزودك بأفكار مفيدة تساعد على إثراء تدريسك عبر إدراج حكايات ونوادر مختصرة أنتجت بنعاية من تاريخ الرياضيات. إن المراجع الآتية تعد ذات فائدة

وستوفر لهم فرصة كافية ليدققوا ويمعنوا النظر في تلك الأفكار أو ما وراء نمو هذه الآراء وتطورها، خلال فترة الدرس النظامية. وعليه، فإنهم سيمارسون المزيد من الاستكشافات والتنتقيات، ويقيمون علاقات خارجة عن دائرة الرياضيات وعلومها.

تطبيقات ذات صلة Relevant Application

إن غالب التطبيقات العملية، التي تتم دراستها بكونها ذات صلة بالرياضيات، توفر موردا مفيدا ومثاليا للإثراء، وكما توضحه الأمثلة الآتية.

موضوع جمع الكسور وضربها

إثراء: حساب احتمالات بسيطة بعد تطوير بعض العايب الاحتمالات التي تعد في الصف (مثال، اختيارات بطاقات من مجموعة أوراق اللعب، أو قذف قطعة نقود أو حجر النرد). إن القدرة الإبداعية والخلاقة لدى المعلم تحتل أهمية بارزة في إنجاح هذا الأمر.

موضوع النسبة المئوية Percentage

إثراء: تتضمن حساب وتخمين الإعلانات في الصحيفة اليومية نسباً مئوية (مثال، البهيمات، وإعلانات، المصارف). إن استخدام هذه التحريات، بصورة جيدة، سيكون عاملا للتحفيز ونحو صلة مباشرة بالموضوع. وقد أظهر نتائج باهرة بين الحين والآخر.

موضوع استخدام الصيغات Using Formulas

إثراء: دع الطلبة يباشرون عمليات احتساب: مساحة أرضية مبنى، أو الفائدة التي يمنحها احد المصارف، أو حجم جسم غير منتظم من البيئة التي تحيط بهم. ويفضل أن تجرى الحسابات على ارض الواقع، كلما كان ذلك الأمر ممكنا، لكي تكون المعاني التي تكمن وراء هذا النشاط أكثر قربا من أذهان الطلبة.

موضوع قراءة جداول Reading Tables

إثراء: يزود الطلبة بمسائل حقيقية وباستخدام مخططات المسافة المالية Mileage Charts، معدل قوائم أسعار الحوالة البريدية، ومعدل قوائم أسعار خدمة الهاتف، وقوائم الحافلات، وقوائم ضريبة الدخل، الخ. ويفضل أن تتعلق هذه الأمور بحالات ميدانية، كلما كان الأمر ممكنا.

موضوع المفاهيم الأساسية للهندسة

إثراء: قياسات مباشرة وغير مباشرة لهياكل وبنى محلية. ينبغي

Historical Topics for the Mathematics Classroom. 31st Yearbook. Reston, VA: NCTM, 1969.

Norwood, Rick, "A Star to Guide Us." Mathematics Teacher 92 (1999): 100-101.

Posamentier, Alfred S., and Noam Gordon. "An Astounding Revelation on the History of π ." Mathematics Teacher 77 (1984): 52.

Resnikoff, H. L., and R. O. Wells, Jr. Mathematics in Civilization, New York: Dover, 1984.

Schaaf, William L., Ed. Our Mathematical Heritage. New York: Macmillan, 1963.

Stillwell, John. Mathematics and Its History. New York: Springer-Verlag, 1989.

Turnbull, H. W. The Great Mathematicians. New York: New York University Press, 1961.

Veljan, Darko. "The 2500-Year-Old Pythagorean Theorem." Mathematics Magazine 73 (2000): 259-272.

Willerding, Margaret. Mathematical Concepts. A Historical Approach. Boston: Prindle, Weber, and Schmidt, 1967.

إن بعضاً من هذه الكتب سوف يقدم يد العون لاستخلاص النواذر والحكايات بصورة سريعة لاستخدامات الصف، وسيتطلب البعض الآخر قراءة أكثر دقة. إن هذه الكتب سوف تزودك بموارد إثرائية وافرة من خلال توظيف الحكايات والوقائع التاريخية.

تقانات الإثراء لجميع المستويات

Enrichment Techniques For All Levels

إن لب المنهج الدراسي "للمعالمير" يقترح بأن يعرض جميع الطلبة إلى نفس الموضوعات الرياضية، رغم تميزها بمستويات التجريد الخاصة بالمهام والمبادئ. وتتوفر فرص كافية لإثراء التدريس في جميع المستويات وبالأخص، عندما تكاملها مع تطبيقات الحياة اليومية.

سيحدد المعلم مقدار التحرك من دائرة الواقع للموس إلى التجريد لكل طالب، وهل سيتوجه صوب مجاميع الطلبة الصغيرة أو الواسعة، وطبيعة عمل المشاريع، أو المحاضرات. وتبقى المرونة المفتاح الأساسي للإثراء المنتج والفعال.

عندما تدخر الأنشطة الإثرائية للمجاميع الصغيرة، تستطيع كل مجموعة محددة أن تتحرك وتعمل في ضوء طريقتها الخاصة. وسيعمد الطلبة إلى التفتيح في الأفكار والآراء مع زملائهم بالصف الذين يمتلكون اهتماما وميلا نحو نفس الأفكار.

دائما بأن جوانب الاستجمام في الدرس قد صممت للإثراء فحسب، وليس لاستبدال المنهج الدراسي المنتظم.

رحلات ميدانية Field Trips

إنه من غير المألوف التفكير في الرحلات الميدانية كوسيلة لإثراء برنامج تعليم الرياضيات. ومع ذلك فإن مثل هذه الأنشطة لا تقتصر فقط على صف الدراسات الاجتماعية. فهناك مواقع قد تدعم تعلم الرياضيات وتزده ثراء. على سبيل المثال، إذا كانت الاحتمالات هي الموضوع قيد الدراسة داخل الصف، فإن رحلة إلى موقع قريب لحلبة سباق، حيث يفترض أن تركز عملية المراهنة إلى أرجحية فوز حصان ما، قد تكون مناسبة ومثيرة للاهتمام. وهناك عدة صفوف تقوم بزيارة الأماكن الخلفية والكواليس لرؤية كيفية حساب المراهات عن كثب.

إن المواقع التي يمتاد زيارتها ستكون للوقوف على استخدام الرياضيات في الصناعة، وأعمال التأمين، والهندسة، والعمارة، والأعمال، وبرمجة الحاسوب، ... الخ وينبغي في كل حالة من هذه الحالات، وقبل بدء الرحلة الميدانية، تهيئة جلسة مناسبة للصف، وقد تكون هذه الجلسة، في كثير من الأحيان، بنفس أهمية الرحلة التي سيقول عليها الطلبة، يستطيع المعلم أن يقدح اهتمامات الطلبة باستخدام وسائل سمعية - بصرية، تشمل مواقع الانترنت للمكان الذي خطط لزيارته في الرحلة. قد يريد المعلم أن يطبق مبادئ الرياضيات التي تمت دراستها بصورة مكررة في الصف، عبر إجراء تجارب خارجة. على سبيل المثال، قياس مساحة موقع الرياضة، أو تحديد ارتفاع عمود الراية على بناية قريبة، أو حساب ارتفاع أحد أبراج البنايات، كلها ستكون تطبيقات مناسبة بميدان حساب المثلثات الأولية. إن مثل هذه الرحلات الميدانية سوف تكسب بوضوح فائدة الرياضيات التي يتم تعلمها داخل الصف وأهميتها البالغة في دائرة الحياة اليومية.

إن عملية التخطيط المسبق للرحلة مع الصف هي العامل الأكثر أهمية، لأنه عندما يساهم الطلبة في عملية التخطيط للرحلة سوف تتوفر لديهم معرفة كافية ودقيقة بماهية الأهداف المتوخاة من الرحلة وما تصبى إلى تحقيقه في درس الرياضيات، كذلك فإنهم سيعتمدون إلى التركيز على وقتهم، أثناء الرحلة، بصورة جيدة.

وينفس أهمية التخطيط المسبق للرحلة، ستكون أهمية الجلسة التي ستلي الرحلة، والتي سيتم خلالها التعرض لكل ما تم تعلمه خلالها. إن التنفيذ والإنجاز السليم للمخطط وحسن إدارة أنشطته الميدانية سيجعل من الرحلة الميدانية أداة لإثراء وتعزيز

أن يكلف الطالب بحساب مساحات، وحجوم، ... الخ، من البيانات التي تم جمعها ميدانياً.

الرياضيات الاجتماعية Recreational Mathematics

تعد الرياضيات الاجتماعية إحدى أشكال الإثراء في مادة الرياضيات، لأن كل شيء ذو صلة بالاستجمام غالباً ما يشد اهتمام الطلبة. لذا، فإن الموضوعات الرياضية التي تم تدريسها يمكن أن تدعم بصورة متحمسة على هيئة استجمام يقبل الطلبة على ممارستها.

موضوع تبسيط الكسور

إثراء: اعرض بضعة قواعد التقسيم لتسهيل إدراك العوامل المشتركة (انظر الوحدة الإثرائية 84).

موضوع التمرن على الإضافة

إثراء: يمكن استخدام أشكال متنوعة من المربع السحري Magic square (انظر الوحدة الإثرائية 2، 1) لتعزيز حقائق الإضافة من خلال مسائل غير تقليدية.

موضوع تدريب حسابي - عقلي متنوع

إثراء: إن أنماطاً وألغازاً محيرة ومتنوعة، والتي تتطلب من الطلبة إجراء حسابات كجزء من النشاط، تساهم في إثراء موضوع يؤثر الفجر. وتتألف هذه الأشياء من ألعاب تثير روح التنافس، وألغاز على شكل أنشطة فردية. وهنا تظهر قيمة الإثراء بوصفه أداة لضمان النجاح الأمثل للصف مع العمل المنظم. نظراً لأن الطالب المحفز سيؤدي عملاً أفضل من الطالب الذي قد أدار ظهره للرياضيات ولم يعد يابه لها.

موضوع أنشطة آلة حاسبة متنوعة

إثراء: ينبغي أن يتم اختيار ألعاب وألغاز مناسبة يتم التعامل معها بواسطة آلة حاسبة (انظر الوحدة الإثرائية 11) شريطة أن يكون الاختيار دقيقاً.

من السهولة السقوط في فخ ترك جوانب الاستجمام للدرس (بمختلف أشكالها) تهيم على جلسة الصف. وعندما تتعود وتألف هذا النوع من المبالغة في توظيف الاستجمام داخل النشاط الصفّي، سوف يتقلب هذا الأمر إلى عكس ما أريد منه، بحيث أن أية محاولة للعودة إلى المنهج الدراسي المقصود سوف ينظر إليها الطالب بشي، من الاستياء والغضب. لذا ينبغي أن نتذكر

لاشك بأن أكثر الخبرات المكافئة لمعلم الطلبة الموهوبين ستكون عندما يلاحظ طالبا ينجح اكتشافا أو يطور أسلوبا غير مألوف في تناول موضوع أو مسألة ما. إن هذه البصيرة الفريدة التي يبدئها الموهوب ينبغي أن يحتضنها المعلم ويعد إلى تمتيعها من خلال أنشطة إثرائية ينتهجها بعناية ودقة. يمكن تصنيف الأنشطة الإثرائية المخصصة للطلبة الموهوبين إلى ثلاثة أصناف: التسريع، والتوسع، والاستطرد.

التسريع Acceleration

يتضمن التسريع، غالبا، نقل الطلبة الموهوبين عبر المنهج بسرعة أكبر من تلك التي تعتمد مع بقية الطلبة. وهذا يعني مباشرة دراسة الجبر الأول في مرحلة مبكرة ثم تمكين الطالب من الوصول إلى حساب التفاضل والتكامل (وفي بعض الأحيان إلى موضوعات متقدمة) رغم وجودهم في المدارس الثانوية. وقد تعني أيضا استكمال المساقات الدراسية - السنوية خلال فترة تقل عن ذلك بكثير، لتوفير مساحة لدراسة موضوعات متقدمة في وقت مبكر.

لاشك بأن القوائد المتوخاة من هذا الإجراء تكمن في إتاحة الفرصة أمام الطلبة الموهوبين في معاناة روح التحدي والمنافسة، بصورة مناسبة، ومن ثم الحد من ظاهرة غياب الاهتمام الناجم عن محدودية المنهج الدراسي المخصص للطلبة ذوي القابليات الاعتيادية.

في المقابل هناك مخاطر محتملة ينبغي مراقبتها عند تسريع الطلبة الموهوبين فإذا كان التسريع سريعا جدا، فقد يكلف الطالب بالعمل مع مواضيع بالغة التجريد، بسرعة كبيرة، وخلال حقبة زمنية قصيرة، الأمر الذي قد ينشعب عنه، عدم جاهزية الطالب للإجتاز. إن هذه الظاهرة قد تكون ذات نتائج عكسية وتطول فترة تأثيرها السلبية على الطالب/ الطالبة. وينبغي أن لا تقتصر متابعة المعلم على مراقبة استعداد الطالب، ولكن يجب أن تكون موجهة صوب التحفيز الذي يحتاجه أي طالب، بغض النظر عن قدراته.

إن الطالب الذي قد تم اعتباره موهوبا، ينبغي أن لا يدفع بقوة خلال مسار تم تحديده بصورة مسبقة. وإذا لم يتم تحقيق توازن متناسب بين الميول والقدرات، فسيظهر احتمال قوي بأن هذا الطالب الموهوب سيصبح بوجهه عن الرياضيات ويتأدراها إلى غير رجعة. وبصرف النظر عن طبيعة التسريع ودرجته فإن المراقبة الحذرة للطالب (أكاديميا واجتماعيا) تتبوأ أهمية كبيرة. وينبغي أن يكون المعلم متيقظا إلى علامات وإيماءات قد تشير إلى إن الطالب قد غالى بالتوسع الرياضي، أو غالى في بذل

الرياضيات التي تدرس في الصف إلى دائرة الواقع للموس.

شبكة الإنترنت The Internet

تتوفر تطبيقات لا حصر لها على شبكة الانترنت توفر مناخا مناسباً لإثراء البرنامج التدريسي. إن محاولة إعداد قوائم بمواقع الويب المتاحة على الشبكة سوف يعاني من التقادم بسرعة كبيرة، بسبب ظهور أعداد كبيرة من المواقع على شبكة الانترنت، كل يوم، كما أن بعض المواقع القديمة قد تختفي من ساحة الشبكة المعلقة. تعد المنظمات المحلية للمعلمين، وال NCTM موارد مفيدة وجيدة. أهم المواقع في الوقت الحالي.

- إن مواقع الانترنت ذات الصلة بالموضوع سوف:
- توفر ملاحظات تاريخية
- الاشتراك بأفكار التعليم.
- عرض دروس نموذجية (معززة بالوسائط المتعددة).
- إدراج أفكار للأنشطة الإثرائية.
- تزويد مسائل تحدي.
- اقتراح ارتباطات مع صفوف أخرى في مواطن أخرى من البلاد أو في بلدان أخرى حيث تتم المشاركة معهم بالأراء والأفكار.
- تزويد أفلام فيديو لتطبيقات في الرياضيات.
- إرشاد وتوجيه الطلبة الموهوبين من خلال أنشطة بحوث رياضية.
- عرض ارتباطات بين مواقع مختلفة و/أو موضوعات في الرياضيات.
- آراء وأفكار أخرى لا يحصرها خيال!

الطالب الموهوب The Gifted Student

يعد الطلبة ذوي مواهب متقدمة بالرياضيات عندما: يظهرون حذقا وإبداعاً، وحب استطلاع فكري، وموهبة إبداعية، ووفرة على الاستيعاب والتعميم، ومستوى عال من الإنجاز الرياضي. غالبا ما يشارك الطلبة الموهوبين في الرياضيات في أنشطة خارج نطاق المنهج الدراسي للرياضيات فتظهر لديهم رغبة عميقة في مطالعة كتب الرياضيات، والمجلات الدورية، وكتيبات متنوعة وكراسات. إن هذه الأنشطة المستقلة قد تؤدي إلى إكذاء مزيد من التفاني وروح التحدي بينهم في مواصلة ومتابعة دراسة مواضيع في الرياضيات قد تكون خارج نطاق المنهج المألوف، أو جزءا متقدما من المنهج الدراسي (والتي قد تدرس في أيام قادمة من المنهج الصفي).

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

بالنسبة للطلبة ذوي المواهب الفريدة، قد تكون الحالات العامة ذات فائدة كبيرة.

1. بالنسبة لقيم n الفردية:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1})$$

2. بالنسبة لجميع قيم n :

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1})$$

3. بالنسبة لقيم n الزوجية:

$$x^n - y^n = (x^2 + y^2)(x^{n/2} - y^{n/2})$$

يمكن تزويد أمثلة إضافية عن التحليل المعقد لكي يجرب الطلبة حلها، مثل:

$$y(y-1)x^2 + (2y^2-1)x + y(y+1),$$

والتي يمكن تحليلها عاملًا كما يأتي:

$$(xy + y + 1)(xy - x + y)$$

إن مصدرا مفيدا لبعض من أمثلة مسائل التحليل العاملي

غير المألوفة هو:

Hall, H.S., and S.R. Knight, Revised by F.L. Sevenoak, Algebra for Colleges and Schools, New York: Macmillan, 1941.

وبشكل عام فإن هناك كتباً قديمة في الجبر تحتوي على مادة مماثلة.

موضوع حساب مثلثات

إثراء: يستطيع معلم مادة حساب المثلثات أن يوجه طلبته نحو توسيع قانون الجيوب إلى قانون الزوايا.

بعد توضيح قانون جيوب تمام، يمكن عرض بعض حلول مسائل المثلثات المعقدة بوصفها توسعا للمسائل الاعتيادية الموجودة في الكتب المنهجية الحالية.

مرة ثانية، توفر الكتب المنهجية السابقة موردا خصباً للتوسع في موضوع ما. إن أحد هذه الكتب في حقل المثلثات هو: Kells, L.M., F.K. Willis, J.R. Bland, and J.B. Orleans, Elements of Trigonometry, New York: McGraw Hill, 1943.

موضوع هندسة الدائرة

إثراء: إن التوسع الوحيد التاح لهذا الموضوع قد يتضمن مناقشة تعريف وتاريخ π ، بدءاً بمصادرها في الإنجيل (1 Kings 7:23) وتتمتع تطورها لغاية الطرق والمناهج

الجهود والعمل، أو قد أقصى نفسه اجتماعيا. وبدون الاهتمام والرعاية التي ينصح باستعمالها، والتي ستكون عملية التسريع من خلالها ذات فائدة ملموسة، وبدون هذا الاهتمام والرعاية المناسبة قد تتحول هذه العملية إلى أدى يصعب علاج آثاره الوخيمة.

التوسع Expansion

يشير التوسع إلى شكل من الإثراء يتيح للطلاب أن ينقب بعمق في مادة الموضوع ومفرداته التي يدرسها في الصف. إن مثل هذا التوسع في المنهج الدراسي القياسي قد يحصل، بصورة أولية، كجزء من تعليم الرياضيات داخل الصف، ولكنه قد يكون جزءاً من البرنامج غير المنهجي. دعنا نلقي نظرة فاحصة على بعض أمثلة.

موضوع نظرية فيثاغورس (مساق دراسي في هندسة المدارس الثانوية)

إثراء: سيتمح التوسع للطلاب دراسة أي أو جميع ما يأتي:

1. تحري واستكشاف مجموعة متنوعة من براهن نظرية فيثاغورث.

2. تحري واستكشاف توسيع نظرية فيثاغورث بحيث تشمل المثلث حاد الزاوية، والمثلث منفرج الزاوية (يعني، بالنسبة للمثلث حاد الزاوية $c^2 > a^2 + b^2$ ، وبالنسبة للمثلث منفرج الزاوية $c^2 < a^2 + b^2$).

3. دراسة بعض خواص ثلاثية فيثاغورث Pythagorean Triples بالبدء مع صيغات توليد هذه الثلاثيات:

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2mn$$

$$c = m^2 + n^2 \quad \text{حيث } n < m$$

4. تصنيف الأنواع المختلفة لثلاثيات فيثاغورث، على سبيل المثال، بالكشف عن القيم التوليدية لكل من m و n التي تنتج ثلاثيات حيث $|a-b|=1$ أو $|b-c|=1$ ، وهكذا.

5. تأمل علاقة نظرية فيثاغورث ببقية الموضوعات في حقل الرياضيات (مثال، حساب المثلثات، ونظرية بطليموس، ومعادلات دايوفانتين).

6. تعميم نظرية فيثاغورث على قانون جيوب تمام.

موضوع التحليل العاملي

إثراء: إن توسيعاً ينشأ عن تقانات التحليل العاملي التقليدي (مثل التحليل العاملي للفرق بين مربعين) قد يتيح للطلاب اعتبار بعض الأنواع الخاصة من التحليل العاملي، مثل:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

(*) للحصول على تيسير متع لهذا المرجع، انظر:

An Astounding Revelations on the History of π , by:

A.S. Posamentier and N.Gordon, The Mathematics Teacher 77.

(Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, January, 2984, P.52).

موهوبين يستطيع غالبا إتقان موضوع بوتائر أسرع بكثير من الصف التقليدي، سيتوفر المزيد من الوقت لمناقشة مواضيع أخرى ذات صلة بالموضوع الأول قبل الاستمرار بإكمال المقرر الدراسي المنهجي.

تمتاز هذه الاستطرادات بفوائد تربوية جمة، وقد تستغرق أوقاتا تتراوح بين جزء محدود من جلسات الدرس إلى عدة جلسات.

وكما هو الحال مع بقية الأنشطة الإثرائية التي نوقشت سابقا، ينبغي أن يوظف الاستطراد لإثراء المنهج الدراسي القياسي، دون أن يخرج عنه. وغالبا ما تكون هذه الأنشطة الإثرائية فائقة وساحرة، بحيث تؤدي من ناحية أخرى، إلى إظهار النهج الدراسي أقل إغراء وبلا جاذبية. لذا فإن المعلم، الذي يحي هذه الإمكانية، يجب عليه أن يحاول، باستقرار، إقامة علاقة بين الاستطراد والمنهج الدراسي القياسي بحيث، بدلا من تثقله وإنقاص الاهتمام به، يسمى إلى جعل موضوع الإثراء سببا لتزنيته وتقريبه إلى الطلبة: ينبغي أن تسهم الأمثلة الآتية في مساعدة وتوفير فهم أفضل لما تعنيه أنشطة الإثراء التي تعد استطرادا عن المنهج الدراسي المعتاد.

موضوع الهندسة (المدارس الثانوية الدنيا أو المتوسطة)

إثراء: إن المعالجة المناسبة والمتأنية لموضوع الشبكات Network قد تكون استطرادا مغيدا من الهندسة العامة Informal Geometry. ومع الهدف المحتمل عند استكشاف مسألة جسر كونسبرغ Königsberg Bridge Problem. وقد تكون دراسة الشبكات مليئة بالإثارة، وتؤدي إلى تحريات طوبولوجية ذات الصلة بالموضوع (انظر "شبكات"، وحدة إثرائية 96).

موضوع المثلثات (مستوى المدارس الثانوية العليا)

إثراء: بعد أن يمتلك الطالب معرفة تطبيقية جديدة بحساب المثلثات المتضمنة في المنهج الدراسي القياسي، يصبح الاستطراد الممتع النشاط الإثرائي الذي يتيح للطالب فرصة دراسة حساب المثلثات الكروية. ومع ذلك فإن هذا الأسلوب من الاستطراد قد يؤدي إلى فهم أكثر كمالا بحساب المثلثات.

موضوع القزامن

إثراء: نظرا لأن موضوعات القزامن والاستقامة Collinearity قد أعملت في سلق الهندسة الدراسي بالمدارس الثانوية العليا، فإن استطرادا يهدف دراسة هذه الموضوعات بصورة أكثر تفصيلا

الحديثة الخاصة بالحاسوب. إن مناقشة حسابات π سوف تؤدي إلى عدة تحريات ممتعة (مثال، انظر إنشاء π في وحدة إثراء 59).

موضوع الاحتمالات

إثراء: يمثل البساطة التي يتسم بها بيان مسألة الميلاد Birthday Problem ستكون الصعوبة التي تشخص أمام فهم وإدراك هذه الظاهرة غير التقليدية. أن تطوير الاحتمالات المختلفة تصنع توسعا جميلا لاحتمالات الأولية، وقد تؤدي بالطلبة وترشدكم نحو تحريات أخرى ذات صلة بالموضوع (انظر: مسألة الميلاد، وحدة إثراء 31).

موضوع TOPIC إنشاءات المثلث

إثراء ENICHMENT بصورة عامة فإن الإنشاءات الهندسية الوحيدة (باستخدام المسطرة والفرجار والمثلثات في هندسة المدارس الثانوية هي تلك التي تعد من قياسات معينة لأضلاع وزوايا. إن توسيع هذه القيم المعينة بحيث تتضمن قياسات احد منصفات الزوايا الثلاثة أو المستقيم المتوسط، أو الارتفاع، أو أجزاء الأخرى من المثلث - ذات الصلة، سوف تؤدي بالطلبة إلى فهم أكثر أصالة وعمقا بخصائص المثلث. وتستطيع البدء بالاطلاع الشخصي على هذا الموضوع بقراءة (إنشاءات مثلث - وحدة إثراء 38). ويمكن الحصول على معالجة موضوعية عميقة وخصبة لهذا الموضوع التفهيم جدا في كتاب

Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Students and Teachers, by: A.S. Posamentier (Emeryville, CA: Key Collage Publishing, 2002).

في كل من الأمثلة السابقة حول الإثراء من خلال التوسع في موضوع من المنهج القياسي، ستلاحظ بأن المناقشة كانت محددة دائما بتزني وزخرفة الموضوع الأصلي دون أن تكون استطرادا نحو موضوع آخر. إن الحالة الأخيرة (الاستطراد) هي الشكل الأخير من الإثراء المخصص للطلبة الموهوبين، والذي سيكون موضوعا لمناقشة.

الاستطراد Digression

إن شكلا شائعا من الإثراء ينشأ، بصورة عامة، عندما يعد المعلم إلى الاستطراد من موضوع في المنهج الدراسي الأصلي لاعتبار موضوع آخر ذو صلة به، ويكون عموما نتيجة أو نغوا مباشرا للموضوع الأول. نظرا لأن الصف الذي يضم طلبة

استخدام الآلات الحاسبة في إثراء التدريس Using Calculators To Enrich Instruction

تحدي حب الاستطلاع غير الاعتيادي Investigating Unusual Curiosities

بمساعدة الآلة الحاسبة، فإن كثيرا من أمور حب الاستطلاع الرياضي-المتع (وغالبا من دون تنفيذ) والتي تتطو على سطح خبرات المواطن العادي-اليومية قد تغد بوصفها تطبيقات معتارة في رياضيات المدارس الثانوية العليا. على سبيل المثال، فإن إعلانات المصرف تلقي الضوء على "العائدات الاستثمارية السنوية المتحققة" بعد بيان مقدار الفائدة التي تمنحها. وأن القيام بتفحص أربعة من هذه الإعلانات سيظهر العائدات الاستثمارية السنوية الفعلية لفائدة سنوية مقدارها $5^{1/4}$ مركبة يوميا: 5.35%، 5.39%، و 5.46%. إن إخراج إعداد أيام متغيرة (في سنة)، n، في أجزاء مختلفة من الصيغة الآتية :

$$I = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$

سينشأ عنه إجابات متنوعة. سوف يشجع توفر الآلة الحاسبة على ممارسة هذا النوع من الاستكشاف. من جهة أخرى قد يتضمن نوع آخر من الاستكشافات احتساب تأثير حسم ضريبة الدخل على الأفراد في فئات ضريبة الدخل المختلفة.

إن مثالا "في المعايير" قد بين كيف أن نفس المحتوى يمكن عرضه على عدة مستويات مختلفة رغم أن استراتيجيات التعليم سوف تعاني من تغييرات وفقا لمستويات: الفائدة، والمهارات، والأهداف.

إن وصفا مختصرا للمثال سندرجه أدناه.

مثال EXAMPLE: تأمل مسألة إيجاد كمية النقود التي ستكون في حساب التوفير بعد انقضاء عشرة سنوات، إذا كان المبلغ الأساسي المودع (\$100) وكان مقدار الفائدة المركبة السنوية (6%).

عند المستوى 1 في المنهج الدراسي الأساسي، يستخدم الطلبة الآلات الحاسبة لحل المسألة بواسطة احتساب المبلغ بعد كل سنة متتالية. وقد يلجأون إلى استخدام الصحائف الممتدة Spreadsheet على الحاسوب. يمكن أن يشجع الطلبة على إيجاد النمط الكامن، على سبيل المثال:

$$\text{المبلغ عند نهاية السنة 1} = 100(1.06)^1$$

$$\text{المبلغ عند نهاية السنة 10} = 100(1.06)^{10}$$

عند المستوى 2، سيلجأ الطلبة إلى تعميم هذه المسألة على

قد يكون ذو أهمية بالغة. وستسهم نظريتا جيوفاني سيفا Giovanni Ceva (1647–1736) ومينالاس الإسكندرية (100)م Menelaus of Alexandria في أن نقودنا إلى ظواهر هندسية أكثر إمتاعا.

وللبد، بالاطلاع الذاتي على هذه الموضوعات، انظر: (البرهنة على تلاق مستقيمين" وحدة إثراء 53، و "البرهنة على استقامة نقاط"، وحدة إثراء 55). وإذا أردت أن تستزيد من أفكار أخرى، يمكن الرجوع إلى:

Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Students and Teachers, by: A.S. Posamentier (Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002).

موضوع المعادلات التربيعية (الجبر)

إثراء: بعد استكمال دراسة الطرق المختلفة التي تستخدم في حل المعادلات التربيعية، قد يرغب الطلبة بتعلم كيفية حل معادلات بدرجات أعلى. إن اعتبار بعض الأساليب لحل المعادلات التكعيبية قد يشكل أمرا تنويريا بالنسبة للطلبة الموهوبين. وسيؤدي هذا الأسلوب من التحري بهم إلى تقدير عمل الرياضيين القدماء (على سبيل المثال، نيكولو تارتاجليا Nicolo Tratataglia (1506-1557)، (انظر: قسم الآلة الحاسبة، في هذا الفصل).

موضوع المقاطع المخروطية (مدارس ثانوية متقدمة).

إثراء: إن المعلم واسع المصادر يستطيع، بدون شك، مناقشة بعضا من التطبيقات الفيزيائية المتعددة للمقاطع المخروطية. ولا تكاد تجد معلما يستطرد في مناقشة كيفية إنشاء المخروطات. إن هذه المناقشات سوف تؤدي إلى تغطية أغلفة المنحنيات المخروطية. يعد موضوع إحاطة المنحنى Curve Stitching فرعا ممتعا لهذا التحري (انظر: "إنشاء القطع الناقص"، وحدة إثراء 106، و "إنشاء القطع الزائد"، وحدة إثراء 107).

إن المحدد الوحيد على الموضوعات التي تسهم في إنشاء استطرادات مناسبة للإثراء يمكن في الحكم الذي يتبناه المعلم، فهناك مجموعة متنوعة من الموضوعات المحتملة التي يمكن أن نختار ما نشاء منها. ولكن ينبغي أن يرتبط الاستطراد بموضوع محدد في المنهج الدراسي يعد نقطة بداية، على أن يخطط له بصورة محكمة بحيث يمتلك بداية واضحة، واستنتاج منطقي، وفوق كل هذا، أن يكون ذو هدف محدد.

واشد إمتاعاً من المسائل التقليدية مع تقانات الحلول المصاحبة لها. وندرج فيما يأتي بعض الأمثلة حول عدة أنواع من المسائل التي يتوجب اعتبارها، اعتماداً على مستوى المرحلة، والقدرات، ومقدار نضج طلبة الصف.

1. كم قطرة من الماء توجد في قنح ماء مملوء؟
2. كم شجرة توجد في شعور طلبة الصف؟
3. ما هو عدد جهات الرمل الموجودة في صندوق أبعاده 12 بوصة \times 4 بوصة \times 6 بوصة؟
4. احسب مساحة الدائرة التي يبلغ قطرها 5 بوصة. جد أبعاد المستطيل الذي مساحته تساوي بالتقريب مساحة الدائرة.
5. كم دقيقة، أو ساعة، أو يوم تستغرق في متابعة جهاز التلفاز كل شهر؟ أو كل سنة؟ قارن هذا الرقم بالوقت الذي تستغرقه أثناء وجودك بالمدرسة.
6. كم عدد الأقدام الموجودة في محيط الكرة الأرضية؟ وكم عدد البوصات؟ وكم عدد الأمتار؟

هناك عدد غير محدود من المسائل المتنوعة التي يستطيع المعلم المبدع أن يشجع طلبته على "كتابتها" و"حلها" بواسطة الآلة الحاسبة. انظر (وحدة إثراء 11، "إثراء بواسطة إلى حاسبة بيديك").

سوف ندرج ستة أنشطة آلة حاسبة - إضافية والتي ستفيد بوصفها تحدياً خاصاً بالطلبة في المراحل 7-9.

قواعد حدسية Conjecturing Rules

اكمل الجدول الآتي:

الدرج 50 رقم صحيحاً عشوائياً	(1) اضرب في 2	(2) اضرب في 10	(3) اضرب في 100	(4) اضرب في 1000
1				
2				
17				
23				
107				
113				
.				
.				

والآن، أجب عن الأسئلة التالية:

1. ماذا تلاحظ حول آخر رقم من كل عدد في العمود (1)؟ اصنع حدساً.
2. قارن الأعمدة 2، 3، 4. ماذا تلاحظ؟ اصنع حدساً.

مراحل. وأخيراً سيصلون إلى الصيغة $A_n = A_0(1+r)^n$ ، حيث A_n هو المبلغ بعد مرور n من السنين، A_0 هو مقدار المبلغ المودع في البداية. وأن r يمثل مقدار معدل الفائدة.

عند المستوى 3، سيعمد الطلبة إلى تعميم أكبر في الصيغة بحيث تتوفر لديهم فرصة كافية لاستكشاف مسائل أخرى حيث تتراكب الفائدة بأسلوب: نصف سنوي، أو ربع سنوي، أو شهري. أو يومي.

عند المستوى 4، ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حل المسألة المذكورة في المستوى 2 ولأي متغير من متغيراتها.

إن النوسعات المحتملة للموضوع ستتضمن:

- حل مسائل حيث يوفر النمو التراكب في علوم الأحياء، ومعدل الانحلال في الكيمياء تطبيقات مناسبة.
- برهنة النتائج باستخدام الاستقراء الرياضي.
- إقامة ارتباط بين هذا الموضوع والرقم فير القياسي e .

إن كثيراً من مسائل الحياة الواقعية (مثل: القروض، والضرائب، والشتراب، والتقسيم) يمكن استكشافها وتحري تطبيقها بمساعدة الآلة الحاسبة. إن مثل هذه التحريات قد نفد بوصفها مصادر ممتازة للتطبيقات للمنهج الدراسي التقليدي بالمدارس الثانوية. وهناك الكثير من الآراء حول المسائل في كتاب NCTM السنوي لعام 1979 والذي يحمل عنوان *Applications in School Mathematics*. تطبيقات في الرياضيات المدرسية.

أنشطة الآلة الحاسبة-الصفية

Classroom Calculator Activities

ينبغي على المعلمين أن يستفيدوا من حقيقة كون الآلات الحاسبة قادرة على توليد البيانات بصورة دقيقة وسريعة. لذا فإن الطالب الذي يستخدم الآلة الحاسبة قد أتاحت له فرصة ذهبية لاستكشاف الرياضيات وإجراء ملاحظات وحدوس دون معاناة أعباء حسابات معقدة ومطولة. وتتوفر، بالوقت الحالي، لطلبة الصف فرصة مناسبة لاستكشاف المسائل التي ستبقى حبيسة في واقع متروك، أو ربما غير مشجع.

وإن المسائل التي لم تؤخذ بعين الاعتبار ستكون الآن مرشحة للحل بواسطة طلبة يتمتعون بحد أدنى من القدرات الحسابية. ويؤمل أن تسهم هذه النتائج في شحذ فهم الطلبة ومهاراتهم التحليلية

إن الأنشطة الأولية مثل جمع البيانات المناسبة وتقييمها، سوف تجعل من هذه المسائل أكثر قرباً من المواقع الملموس،

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

2. جد مجاميع بأربعة أعداد في نمط مجموع 34. هنا ثلاثة أمثلة عليها. جد 12 نموذجًا إضافيًا. ارسم مربعات 4- في 4 لعرض الحلول. (انظر وحدتي إثراء 1 و 2).

16			13
4			1

	2		
5			
			12
		15	

		10	8
9	7		

حواصل الضرب الغريبة Strange Products

- جد كل من حواصل الضرب الآتية:

36	63	(ب.)	86	68	(أ.)
$\times 42$	$\times 24$		$\times 34$	$\times 34$	
			39	93	(ج.)
			$\times 31$	$\times 13$	
- (أ.) هل أن حاصل الضرب في تمرين (1) متساوية في (أ)، ب، و (ج)؟
(ب.) هل إن الأرقام في العوامل مقلوبة في تمرين (1-ب)، (1-ب)، و (1-ج).
- جد حواصل ضرب كل مما يأتي:

46	64	(ب.)	48	84	(أ.)
$\times 32$	$\times 23$		$\times 21$	$\times 12$	
65	56	(د.)	28	82	(ج.)
$\times 12$	$\times 21$		$\times 41$	$\times 14$	
57	75	(و.)	94	49	(هـ.)
$\times 86$	$\times 68$		$\times 36$	$\times 63$	
- (أ.) هل إن الأرقام في تمرين 3 قد قلبت في كل عامل؟
(ب.) في أي زوج من تمرين 3 تتساوى فيها حواصل الضرب؟

- اكمل الجدول لخمسين رقم عشوائي، واصنع بعض الحدوس والتخمينات ثم اختبرها. هل تستطيع أن تبرهن على صحة حدسك؟
- اكمل الجدول لخمسين رقم عشوائي ولكن قسم في الأعمدة 2، 3، و 4.

اصنع بعض الحدوس وحاول اختبارها

الأرقام الأربعة – السحرية Four Magic Digits

- اختر أية أربعة أرقام أربعة مختلفة، مثل 2، 3، 4، و 5. اتبع الخطوات الآتية:

(أ) كَوْن أكبر عدد يمكنك: 5432
أن تكون أصغر عدد: $\overline{2345}$
اطرح: 3087

(ب.) مع الأرقام 3، 0، 7 و 8، ومن الفرق، اتبع الخطوات الآتية:

- كَوْن أكبر عدد: 8730
كَوْن أصغر عدد: $\overline{378}$
اطرح: 8352
- (ج.) مع 8، 3، 5، 2، من الفرق، اتبع هذه الخطوات:
- كَوْن أكبر عدد: 8532
كَوْن أصغر عدد: $\overline{2358}$
اطرح: 6174

- بعد إجراء الطرح ثلاثة مرات سنحصل على عدد بأربعة أرقام سحرية هي 1، 4، 6، و 7.
- كرر التمرين 1 بالأرقام 1، 5، 6، و 8. سوف تجد الأرقام الأربعة السحرية بترتيب ما 1، 4، 6، 7 بعد إجراء عملية الطرح لثلاثة مرات. اكتب حلك كما هو في تمرين 1.
 - باستخدام أربعة أعداد مختلفة، غالبًا ما سنحصل على عدد بأربعة أرقام تضم 1، 4، 6، و 7 بترتيب محدد. ابدأ بالأرقام 9، 8، 7، و 6 وانظر هل ستحصل على العدد 6174 بعد إجراء ثلاثة عمليات طرح متتالية؟
 - ادرس حلك للتمرين 2، ميّدتنا بأربعة أرقام وستحصل على عدد بالأرقام 1، 4، 6، و 7 بعد أن تصل إلى أرقام الطروحات 1، 2، 4، 5، و 6.

المربعات السحرية Magic Squares

- إن هذا المربع السحري يحتوي على أربعة صفوف، وأربعة أعمدة، وقطرين. جد مجموع لكل منها. وإذا لم تكن المجموع الثمانية متساوية تأكد من عملك.

عددان متحابان أيضاً. وفي حوالي عام 1760، وبعد البحث بأسلوب منظم، اكتشف Euler أكثر من 60 زوجاً من هذه الأعداد. إن الزوج الصغير الذي لم ينتبه إليه "إيلر" قد اكتشفه نيقولو باجاتيني Nicolo Paganini، وهو شاب بعمر 16 عام، في عام 1886. وفي أيامنا هذه بلغ عدد الأعداد المتحابة حوالي 1000 زوجاً. إن آخر زوج تم اكتشافه في عام 1976م كان أحد أعداد الزوج هو:

5 070 746 263 958 274 212 545 800 175 616

وتجد هنا بعض التمارين التي تستكشف هذا المفهوم:

1. برهن إن العددين 17296 و 18416 متحابان.
2. برهن إن العددين 1184 و 1210 متحابان.
3. هل تستطيع البرهنة بأن الأعداد ينبغي أن تكون فردية أو زوجية؟

نماذج وأعمال تشكيلة تثري التدريس

Models And Manipulatives That Enrich Instruction

إن الاستكشافات بواسطة النماذج والأعمال التشكيلة هي طريقة تعليمية بديلة والتي تشجع على الاهتمام ببعض الطلبة وبمواضيع مختارة. إن مفادرة الأسلوب التقليدي لمناقشات العلم وتجارب الإيضاحية، باتجاه مجاميع صغيرة واستكشافات فردية لنماذج مبدعة أو أعمال تشكيلة سوف توضح وتلقي الضوء على مبادئ كامنة في العمليات الجبرية أو العلاقات الهندسية:

إن برمجيات هذه الأيام تستطيع أن تحل (مفاهيم) محل الكثير من أعمال الأوس التشكيلة. وبعد برنامج Geometer's Sketchpad (Key Curriculum Press) أحد هذه البرامج، وهو أداة بديعة لاستكشاف مفاهيم الهندسة، وبالأخص الثابتة منها.

خذ، على سبيل المثال، النظرية التي تنص على أن الشكل الرباعي الذي ينشأ عن وصل نقاط منتصف أضلاع أي شكل رباعي هو متوازي أضلاع. إن رسم الشكل الرباعي بواسطة Geometer's Sketchpad، ووصل نقاط المنتصف المتتالية بواسطة قطع مستقيم، ثم سحب الفأرة لتحريك أي قمة (رأس) من الشكل الرباعي الكبير إلى أي موقع (وبذلك سيحصل تشوه في الشكل الرباعي الأصلي)، يظهر بأن الشكل الذي ينشأ عن وصل نقاط منتصفات الأضلاع هو متوازي أضلاع، على الدوام. إن إجراء تجارب إضافية على هذا الشكل سوف تظهر بوضوح متى سيكون متوازي الأضلاع، معينا، أو مربعا، أو

(ج). حاول كتابة أمثلة تشابه مثال 3(أ) إلى 3(ج) حيث تتساوى حواصل الضرب.

5 افحص للتأكد من أن حواصل الضرب متساوية في كل مما يأتي:

(أ).	96	69	(ب).	84	48
	$\times 23$	$\times 32$		$\times 36$	$\times 63$
(ج).	93	39			
	$\times 26$	$\times 62$			

6 قم بإعداد بعض الأمثلة تشابه الأمثلة 1 و 5.

7 اكتب القاعدة التي استخدمتها في إعداد الأمثلة بتمرين 6.

مفاجآت SURPRISES

- 1 (أ) اختر عدداً بثلاثة أرقام، على سبيل المثال، 295.
(ب) اعد عدداً بستة أرقام عن طريق تكرار العدد 295.
لقد أصبح العدد الجديد 295295.
(ج). قسم العدد 295295 على العدد 13. سيكون خارج القسمة _____.
- (د). قسم خارج القسمة على العدد 11. سيكون خارج القسمة _____.
- (هـ). قسم خارج القسمة على العدد 7. سيكون خارج القسمة _____.
- 2 كرر تمرين 1 باستخدام الأعداد 347347، 921921، و 164164.

السلال الاجتماعية SOCIAL CHAINS

يعد العددين متحابان Amicable (أو صديقان Friendly) إذا كان كل منهما يساوي مجموع القواسم الحقيقية للعدد الآخر. على سبيل المثال:

- العددين 284 و 220 متحابان.
- العوامل الحقيقية للعدد 220 هي: 1، 2، 4، 5، 10، 11، 20، 22، 44، 55، 110. المجموع يساوي 284.
- العوامل الحقيقية للعدد 284 هي: 1، 2، 4، 71، 142. المجموع يساوي 220.

إن زوج الأعداد المتحابة 220 و 284 قد عرفه فيثاغورث بحدود عام 500 ق.م. ولم يكتشف أي زوج من الأعداد المتحابة حتى عام 1636م، عندما نبه العالم الرياضي الفرنسي فيرمات Fermat إلى أن العددين 17296 و 18416 هما

أسئلة QUESTIONS

- 1 اقترح صيغة تربط عدد الرؤوس (القمم) V ، وعدد الحافات (E)، وعدد الوجوه (F) لكل من الأجسام متعددة السطوح.
- 2 اختر وجها من كل جسم متعدد السطوح. كم عدد الوجوه المتبقية (أ) التي توازي الوجه الذي تم اختياره؟ (ب) التي تقطع الوجه الذي تم اختياره؟
- 3 اختر حافة من كل جسم متعدد السطوح. كم عدد الحافات المتبقية (أ) التي توازي الحافة التي اخترتها؟ (ب) التي تميل إلى الحافة التي اخترتها؟
- 4 جد المساحة الكلية لسطوح الجسم متعدد السطوح. تذكر الصيغ الخاصة بمساحات: المثلث-مساوي الأضلاع، والمربع، والشكل الخماسي.
- 5 جد حجم الجسم سداسي السطوح، والجسم رباعي السطوح، والجسم ثماني السطوح. تذكر بأن الجسم ثماني السطوح يتألف من هرمين، وأن صيغة حجم الهرم هي $\frac{1}{3} \times (\text{مساحة القاعدة}) \times (\text{الارتفاع})$.
- 6 تحقق من إن الصيغة التي تعرف بصيغة "ايلر" $V-E+F=2$ تصلح لغير الأجسام الصلبة، مثل متوازي السطوح، والنشور، والهرم.
- 7 برهن صيغة ايلر، كتمرين تحدي.

مستطिला. إن مثل هذه الأعمال التشكيلية المعاصرة توفر منظورا مستحدثا للرياضيات، مفيدا بشكل لا يصدق، ولم يكن ممكنا في الأيام الخوالي. من أجل هذا ينبغي أن يتوجه المدرسون نحو الاستفادة من هذه الأدوات على التعلم، والتي لا تقدر بثمن.

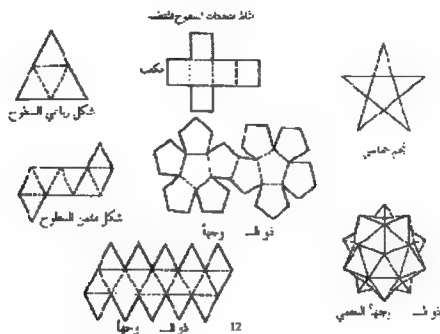
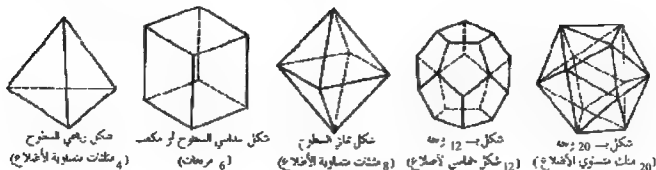
أنشطة الأجسام متعددة السطوح-المنتظمة (الأجسام الافلاطونية)

Regular Polyhedra (Platonic Solids) Activities

إن وجهات النظر التاريخية قد تطفو على السطح أثناء عملية استخدام النماذج الرياضية، كما هو الحال مع الجسم بالسطوح المتعددة-المنتظمة والذي سياتي بعد قليل.

قم بترتيب الصف على شكل مجاميع تتألف كل منها من ستة طلاب يعملون على شكل ثنائي. وستقوم كل مجموعة بإعداد نماذج من ورق المقوى للجسم متعدد السطوح عن طريق إنشاء هذه الأنماط (انظر الصفحة الآتية)، ثم قطعها، وطيها عند الخطوط المنقطة، وباستخدام الورق اللاصق للإمساك بالحافات سوية. (ملاحظة: اجمل كل حافة = 2 وحدة طول).

ستقوم كل مجموعة بإعداد تقرير إلى جميع الصف يحوي على نتائج استكشافاتهم بعد إكمالهم الجدول، وإجاباتهم على الأسئلة الآتية.



الأجسام متعددة السطوح المنتظمة

الاستكشاف	رباعي السطوح المنتظم	سداسي السطوح المنتظم	ثماني السطوح المنتظم	جسم باثني عشر سطوح منتظم	جسم بعشرين سطوح منتظم
عدد الوجوه.					
عدد الرؤوس.					
عدد الحافات					

لقد توسعت المعرفة بخصائص الجسم متعدد السطوح منذ الأزمنة اليونانية القديمة. وقد اكتشف يوهانز كيبلر (1571-1630) نوعاً جديداً من الأجسام متعددة السطوح. فقد لاحظ في البداية بأنه إذا تم تمديد أضلاع الجسم متعدد السطوح المنتظم، فإنه سينشأ عنها جسم متعدد السطوح - منتظم جديد. وعليه فإن شكلاً خماسياً Pentagram منتظماً قد أصبح شكلاً خماسياً نجمي الشكل Stellationed Pentagon. ويتميمه

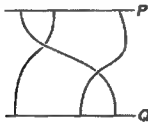
تعليقات تاريخية Historical Comments

تعرف الأجسام متعددة السطوح المنتظمة، أيضاً، بالأجسام الأفلاطونية، اجلاً لافلاطون الذي وحدهم مع الطبقات الكروية للأرض، والماء، والهواء، والنار. وقد اعتقد بأن هذه العناصر الأربعة هي العناصر الأساسية التي تحيط بالكون. احتفظ أقليدس بدراسة الجسم متعدد السطوح للموضوع الختامي في كتاب الهندسة، "العناصر"، لاعتقاده بصورة جازمة بأن الأخير هو الأفضل.

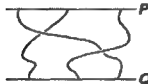
خصائص مجموعة الضفائر

Group Properties of Braids

غالبًا ما تكون مجموعة المواد التي تعد منزليًا Homemad أكثر النماذج والأعمال التشكيلية نفعا وفائدة. إن أحد هذه النماذج يستخدم الضفائر لتوضيح خصائص الزمر الرياضية. تتألف الضفيرة من المرتبة الثالثة من قضيبين يرتبطان بواسطة ثلاثة جداول Stands، كما في شكل (1). يمكن القضيبان P، Q بالجدائيل الثانوية والسفلى، ويمكن نشرها أو تحريكها سوية دون إحداث تغيير في هيئة الضفيرة. وعليه، فإن الضفيرتين الظاهرتان في الشكلين (1 و 2) متكافئة.

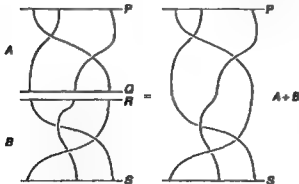


(1) شكل



(2) شكل

تحصل "عملية الجمع" كما يأتي: ضع الضفيرتين A، B في الموقع المحدد في الشكل 3a، وبعد رفع القضيبين R و Q، اربط الجدائيل المتقابلة سوية. إن الضفيرة الناتجة هي A+B (الشكل 3b).



(3a) شكل

(3b) شكل

لقد تحقق شرط "الإغلاق"، نظرا لأن مجموع ضفيرتين من المرتبة 3 لازلل ضفيرة من نفس المرتبة، وينبغي أن تكون في المجموعة.

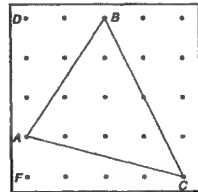
لهذه التقنية، أصبح قادرا على إنشاء أجسام مثل: جسم نجمي بالثني عشر وجها Dodecahedron. ولغرض الزيد من التحريات انظر:

Mathematical Recreations and Essays by W.W.R.Ball (New York: Macmillan, 1962).

أنشطة اللوح الهندسي (الأوراق النقطية)

Geoboard (Dot Paper) Activities

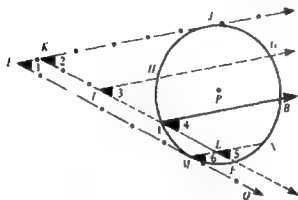
تنص صيغة بيك Pick's formula بأن مساحة المثلث الذي تقع جميع رؤوسه على أوتاد اللوح الهندسي، أو على نقاط الأوراق النقطية هي، $\frac{b}{2} + i - 1$ حيث تمثل b عدد النقاط على حدود المثلث، بينما تمثل i عدد النقاط في داخل المثلث. وعليه فإن مساحة المثلث ABC تكافئ 7 وحدات مربعة.



تمارين EXERCISES

1. استخدم ورقًا بحجم 5 نقطة × 5 نقطة لإنشاء مثلث ثان RST، وبمساحة قدرها 7.
2. عين حدود مربع حول المثلث RST. فإننا كانت المسافة بين كل نقطتين تساوي وحدة واحدة، جد عدد وحدات المربع في كل مثلث قائم الزاوية في صورة المثلث RST. أضف مساحات المثلث قائم الزاوية واطرح المجموع من مساحة المربع، 16، للتأكد من صحة الجواب، 7.
3. استخدم نظرية فيثاغورث لإيجاد أطوال \overline{RS} ، \overline{ST} ، و \overline{TR} .
4. استخدم صيغة المساحة $\frac{1}{2} \times (\text{القاعدة}) \times (\text{الارتفاع})$ لإيجاد مقدار الارتفاع من R، و S، و T.
5. أنشئ شكلا متوازي الأضلاع على اللوح الهندسي وجد: مساحته، وأضلاعه، وارتفاعاته.

تعرض وحدة إثراء 56 استخداماً ممتعا لعمل تشكيلي، بالغ البساطة، أنجزه المعلم، والذي سيمتج للطلاب فرصة البرهنة على جميع نظريات قياس الزاوية التي تتضمن الدوائر وتقاطعها. ويستطيع المعلم أن يعرض أيضاً نفس الفكرة بأساليب أخرى مثل النموذج المدرج أدناه. يكلف الطالب بملء الفراغات (تم ملؤها ووضعها داخل دوائر في هذا المثال) الموجودة في الشكل الآتي:



في الشكل، أعلاه، تأمل جميع الخطوط التي تبدو متوازية. إن إجابات الأسئلة 2 إلى 8 هي عبارة عن أقواس. 1 لماذا تكون الزوايا 1-6 متطابقة.

$$2. m\angle BAF = \frac{1}{2} m(\widehat{BF})$$

$$3. m\widehat{BN} = m(\widehat{AN}) = m(\widehat{MF})$$

$$4. m\angle NMQ = m\angle BAF = \frac{1}{2} (m\widehat{BN} + m(\widehat{NF})) =$$

$$\frac{1}{2} (m\widehat{MF} + m(\widehat{NF})) = \frac{1}{2} m(\widehat{NM})$$

$$5. m\angle NEF = m\angle BAF = \frac{1}{2} (m\widehat{BN} + m(\widehat{NF})) =$$

$$\frac{1}{2} (m\widehat{AN} + m(\widehat{NF}))$$

$$6. m\angle GEF = m\angle BAF = \frac{1}{2} m(\widehat{BF}) =$$

$$\frac{1}{2} (m(\widehat{BF}) + m\widehat{BG} - m\widehat{BG}) = \frac{1}{2} (m(\widehat{BF})$$

$$+ m\widehat{BG} - m(\widehat{HG})) = \frac{1}{2} (m\widehat{GBF} - m(\widehat{HA}))$$

وكذلك الحال بالنسبة لقانون "الاتحاد" الذي تحقق أيضاً، نظراً لأن الضواير A، B، C، والتي نتجت أولاً عن رفع القضيبتين A، B. ثم بين A+B و C، تشابه ناتج رفع القضيبتين B و C أولاً، ثم التقاطع بين A و B+C، وعليه فإن:

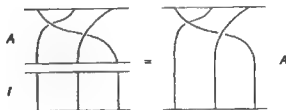
$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

عنصر الهوية I، (انظر شكل 4)



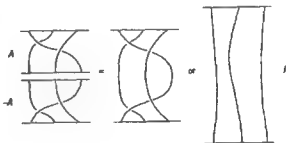
شكل (4)

يبدو واضحاً بأن A+I = A (انظر شكل 5).



شكل (5)

إن العنصر القلوب من الضفيرة، A، هو مقلوب مرآتها -A. لذا، I = A+(-A) (انظر شكل 6).



شكل (6)

(ملاحظة: عندما تضاف الضفيران، فإن النتيجة الواضحة لذلك ستكون الضفيرة المتعائلة، والتي يمكن تمييزها بسهولة بواسطة نشر التقاطع الثانوي والسلي بمسافة متعادلة).
إن المجموعة ليست أبيلية Abelian^(*)، نظراً لأنه ليس من الضروري بالنسبة للضفيرتين A، B، أن تكون A+B متساوية B+A.

(*) نسبة إلى الرياضي النرويجي Neils Abel

SUMMARY خلاصة

ينبغي أن يشجع المعلمون على جمع المواد والآراء، بصورة مستمرة، لإثراء تعلمهم في الرياضيات. وبصرف النظر عن مستوى قدرات الطلبة، يمكن إيجاد أنشطة إثرائية جديدة على الدوام. وفي بعض الحالات يصعب تأمين الأنشطة الإثرائية كما هو الحال في أنشطة أخرى، وعلاوة على ذلك فإن عملية البحث عن موضوع مناسب تبرهن بذاتها على كونها ذات فائدة كبيرة للمعلم.

ينبغي أن يبدل كل معلم جهودا استثنائية لإثراء تعليمه، وغالبا ما تؤدي هذه الخبرات الإثرائية-المحفزة باتجاه تطوير اهتمامات جديدة في مادة الرياضيات بين الطلبة الضعفاء والمتوسطين، بينما ستكون مفيدة وذات أثر بالغ في التشجيع على دراسة المزيد من الرياضيات بين الطلبة الذين يرتقون على المستوى المتوسط، وبين الطلبة الموهوبين.

ويجب أن تزودك الوحدات الإثرائية التي قدمت لك بأفكار لإثراء تدريسيك الرياضيات. وهناك مرجع آخر رائع للأفكار هو:

A Bibliography of Recreational Mathematics, Vols. 1-4, by W. L. Schaaf (Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1970, 1973, 1978).

وبهذه الأدوات تحت تصرفك، فإنك على أتم الاستعداد لإثراء معلومات طلبتك وتقدير الرياضيات.

$$\begin{aligned}
 7. \quad m\angle JKP &= m\angle BAF = \frac{1}{2} m \widehat{BF} = \\
 &\frac{1}{2} (m \widehat{BP} + m \widehat{JB} - m \widehat{JB}) = \frac{1}{2} (m \widehat{BP} \\
 &+ m \widehat{JB} - m \widehat{JA}) = \frac{1}{2} (m \widehat{JBF} - m \widehat{JA}) \\
 8. \quad m\angle JLM &= m\angle NMQ = \frac{1}{2} m \widehat{NQ} = \\
 &\frac{1}{2} (m \widehat{NM} + m \widehat{JN} - m \widehat{JN}) = \frac{1}{2} (m \widehat{NQ} \\
 &+ m \widehat{JN} - m \widehat{JN}) = \frac{1}{2} (m \widehat{JNM} - m \widehat{JM})
 \end{aligned}$$

9. صف لفظياً العلاقات المكتوبة بخطوط عريضة في التمارين 4-8.

إن هذه التمارين تنشئ ببراعة وإحكام جميع نظريات قياس الزاوية ذات الصلة بالدائرة، والتي تدرس غالبا في درس الهندسة في المدارس الثانوية. ويماد الطلبة عبر سلسلة من الأسئلة البسيطة، والتي بسبب هيكلتها، تبرهن بالضرورة على العلاقات التي يراد الوصول إليها ويجب أن يكون الاكتشاف كنتيجة طبيعية. ونحن من جهتنا نقترح ترصيع تمارين الكشف بتمارين أخرى، نظرا لأن دوالها تحقق بعض أهداف تحديد الواجبات البيتية.

تمارين Exercises

أ- التوسيع.

ب- الاستطوار.

3. افترض بأنك قد فوتحت بواسطة أولياء أمور أحد أكثر طلبتك إنجازا، وقد طلب منك تسريع تعلم مادة الرياضيات لولدهم، لأنهم يرون أن روح الفناض السائدة في الصف لا ترق لأن تكون مناسبة له. وضع كيف ستعامل مع هذا الطلب. ناقش ردك على الأيوين، وأفعلك قبل، وبعد إعطائك للرد.

4. أتى أولياء أمور أحد طلبتك الضعفاء في المرحلة التاسعة ليوطلب منك استعراق بعض الوقت، بين الحين والآخر، مع الصف على "أمور خارجية" (على سبيل المثال، إثرائية) بدلا من صرف معظم وقتك التدريسي على أعمال

1. اختر موضوعا لإثراء تدريسيك في كل مما يأتي:

أ. صف بالمرحلة الثامنة رياضيات وبقدرات متوسطة.

ب. صف بالمرحلة العاشرة لطلبة موهوبين.

ج. صف علاجي بالمرحلة التاسعة.

د. صف بالمرحلة الحادية عشر وبقدرات متوسطة.

هـ. صف بالمرحلة السابقة لطلبة موهوبين.

و. صف بالمرحلة الثانية عشر لطلبة موهوبين (يدرسون

حاليا حساب التفاضل والتكامل).

وضح كيف ستعالج كل من الموضوعات التي أدرجتها. وحدد حجم المواد التي تخطط لتغطيتها في الدرس.

2. في كل مما يأتي، اختر مستوى مرحلة، ومستوى قدرة واعد مثلا لموضوع إثرائي يعرض:

أن توضح الفروقات بين فلسفتي الإثراء في كل من هذين الكتابين.

7. اختر موضوعاً مناسباً لطلبة المدارس الثانوية بموضوع الرياضيات والذي لم يدرج ضمن الوحدات الإثرائية الموجودة في هذا الكتاب. قم بتطوير نشاط إثرائي يركز إلى الموضوع الذي اخترته وفي صيغة تشابه عرض هذا الكتاب. ينبغي أن تستهدف هذه الوحدة مستمعين بمستوى موهوب.

8. اختر موضوعاً مناسباً لطلبة المدارس الثانوية بموضوع الرياضيات، والذي لم يدرج ضمن الوحدات الإثرائية الموجودة في هذا الكتاب. قم بتطوير نشاط إثرائي يركز إلى الموضوع الذي اخترته، وفي صيغة تشابه عرض هذا الكتاب. ينبغي أن تستهدف هذه الوحدة مستمعين ذوي قدرات متوسطة.

9. اختر موضوعاً مناسباً لطلبة المدارس الثانوية بموضوع الرياضيات، والذي لم يدرج ضمن الوحدات الإثرائية الموجودة في هذا الكتاب. تم بتطوير نشاط إثرائي يركز إلى الموضوع الذي اخترته. وفي صيغة تشابه عرض هذا الكتاب. ينبغي أن تستهدف هذه الوحدة مستمعين ذوي قدرات متدنية.

علاجية. كيف سترد على هذين الأبوين؟.

5. بالنسبة لصف من الطلبة الموهوبين، قم بإعداد الخطوط المرفقة لوحدة إثرائية لكل من الموضوعات المنهجية (مع بيان طبيعة الأنشطة سواء كانت توسعية أم استطلاعية).

أ. الأشكال رباعية الأضلاع (فصل هندسة للمدارس الثانوية).

ب. المتواليات (فصل الجبر للسنة الثانية).

ج. النصب المئوية (صف رياضيات بالمرحلة السابعة).

د. نظرية ذات الحدين (صف رياضيات بالمرحلة الحادية أو الثانية عشر).

هـ. قياس زاوية بواسطة دائرة (مساق دراسي هندسي للمدارس الثانوية).

و. مجموعة معادلات (السنة الأولى لمساق دراسي بمادة الجبر)، وقم بهذا النشاط باستخدام آلة حاسبة-رسمية أيضاً.

ز. معادلات تربيعية (مساق دراسي بالجبر للسنة الأولى).

6. حدد كتاباً منهجياً لرياضيات للدرسة الثانوية الذي يقع تاريخ طبعته قبل عام 1950 والدرج الأنواع المختلفة من الأنشطة الإثرائية المتضمنة في هذا الكتاب. كرر هذا النشاط مع كتاب يعود تاريخ طبعته بعد عام 1980. قارن بين الكتابين في ضوء طبيعة أنشطتهما الإثرائية. كيف تستطيع

مراجع مقترحة Suggested References

- Babbage, Charles. On the Principles and Development of the Calculator. P. Morrison and E. Mossison. Eds. New York: Dover 1961.
- Berggren, L., J. Borwein, and P. Borwein. Pi: A Source Book. New York: Springer 1997.
- Billings, K., and D. Moursand. Problem Solving with Calculators. Salem. OR: Math Learning Center, University of Oregon, 1978.
- Bitter, G. G., and J. K. Mikesell. Activities Handbook for Teaching with the Hand-Held Calculator. Boston: Allyn and Bacon, 1980.
- Bolt, B. Mathematics Meets Technology. New York: Cambridge University Press, 1991.
- Bramble, W. J., and E. Mason. Computers in Schools. McGraw-Hill, 1985.
- Chin, W. G., R. A. Dean, and T. N. Tracewell. Arithmetic and Calculators. San Francisco: W. H. Freeman, 1978.
- Chrystal, G. Algebra and Elementary Textbook,

- 2vols. New York: Chelsea, 1964.
- Coburn, T. G. How to Teach Mathematics Using a Calculator. Reston, VA: NCTM, 1987.
- Coburn, T. C., et al. Practical Guides to Computers in Education. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1982.
- Collis, B. Computers. Curriculum, and Whole Class Instruction. Belmont. CA: Wadsworth, 1988.
- Court, N. A. College Geometry. New York: Barnes & Noble, 1952.
- Coxeter, H. S. M. Introduction to new Geometry. New York: Wiley, 1969.
- Day, R. P. "Solution Revolution." Mathematics Teacher 86, no. 1 (January 1993): 15-22.
- Devlin, Keith. All the Math That's Fit to Print. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1994.
- Dolan, D., Ed. Mathematics Teacher Resource

- Handbook: A Practical Guide for K-12 Mathematics Curriculum. Millwood, NY: Kraus International Publications, 1993.
- Dudley, Underwood. A Budget of Trisections. New York: Springer, 1987.
- Easterday, K. E., L. L. Henry, and F. M. Simpson. Activities for Junior High School and Middle School Mathematics. Reston, VA: NCTM, 1981.
- Eastaway, R., and J. Wyndham. Why Do Buses Come in Three's? The Hidden Mathematics of Everyday Life. New York: John Wiley, 1998.
- Elgarten, G., and A. S. Posamentier. Using Computer: Programming and Problem Solving. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1984.
- Elgarten, G., A. S. Posamentier, and S. Mores. Using Computers in Mathematics. 2d ed. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1986.
- Farrel, M. A. Imaginative Ideas for the Teacher of Mathematics. Grades K-12. Reston, VA: NCTM, 1988.
- Farrell, M. A., Ed Imaginative Ideas for the Teacher of Mathematics. Grades K-12. Ranucci's Reservoir, Reston, VA: NCTM, 1988.
- Fleron, Julian F. Quotations for Every Mathematics Class Mathematics Teacher 91 (1998): 548-553.
- Foletta, Gina M., and David B. Leep. "Isoperimetric Quadrilaterals: Mathematical Reasoning with Technology." Mathematics Teacher 93 (2000): 144-147.
- French, Francis G. "The Divisibility of $x^a - y^a$ by $x - y$: A Constructive Example." Mathematics Teacher 91 (1998): 342-345.
- Gleick, James. Chaos, Making a New Science. Viking Press, 1987.
- Glidden, Peter L. "Beyond the Golden Ratio: A Calculator-Based Investigation." Mathematics Teacher 94 (2001): 138-144.
- Gorini, Catherine A., Ed. Geometry at Work: A Collection of Papers Showing Applications of Geometry. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.
- Hall, H. S., and S. R. Knight. Higher Algebra. London: Macmillan, 1960.
- Ippolito, Dennis. "The Mathematics of the Spirograph." Mathematics Teacher 92 (1999): 354-357.
- Kastner, B. Space Mathematics: A Resource for Secondary School Teachers. Washington, DC: NASA, 1985.
- Kenelly, J. W. The Use of Calculators in the Standardized Testing of Mathematics. New York: College Entrance Examination Board, 1989.
- Kieren, J. E. "Computer Programming for the Mathematics Laboratory." Mathematics Teacher 66 (1973):9.
- Klein M. F. "Mathematics as Current Events." Mathematics Teacher 86, no. 2 (February 1993).
- Lockwood, E. H. A Book of Curves. London: Cambridge University Press, 1971.
- Loomis, E. S. The Pythagorean Proposition. Reston, VA: NCTM, 1968.
- Maor, Eh. "The Pocket Calculator as a Teaching Aid." Mathematics Teacher 69 (1976): 471.
- Markowsky, George. "Misconceptions About the Golden Ratio." The College Mathematics Journal 23 (January, 1992) 2-19.
- Martin, George E. Geometric Constructions. New York: Springer, 1998.
- Mathematics Enrichment Program Grades 3-12. Richmond, VA: Department of Mathematics, 1986.
- Mathematics Teacher 71 (May 1978). Special Issue: Computers and Calculators.
- Mathematics Teacher 14(November 1981) Special Issue: Microcomputers.
- Morgan Frank. The Math Chat Book. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.
- Mottershead, L. A Source Book of Mathematical Discovery. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1977.
- National Aeronautics and Space Administration. Space Mathematics. A Resource for Teachers. Washington, DC: NASA, 1972.
- National Council of Teachers of Mathematics. Calculators: Readings from Arithmetic and Mathematics Teacher. Bruce C. Burt. Reston, VA: NCTM, 1979.
- _____. Enrichment Mathematics for the Grades. Twenty-seventh Yearbook, 1963.
- _____. Enrichment Mathematics for High School. Twenty-eighth Yearbook, 1963.
- _____. Topics in Mathematics for Elementary School Teachers. Twenty-ninth Yearbook, 1964.
- _____. Historical Topics for the Mathematics Classroom. Thirty-first Yearbook, 1969.
- _____. Geometry in the Mathematics Curriculum. Thirty-sixth Yearbook, 1973.
- _____. Applications in School Mathematics. 1979 Yearbook.
- _____. Problem Solving in School Mathematics.

- 1980 Yearbook.
- _____. Teaching Statistics and Probability. 1981 Yearbook.
- _____. Computers in Mathematics Education. 1984 Yearbook.
- _____. Secondary School Mathematics Curriculum. 1985 Yearbook.
- _____. Estimation and Mental Computation. 1986 Yearbook.
- _____. Learning and Teaching Geometry, K-12. 1989 Yearbook.
- _____. The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook.
- _____. Calculators in Mathematics Education. 1992 Yearbook.
- _____. Connecting Mathematics Across the Curriculum. 1995 Yearbook.
- _____. Communication in Mathematics. K-12 and Beyond 1996 Yearbook.
- _____. Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12. 1999 Yearbook.
- Nord, G., D. Jabon, and John Nord. "The Mathematics of the Global Positioning System." *Mathematics Teacher* 90(1997): 455-460.
- Olson, Alton *Mathematics Through Paper Folding*. Reston, VA: NCTM, 1975.
- Paulos, John Allen. *A Mathematician Reads the Newspaper*. New York: Basic Books, 1995.
- Peterson, Ivars. *The Mathematical Tourist: Snapshots of Modern Mathematics*. New York: W. H. Freeman 1988.
- Posamentier, A. S. *Advanced Euclidian Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students*. Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.
- Posamentier A. S. *Making Algebra Come Alive*. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.
- Posamentier A. S. *Making Geometry Come Alive*. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.
- Posamentier A. S. *Making Pre-Algebra Come Alive*. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.
- Posamentier A. S., and H. Hauptman. *101 Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics: A Resource for Secondary School Teachers*. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2001.
- Posamentier, A.S., and Noam Gordon. "An Astounding Revelation on the History of π ." *Mathematics Teacher* 77(1984): 52.
- Posamentier, A. S., and S. Krulik. *Problem Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1998.
- Posamentier, A. S., and W. Schulz. *The Art of Problem Solving: A Resource for the Mathematics Teacher*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1996.
- Posamentier, A. S., and W. Wernick. *Advanced Geometric Constructions*. Menlo Park, CA: Dale Seymour Publications, 1988.
- Row, T. Sundara. *Geometric Exercises in Paper Folding*. New York: Dover, 1966.
- Runion, G. E. *The Golden Section and Related Curiosa*. Glenview, IL: Scott Foresman, 1972.
- Salem, L., F. Testard, and C. Salem. *The Most Beautiful Mathematical Formulas*. New York: Wiley, 1992.
- Schaaf, W. L. *A Bibliography of Recreational Mathematics*, Vols. 1-4. Washington, DC: [National Council of Teachers of Mathematics], 1970, 1973, 1978.
- Schimmel, Judith. "A New Spin on Volumes of Solid of Revolution" *Mathematics Teacher* 90 (1997): 715-717.
- Sloyer, C. *Fan-Tas-Tiks of Mathematics*. Providence, RI: Janson Publications, 1986.
- Sobel, M. A., and E. M. Malelsky. *Teaching Mathematics: A Source Book of Aids, Activities and Strategies*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.
- Suydam, M. N. *Using Calculators in Pre-College Ed : Third State-of-Art Review*. Columbus, OH: Calculator Information Center, 1980.
- Troputman, A. P., and J. A. White. *The Micro Goes to School*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 1988.
- Turner, S., and M. Land. *Tools for Schools*. Belmont, CA: Wadsworth, 1988.
- Williams, D. E. "One Point of View: Remember the Calculator?" *Arithmetic Teacher* 30 (March 1983): 4.
- Wool, Peter Y "Straightedge Constructions, Given a Parabola," *The College Mathematics Journal* 31 (2000): 362-372.
- Worth, J. "Let's Bring Calculators Out of the Closet." *Elements: A Journal for Elementary Educators* 17 (1985): 18-21.

ببليوغرافيا لتاريخ الرياضيات

Bibliography for the History of Mathematics

- Aaobe, Asger. *Episodes from the Early History of Mathematics*. New York: Random House, 1964.
- Babbage, Charles, *On the Principles and*

- Development of the Calculator. P. Morrison and E. Morrison, Eds. New York: Dover 1961.
- Ball, W. W. Rouse, A short Account of the History of Mathematics. 4th ed. New York: Dover, 1960.
- Bekmann, Petr. A History of Pi. New York: St. Martin's Press, 1971.
- Bell. Eric Temple. Men of Mathematics, 6th paperback ed. New York: Simon & Schuster, 1937.
- Bell. Eric Temple. Mathematics: Queen and Servant of Science. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1987.
- Boyer, Carl B. The History of the Calculus and Its Conceptual Development New York: Dover, 1959.
- Boyer. Carl B. A History of Mathematics. New York: Wiley, 1968.
- Bunt Lucas N. H., Philip S. Jones, and Jack D. Bedient. The Historical Roots of Elementary Mathematics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1976.
- Burton, David M. The History of Mathematics, An Introduction. Boston, MA: Allyn and Bacon, 1985.
- Cajori. Florian. A History of Mathematical Notations. 2 vols. LaSalle. IL: Open Court, 1928.
- Cajori. Florian. A History of Mathematics. New York: Chelsea. 1985.
- Campbell. Douglas M., and John C. Higgins, Eds. Mathematics People, Problems, Results. 3 vols. Belmont, CA: Wadsworth, 1984.
- Cardano. Girolamo. Ars Magna. Or the Rules of Algebra. Translated by I. R. Witmer. New York: Dover, 1993.
- Eves. Howard W. In Mathematical Circles. 2 vols. Boston, MA: Prindle, Weber, Schmidt, 1969.
- Eves. Howard W. Mathematical Circles Revisited. Boston, MA: Prindle, Weber, Schmidt, 1971.
- Eves, Howard W. Great Moments in Mathematics Before 1650. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1980.
- Eves, Howard W. Great Moments in Mathematics After 1650. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1981.
- Eves, Howard W. An Introduction to the History of Mathematics. 5th ed. New York: W. B. Saunders College Publishing, 1983.
- Fauvel, J., and J. Gray, Eds. A History of Mathematics: A Reader. Milton Keynes, UK: Open University, 1987.
- Gittleman, Arthur. History of Mathematics. Columbus, OH: Charles E. Merrill, 1975.
- Gray, Shirley B., and C. Edward Sandifer. "The Sumario Compendioso: The New World's First Mathematics Book." Mathematics Teacher 94 (2001): 98-103.
- Heath, Thomas. History of Greek Mathematics. 2 vols. New York: Dover, 1981.
- Herz-Fischler, Roger. A Mathematical History of the Golden Number. New York: Dover, 1998.
- Hoffmann, Joseph E. The History of Mathematics to 1800. Totowa, NJ: Littlefield, Adams & Co., 1967.
- Kaplan, Robert. The Nothing That Is: A Natural History of Zero. New York: Oxford University Press, 1999.
- Karpinski, Louis C. The History of Arithmetic. New York: Rand McNally, 1925.
- Kelley, Loretta "A Mathematical History Tour" Mathematics Teacher 93 (2000): 14-17.
- Martizloff, Jean-Claude. A History of Chinese Mathematics. New York: Springer, 1997.
- Mathematics Teacher 98 (November 2000) entire issue.
- National Council of Teachers of Mathematics. Historical Topics for the Mathematical Classroom. Thirty-first Yearbook, Reston, VA: NCTM, 1969.
- Newman, James Roy, Ed. The World of Mathematics. 4 vols. New York: Simon & Schuster, 1956; paperback, 1962.
- Posamentier, A. S., and Noam Gordon. "An Astounding Revelation on the History of π ." Mathematics Teacher 77 (1984): 52.
- Peri. Teri. Math Equals: Biographies of Women Mathematicians and Related Activities. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1978.
- Sanford, Vera. A Short History of Mathematics. Boston: Houghton Mifflin, 1958.
- Smith, David E. History of Mathematics. 2 vols. New York: Dover, 1953.
- Struik, Dirk J. A Concise History of Mathematics, 3rd ed. New York: Dover, 1967.
- Turnbull, Herbert W. The Great Mathematicians. New York: New York University Press, 1961.
- Van der Waerden, B. L. Science Awakening. New York: Wiley, 1963.

مكتبة الرياضيات الجديدة

New Mathematics Library

Mathematical Association of America, New Mathematics Library. On topics designed to enrich the mathematics curriculum. These can be ordered from the Mathematical Association of America, 1529 Eighteenth

- Street, N. W., Washington, DC 20036 A list of the first 40 titles follows:
1. Numbers Rational and Irrational by Ivan Niven.
 2. What Is Calculus About? By W. W. Sawyer.
 3. An Introduction to Inequalities by E. F. Beckenbach and R. Bellman
 4. Geometric Inequalities by N. D. Kazarinoff.
 5. The Contest Problem Book I. Annual High School Mathematics Examinations 1950-1960. Compiled and with solutions by Charles T. Salkind.
 6. The Lore of Large Numbers by P. J. Davis.
 7. Uses of Infinity by Leo Zippin.
 8. Geometric Transformations I by I. M. Yaglom, translated by A. Shields.
 9. Continued Fractions by Carl D. Olds.
 10. Graphics and Their Uses by Oystein Ore.
 11. Hungarian Problem Books I and II Based on the Eotvos.
 12. Competitions 1894-1905 and 1906-1928. translated by E. Rapaport.
 13. Episodes from the Early History of Mathematics by A. Aboe.
 14. Groups and Their Graphs by I. Grossman and W. Magnus.
 15. The Mathematics of Choice by Ivan Niven.
 16. From Pythagoras to Einstein by K. O. Friedrichs.
 17. The Contest Problems Book II Annual High School Mathematics Examinations 1961-1965. Compiled and with solutions by Charles T. Salkind.
 18. First Concepts of Topology by W. G. Chinn and N. E. Steenrod.
 19. Geometry Revisited by H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer.
 20. Invitation to Number Theory by Oystein Ore.
 21. Geometric Transformations II by I. M. Yaglom, translated by A. Shields.
 22. Elementary. Cryptanalysis: A Mathematical Approach by A. Sinkov.
 23. Ingenuity in Mathematics by Ross Honsberger.
 24. Geometric Transformations III by I. M. Yaglom, translated by A. Schenitzer.
 25. The Contest Problem Book III. Annual High School Mathematics Examinations 1966-1972. Compiled and with solution by C. T. Salkind and J. M. Earl.
 26. Mathematical Methods in Science by George Polya
 27. International Mathematical Olympiads 1959-1977. Compiled and with solutions by S. L. Greitzer.
 28. The Mathematics of Games and Gambling by Edward W. Packel
 29. The Contest Problem Book IV Annual High School Mathematics Examinations 1973-1982. Compiled and with solutions by R. A. Artino, A. M. Gaglione, and N. Shell
 30. The Role of Mathematics in Science by M. M. Schiffer and L. Bowden
 31. International Mathematical Olympiads 1974-1985. Compiled and with solutions by Murray S. Klamkin
 32. Riddles of the Sphinx by Martin Gardner
 33. USA Math Olympiads 1972-1986 by Murray S. Klamkin.
 34. Graphs and Their Uses by Oystein Ore
 35. Exploring Math with your Computer by Arthur Engel.
 36. Game Theory and Strategy by Philip Straffin
 37. Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry by Ross Honsberger
 38. The Contest Problem Book V. American High School Mathematics Examinations and American Invitational Mathematics Examinations 1983-1988. Compiled and augmented by George Berzsenyi and Stephen B. Maurer.
 39. Over and Over Again by Gengzhe Chang and Thomas W. Sederberg
 40. The Contest Problem Book VI. American High School Mathematics Examinations 1989-1994. Compiled and augmented by Leo J. Schneider.
 41. The Geometry of Numbers by C. D. Olds Anneli Lax. And Giuliana Davidoff
 42. Hungarian Problem Book III Based on the Eotvos Competitions 1929-1943 translated by Andy Lin.
- Other Titles In Preparation.
There Are Many Additional Ideas In The Enrichment Units In The Second Part Of This Book.

أنشطة لا منهجية في الرياضيات

Extracurricular Activities in Mathematics

إن ازدهار المنهج الدراسي لمادة الرياضيات في كل مرحلة من مراحل المدرسة الثانوية، يجعل مهمة الاستعدادات المكثفة من النمو المتعاقب لمساق الرياضيات الدراسي أمرا بالغ الصعوبة ومع ذلك، هناك فوائد جمة يمكن نوالها عند اعتبار مادة الرياضيات خارج حدود المنهج الدراسي الثابتة من أجل هذا ينبغي على المعلمين التنقيب عن طرق لتزويد الطلبة بمواد إضافية على منهج الرياضيات. إن كثيرا من الأنشطة الإضافية على منهج الرياضيات المعتاد يمكن إجراؤها خلال أنشطة نادي الرياضيات Mathematics Club بالإضافة إلى غرفة التعليم المعتادة

المتاحة مع الطلبة على طريق ضمان تحقيق الأهداف المحددة. ينبغي أن تتضمن الإعلانات الأثرية، الإيلاخ من خلال نظام المخابطة الشعبية، والبريد السريع المرسل إلى جميع قطاعات الفرقة المخصصة لأداء الواجبات داخل المدرسة Homeroom، والتغطية الإعلامية التي تخصصها جريدة الطلبة بحيث تغطي جميعا معظم جوانب النادي.

إن الجزء الأكثر أهمية من عملية الاستقطاب يتركز إلى الاتصال المباشر مع صفوف الرياضيات التي تحوي على أعضاء محتلمين بالنادي، ويجري هذا الاتصال بواسطة معلم الصف، أو راعي إدارة النادي مباشرة. كما ينبغي أن يخطط المنهج بعناية بالغة بحيث يكون العرض التصميمي الخاص بالنادي، والذي تم توجيهه إلى هذه الصفوف، مليئا بعنصر الإثارة والتشويق.

تتضمن عملية الحث على الالتحاق بالنادي، دعوة مجموعة من الطلبة المؤهلين للانتخاب والجدريين به إلى اجتماع تنظيمي. وسيكون موضوع تخطيط الاجتماع الأول، وحسن اختيار جدولة أعماله وتوقيتاته أمرا بالغ الأهمية.

في البداية ينبغي أن يرحب بما يقدمه الطلبة، إضافة إلى ذلك يقوم راعي إدارة النادي بعرض الخطط التي أعدت بالتشاور مع إدارة المدرسة، وزملائه من المعلمين، والتي تفاعلت معها مجموعة الطلبة بصورة إيجابية.

ورغم ضرورة كون الخطة المدة مرنّة، ومفتوحة أمام اقتراحات الطلبة، فإن صيغة الأمر فيها ستكون واحدة. إن قدوم استشاري إدارة النادي إلى الاجتماع الأول، ودون التهيؤ مسبقا بإعداد خطة واضحة المعالم، سيزعج إصبع الاتهام باتجاه المشورة التي سيقدمها للنادي وأعضائه. ويمكن استثمار الاجتماع الأول لاختيار موظفي النادي، والذين سيكونون من لجنة التسيير. ستعتمد هذه اللجنة، وبالتعاون مع راعي إدارة النادي، إلى إقرار توقيتات الاجتماعات والبعد الزمني لفترات انعقادها، ومؤهلات العضوية، وأمور أكثر أهمية والتي تخص الأنشطة التي سينهض بأعبائها النادي.

سوف يمرض ببقية هذا الفصل أنشطة لا منهجية في الرياضيات، والتي يمكن توظيفها داخل دائرة أنشطة النادي. ومع ذلك، تستطيع المدرسة أن تزود الطلبة بأي نوع من الأنشطة الإضافية خارج نطاق نادي الرياضيات.

فرق الرياضيات Mathematics Teams

تمتلك كثير من المقاطعات روابط غير رسمية نظمت لأغراض التنافس القائم بين المدارس الثانوية-المحلية. إن هذه المنافسات

نادي الرياضيات The Mathematics Club

رغم أن بنية نادي الرياضيات تسهم في تسهيل مجموعة من الأنشطة التي ستناقش خلال هذا الفصل، بيد أنه ليس من الضروري إقامة ناد لغرض إجراء هذه الأنشطة. إن إنشاء ناد للرياضيات يتطلب تخطيطا جوهريا، يبتدئ من اختيار المشاركين (الذين يتألفون من أعضاء هيئة التدريس، وطلبة أعضاء) وينتهي بتحديد المنظمة وأهدافها. ويمكن أن تقرر النتيجة الأولى لنادي الرياضيات على يدي مدير المدرسة أو أحد المعلمين ممن يهتمون بهذا الأمر، إضافة إلى مساهمة مجموعة من الطلبة الذين يعملون إلى المشاركة الفاعلة في النادي.

وأيا كان مصدر اللجنة الأولى لنادي الرياضيات، فإن المعلم الذي سيقع عليه الاختيار بوصفه راعيا لإدارة النادي، يتحتم عليه إدراك طبيعة الحاجة إلى تخصيص فترة زمنية مناسبة، وبذل جهد استثنائي لضمان نجاح هذه المهمة.

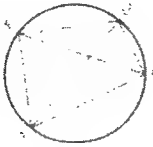
تتيح أنشطة النادي لراعي إدارة النادي فرصة مناسبة للتطوير رياضيا وخبرائيا، لأن نادي الرياضيات يسمح باستكشاف غير محدود للموضوعات الرياضية وتطبيقاتها خارج نطاق المنهج الدراسي للمدارس الثانوية. ويسمح لجميع المشاركين في أنشطته المتنوعة بإحساس ملمع بالإنجاز، والذي سينشأ عن تقدير حقيقي لمادة الرياضيات، وتطبيقاتها، ولطبيعة الدور الذي تلعبه في المجتمع.

إنشاء ناد رياضي

Establishing a Mathematics Club

بعد وقوع الاختيار على راعي النادي ومدير أنشطته، ينبغي أن يخطط الخطوة الأولى نحو تمهيد نفسه وإقامة جسور الألفة مع المهمة الجديدة عن طريق مناقشة مسألة بداية العمل مع زملائه. والدرا، واختيار مجموعة من الطلبة الذين يمكنهم ميولا رياضية. وسيكون من المفيد جدا التتقيب عن راعي إدارة نادي في مدرسة أخرى، والذي قد مر بخبرات وتجارب مماثلة. إن الاقتراحات التي تستند إلى الخبرات والمواد المستقاة من المصدر الأول، والتي يبرهن على نجاحها، ستكون مفيدة لراعي إدارة نادي الرياضيات-الجديد، ويدونه سعيائ من ازدهار الأفكار والآراء بصد العمل الذي ينتظره (انظر المراجع المدرجة في نهاية هذا الفصل).

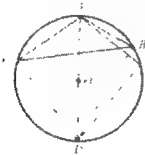
وبعد تلقي النصيحة والاقتراحات من الزملاء داخل المدرسة وخارجها، والحصول على الدعم من الإدارة ومجموعة الطلبة المهتمين بالرياضيات، ينبغي على المعلم أن يمسك يزماء واجب الاستقطاب. كما يجب استخدام جميع مسالك الاتصالات



بالنسبة لأضلاع رباعي الأضلاع PQRS المرسومة داخل الدائرة، فإن نظرية بطليموس تنص على ما يلي:
 $(RP)(SQ) = (PQ)(RS) + (PS)(RQ)$
 استخدم نظرية بطليموس لإيجاد طول الضلع BC بالمثلث ABC، المرسوم داخل الدائرة طول نصف قطرها 5. إن أطوال AB و AC هي 5، و 6 على التوالي.

إن طالباً بمستوى يزيد بقليل عن الحد المتوسط سيحل هذه المسألة بصورة صحيحة بإحدى الإجابتين: $4 - 3\sqrt{3}$ أو $4 + 3\sqrt{3}$. أما الطالب الموهوب بحق، فسوف يدرك وجود "حلين" لهذه المسألة، سواء كانت $\angle A$ حادة أو منفرجة. ويظهر أدناه أنموذج للحل.

الحل SOLUTION



نلاحظ وجود احتمالين للاعتبار في هذه المسألة. فكل من المثلثين ABC، ABC' قد مسا الدائرة O من الداخل، وكانت $AB=5$ ، $AC=6$ ، $AC=AC'$ ، ويجب علينا أن نجد قيمة BC و BC'. ارسم قطر الدائرة AOD، وقياسه 10، وارسم قطع المستقيمت \overline{DC} ، \overline{DB} ، \overline{DC} .

$$m\angle AC'D = m\angle ACD = m\angle ABD = 90^\circ$$

تأمل الحالة التي تكون $\angle A$ في $\triangle ABC$ زاوية حادة. في المثلث قائم الزاوية ACD، $DC=8$ ، وفي المثلث قائم الزاوية ABD، $BD=5\sqrt{3}$. بتطبيق نظرية بطليموس على الشكل رباعي الأضلاع ABCD.

تنظم. غالباً، على ثلاثة مستويات: طلبة المدارس المتوسطة/الثانوية الدنيا والعليا، أي في الصفوف: التاسع، والعاشر، والحادي عشر، والطلبة في المدارس الثانوية العليا. ويتم اختيار أسئلة المناقشة لكل مرحلة بحيث تكون متناسبة مع إطار معرفة الطالب بمادة الرياضيات. وقد تنظم بعض الروابط الرياضية بحيث تتنافس المدارس مع بعضها الآخر وفق أسس دورية، وتخصص مكافأة للفريق الذي يحصد أعلى مجموع علامات (على سبيل المثال، عدد المسائل المحلولة بصورة صحيحة) في نهاية السنة الدراسية (أو الفصل).

ويمكن الحصول على روابط الرياضيات في منطقتك الجغرافية من خلال المنظمات المبنية المحلية والكلية.

من المرجح أن يتضمن فريق الرياضيات المدرسي طلبة أعضاء من نادي الرياضيات، ولكن ينبغي أن لا يقتصر الاختيار والمساهمة على الطلبة الأعضاء بالنادي فحسب. ومن المحتمل أن يوجد طلبة موهوبين في المدرسة، والذي لم تتوفر لديهم فرصة للاتحاق بنادي الرياضيات بسبب التزاماتهم الأخرى، لكنهم سيكونون قاندين على المشاركين ضمن فريق الرياضيات في وقت آخر. بالإضافة إلى الحصول على توصيات المعلم، ينبغي على مدرب فريق الرياضيات إعداد امتحان الدخول لجميع المناصب المحتملة للمرشحين في فريق الرياضيات. كما يجب أن يغطي مثل هذا الامتحان أكبر مساحة ممكنة من الموضوعات، باستخدام أنواع الأسئلة التي ترد بكثرة في لقاء فريق الرياضيات. يضاف إلى ذلك، ضرورة تضمّن الامتحان على فقرات يعرض خلالها موضوع (أو مفهوم) جديد بصورة بليغة ومحمكة، ثم يطرح سؤال يتعلق بهذا الموضوع. إن مثل هذا النوع من الامتحان لطلبة الهندسة، سيتضمن تقديم نظرية بطليموس، ثم طرح سؤال يتطلب الرجوع إليها لضمان حله بصورة صحيحة.

مثال EXAMPLE:

نظرية بطليموس Ptolemy's Theorem

في الشكل رباعي الأضلاع المرسوم داخل دائرة، فإن حاصل ضرب أطوال أقطارها يساوي مجموع حاصل ضرب أضلاعها المتقابلة.

How To Solve It (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945, 1973)

مصدرا أوليا خصبا لمدرّب فريق الرياضيات يستطيع استخدام في التحضير لتدريب فريق الرياضيات بميدان مهارات حل المسائل.

توفر جلسات تدريب فريق الرياضيات فرصة ممتازة لعرض الموضوعات التي لا يتم تعلمها بالمدارس الثانوية في الحالات الاعتيادية، وتمتاز بأهمية بالغة عند حل المسائل النموذجية التي تواجه أعضاء فريق الرياضيات في اللقاءات التي تتعقد بين حين وآخر. وهناك مصدر مفيد آخر في هذا المضمار هو:

A.Posamentier and S. Krulik's, Problem Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions (Thousand Oaks, CA: Corwin, 1998).

إن القائمة الآتية تقترح بعض الموضوعات التي يمكن أن تكون نافعة لفريق الرياضيات:

- معادلات دايوفانتين Diophantine Equations
- المتوسطات الحسابية، والهندسية، والمتناسقة.
- تطبيقات رياضية - جبرية معدلة.
- اختبارات حول قابليات القسمة.
- نظريات هندسية لكل من: سيفا، ومينلاوس، وبطليموس، وستيورات، وهرون، وآخرين.
- تقانات في حل المسائل.
- علاقات جبرية متنوعة.
- موضوعات في نظرية العدد.
- المتواليات والتسلسلات.
- الاحتمالات.
- المتباينات Inequalities.
- منظومات من المعادلات.
- موضوعات من نظرية المعادلات.
- مسائل النهايات الصغرى والعظمى في الهندسة والجبر.

ونكتيجة لمناقشة هذه الموضوعات، وموضوعات رياضية أخرى مناسبة، سيقوم كل طالب بتدوين حقائق وعلاقات، بصورة منفصلة، وسيقومها جاهزة بين يديه كمرجع. إن مجموعة الطلاب من الحقائق والعلاقات يمكن أن تتضمن تلك التي أدرجت في نهاية هذا الفصل.

يتطلب تدريب الفريق تمهيدا تاما من راعي إدارة الفريق، فبالإضافة إلى التحضير الدائم وجمع أسئلة الفريق المطروحة سابقا (وموضوعات أخرى ذات صلة بالأسس)، ينبغي أن يكون راعي إدارة الفريق جاهزا على الدوام لحضور لقاءات فريق الرياضيات التي تقع خارج العمل اليومي بالدراسة، فقد تظهر

$$(AC)(BD) = (AB)(DC) + (AD)(BC)$$

$$(6)(5\sqrt{3}) = (5)(8) + (10)(BC)$$

أو

لذا.

$$BC = 3\sqrt{3} - 4$$

والآن تأمل الحالة التي تكون فيها $\angle A$ منفرجة، كما في المثلث ABC' . في المثلث قائم الزاوية $AC'D$ ، $DC=8$. ويتطبيق نظرية بطليموس على الشكل رباعي الأضلاع $ABDC'$.

$$(AC')(BD) + (AB)(DC') = (AD)(BC')$$

$$(6)(5\sqrt{3}) + (5)(8) = (10)(BC')$$

$$BC' = 3\sqrt{3} + 4$$

إضافة إلى اختبار قدرة الطالب على استخدام الحقائق التي تعلمها جديدا، فإن طبيعة السؤال السابق ستتيح للطالب (نو القدرة الجيدة) بأن يكون أكثر تألقا، وسيكتشف الطالب الغموض الموجود في السؤال المطروح فيبعد إلى تقديم حل متكامل له. إن كل سؤال حول اختبار الدخول هذا، سيقدّم دالة تم تعريفها بوضوح.

ومنى وقع الاختيار على أعضاء فريق الرياضيات، ينبغي أن يحدد وقت كاف لتدريبهم. غالبا ما يلتقي أعضاء فرق الرياضيات قبل بدء اليوم الدراسي، خلال ساعة وجبة الغداء (حيث يستطيع الطلبة تناول وجبة الغداء خلال العمل على أنشطة الرياضيات المختلفة)، وخلال يوم الدراسة النظامي، أو بعد الحصة الأخيرة من النهار. وفي بعض الحالات، قد يلتقي أعضاء فريق الرياضيات بطريقة تشابه اجتماع الطلبة في الصف. لقد وقع اختيار بعض المدارس على فتح الطلبة وحدات تقدير خاصة لمساق دراسي حول موضوع حل المسائل، وموضوعات خاصة بالرياضيات والتي لا تعد جزءا من المنهج الدراسي في المدارس الثانوية. إن مساقا دراسيا من مثل هذا النوع سيقود في تدريب أعضاء فريق الرياضيات، بالإضافة إلى إمكانية استخدامهم للمواد المدرجة في نهاية هذا الفصل. وسيكون مدرب الفريق على جانب من الحكمة عند محاولته الحصول على الأسئلة التي وردت في اجتماعات سابقة لفريق الرياضيات. إن معرفة طبيعة الأسئلة السابقة، والموضوعات التي استأثرت بمعالجتها سيمنح للطلبة فكرة واضحة عما يتوقع طرحه من أسئلة في اللقاءات القادمة، وكيفية الإعداد لها بصورة سليمة.

يعد الكتاب الكلاسيكي لجورج بوليا George Polya والذي يحمل عنوان: "البحث عن الحل"

سنويا تلتي فيه فرق تعدادها كل منها خمسة عشر طالبا، تمثل الفائزين في منافسات المدن المختلفة، والمقاطعات، والولايات لقرض سماع محاضرات حول علم الرياضيات، والتنافس فيما بينهم ضمن اختبارات ومباريات أخرى، والتعاضد سوية في بيئة اجتماعية توثق الصلات فيما بينهم.

يستمر الاتحاد بالنمو، ليمثل الولايات من معظم بقاع الولايات المتحدة. وتستخدم مراكز محلية لإدارة الأمور التي تتعلق بهذه المؤتمرات السنوية.

بصورة عامة، تذهب مباريات رياضيات المدارس العليا إلى مدى أبعد، باتجاه تحقيق وإثارة الاهتمام بالرياضيات على عموم قطاعات المدرسة ومراحلها. ويعد المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات NCTM، بالإضافة إلى منظمات معلمي الرياضيات المحلية موارد خصب للمعلومات عن روابط الرياضيات، أو طبيعة مباريات الرياضيات المتاحة لطليتك.

Mathematics Projects الرياضيات مشاريع

تأمل تحديد ورقة بحث المساق الدراسي أو إنجاز مشروع المساق الدراسي في درس الرياضيات الذي تنهض بأعباء تعليمه.

لقد برهن هذا النشاط على نجاحه الملموس مع مجاميع بمستويات مختلفة من القدرات والقابليات. فقد يأخذ مشروع الرياضيات قالب مشروع إنشائي مثل خياطة المنحني Curve Stitching، أو إنشاء معدات وأدوات خاصة، أو إنشاء سلسلة من حلقات أو قضبان. وفي بعض الأحيان تتضمن ورقة بحث المساق الدراسي استكشافا أصيلا في بضعة موضوعات بالرياضيات، أو إعداد تقرير حول تجربة أجراها الطالب، وقد تكون ورقة البحث محاولة لمعالجة لبعض موضوعات الرياضيات - غير المألوفة (وهذه هي الحالة المثلى عندما تكون حدود المعالجة واضحة ومحددة)، أو قد تفرس مناقشة لموضوع من تاريخ الرياضيات (على سبيل المثال، تتضمن النمو التاريخي مفهوم ما أو مسألة رياضية محددة).

ينبغي أن تترك للطالب فرصة اختيار الموضوع مشروع الرياضيات الذي يتناسب مع اهتماماته، على أن يسهم المعلم في إبداء التسهيلات اللازمة لإثارة وتحفيز الاهتمام لدى الطالب بموضوعات متعددة. وبعد اختيار الموضوع، يجب على الطالب أن يجمع كل ما يستطيع قراءته أو التتقيب عنه حول جل ما يتوفر من معلومات عن الموضوع قيد الدراسة. إن الاحتفاظ بملاحظات وتعليقات دقيقة خلال فترة الدراسة والتتقيب ستكون ضرورية لضمان تحقيق مشروع ناجح. وستسهم المؤتمرات الدورية مع المعلم في ضمان استمرار الطالب بالسير

الحاجة، بين حين وآخر، إلى سفره مع الفريق إلى مدارس أخرى. إن عمل مدرب الفريق بحاجة إلى مزيد من التكريس والالتقان والإخلاص، لكن المكافأة التي ستثمر عن بذل هذه الجهود، ستكون مرضية ومتوازنة مع ما بذل من أجل الارتقاء بإنجازات الفريق.

Mathematics Contests الرياضيات مباريات

تتوافق إدارة المباريات المختلفة على النطاق الوطني، ونطاق الولاية، والنطاق المحلي مع أنشطة فريق الرياضيات إلى حد بعيد. وتتضمن هذه المباريات امتحان الرياضيات للمدارس الثانوية الأمريكية American High School Mathematics Examination (AHSME)، و امتحان الرياضيات للمدارس العليا الأمريكية American Junior High School Mathematics Examination، والتي ترعى جانباً كبيراً منها الجمعية الرياضية في أمريكا Mathematical Association of America وتكون مفتوحة. غالباً، لجميع الطلبة (ولا تقتصر على الطلبة المنتمين لفريق الرياضيات).

من الضروري وجود دعابة وإعلانات شاملة داخل المدرسة لجذب أكبر مجموعة ممكنة من الطلبة للمشاركة في المباريات. ويستطيع الطلبة (الذين لا يقعون ضمن أفضل عشرة تلاميذ وأعظمهم دراية بالرياضيات في المدرسة) المشاركة في المباريات لأسباب استمتاعية بحتة.

وتقع جملة من الأسئلة الخاصة بمباريات الرياضيات هذه، في متناول طلبة الرياضيات المتوسطين (انظر عينة المسائل في الصفحات القادمة). تحتوي هذه المباريات، أيضاً، على أسئلة تتميز بروح التحدي والمنافسة، تسهم في انتقاء الطلبة المتفوقين والموهوبين وغالباً، ما تمنح جوائز ومكافآت على مستوى المدارس، إضافة إلى الجوائز المحلية، وأخرى على مستوى الولاية. وفي بعض الأحيان جوائز ومكافآت على المستوى الوطني.

توفر المباريات الرياضية، متعة وإثراءً مناسباً لمجموعة كبيرة من طلبة المدرسة. ويمكن لهذه المنافع والفوائد أن تزداد وتتعمق عندما يراجع مدرب فريق الرياضيات مسائل المباريات ومشكلاتها مع الطلبة الذين لم يشاركوا فيها، بعد انتهاء فترة المباريات. وقد تتجاوز، في بعض الأوقات، مباريات الرياضيات حدود حالة الاختبار. إن مثلاً ملموساً على هذا الأمر هو اتحاد رياضيات المقاطعات الأمريكية American Regions Mathematics League (ARML) والذي يتضمن مؤتمراً

Extension of Pappus's Theorem	توسيع نظرية بابوس
Fermat's Last Theorem	نظرية فيرمات الأخيرة
Fibonacci Numbers	أعداد فايبوناتشي
Fields	الحقول
Finite Differences	الفروق المحدودة
Finite Geometry	الهندسة المنتهية (المحدودة)
The Five Regular Polyhedra	متعدد السطوح - المنتظمة الخمسة
Flexagons	الأشكال المثنئية
The Four - color Problem	مسألة الألوان الأربعة
The Fourth Dimension	البعد الرابع
Fractals	أشكال هندسية ومنحنيات
Game Theory	نظرية اللعبة (المباراة)
Gaussian Primes	أوليات كلاوس
Geodesics	جيوذيسيات
Geometric Dissection-Tangrams	تحليلات هندسية
Geometric Fallacies	مغالطات هندسية
Geometric Models	نماذج هندسية
Geometric Stereograms	أشكال هندسية مجسمة
Geometric Transformations	تحويلات هندسية
Geometry of Bubbles and Liquid Film	هندسة الفقاعات وغشاء السائل
Geometry of Catenary	هندسة السلسلة
Geometry Constructions (Euclid)	إنشاءات هندسية (أقليدس)
Gergonne's Problem	مسألة جيرجوني
Complex roots of Quadratic and Cubic Equation	الوصف الرسمي للجذور العقدية في المعادلات التربيعية والتكعيبية
Groups	الزمر
Higher Algebra	الجبر العالي
High Order Curves	منحنيات الرتبة العليا
Hyperbolic Functions	دوال القطع الزائد
The Hyperbolic Paraboloid	مجسم القطع المكافئ
Hypercomplex Numbers	الأعداد فائقة التعقيد
Intuitive Geometric Recreation	الاستجماعات الهندسية البديهية
Investigation the Cycloid	استكشاف السطح النويوي
The Law of Growth	قانون النمو
Liner Programming	البرمجة الخطية
Linkages	الارتباطات
Lissajou's Figure	أشكال ليزاوس
Lobachevskian Geometry	هندسة لوباتشيفسكي
Logarithms of Negative and Complex Number	لوغاريتمات الأعداد السالبة والعقدية (الركبة)

على المسار الصحيح ودون الانحراف عن غايته. إن الملاحظات الذي اعتني بجمعها خلال الجلسات المنعقدة، مع الملاحظات والتعليقات الشاملة والدقيقة التي استحصلت في مرحلة القراءة ستجعل من عملية كتابة التقرير أمراً سهلاً.

وندرج أدناه قائمة ببعض الموضوعات الممكنة لاستخدامات الطالب في مضمار مقالة المساق الدراسي (أو المشروع). إن هذه القائمة قد قصد بها توفير دليل يستأنس به لتوليد موضوعات إضافية. فقط.

موضوعات لمشاريع الرياضيات

Topic for Mathematics Projects

Advanced Euclidean Geometry	هندسة إقليدس المتقدمة
Algebraic Fallacies	مغالطات جبرية
Algebraic Models	نماذج جبرية
Algebraic Recreations	استجماعات جبرية
Analog Computer	حاسوب تناظري
Ancient Number Systems and Algorithms	نظم وخوارزميات الأعداد القديمة
Arithmetic Fallacies	مغالطات حسابية
Arithmetic Recreations	استجماعات حسابية
Bases Other Than Ten	أسس غير عشرية
Binary Computer	حاسوب ثنائي
Boolean Algebra	الجبر البولي
Brocard Points	نقاط بروكارد
Calculating Shortcuts	احتساب المختصرات
Cavalieri's Theorem	نظرية كافاليري
Checking Arithmetic Operations	ضبط العمليات الرياضية
Conic Sections	المقاطع المخروطية
Continued Fractions	الكسور المستمرة
Cryptography	التشفير
Crystallography	علم البلورات
Curves of Constant Breadth	منحنيات باتساع محدد
Cylindrical Projections	مساقط اسطوانية
Desargue's Theorem	نظرية ديسارجو
Determinants	المحددات
Diophantine Equations	معادلات دايوفانتين
Divisibility of Numbers	قابلية قسمة الأعداد
Duality	الازدواجية
Dynamic Symmetry	التماثل الديناميكي
Elementary Number Theory Application	تطبيقات نظرية الأعداد البسيطة
Euler line	خط أيلر
Extension of Euler's Formula to N Dimension	توسيع صيغة أيلر للأبعاد النونية.

Spherical Traingles	المثلثات الكروية
The Spiral	اللولب/ الحلزون
Statistics	الإحصاء
Steiner's Construction	إنشاءات "شتينر"
Tessellations	الترصيع بالفسيفساء
Theory of Braids	نظرية الضفائر
Theory of Equation	نظرية المعادلات
Theorem of Perspective	نظرية المنظوريات
Three-Dimension Curves	منحنيات ثلاثية الأبعاد
The Three Famous	المسائل الثلاثة الشهيرة في
Problems Of Antiquity	المصور القديمة
Topology	الطوبولوجيا
Unsolved Problem	مسائل غير قابلة للحل
Vectors	التجهات

Logic	المنطق
Magic Square	إنشاء المربع السحري
Construction	
Map Projection	مساقط الخريطة
Mascheroni's	إنشاءات ما شيروني
Constructions	
Mathematics and Art	الرياضيات والفن
Mathematics and Music	الرياضيات والموسيقى
Mathematics of Life	رياضيات التامين على الحياة
Insurance	
Matrices	المصفوفات
Maximum-Minimum	النهايات الدنيا والقصى في
Geometry	الهندسة
Means	المتوسطات
Method of Least Squares	طرق المربعات الأصغر
Metric System	النظام المترى
Minimal Surface	السطوح الأدنى
Modulo Arithmetic in	العامل الحسابي في الجبر
Algebra	
Monte Carlo Method of	طريقة مونت كارلو في تقريب
Number Approximation	الأعداد
Multinomial Theorem	نظرية متعدد الحدود
Napier's Rods	قضبان نابيير
Networks	الشبكات
The Nine-Point Circle	الدائرة بتسعة نقاط
Nomographs	نوموجرامات
The Number Pi, Phi, or e	العدد π , ϕ , أو e
Number theorem Proof	براهين نظرية العدد
Paper Folding	طي الأوراق
Partial Fractions	الكسور الجزئية
Pascal Theorem	نظرية باسكال
Perfect Number	الأعداد التامة
Polygonal Number	الأعداد المضلعة
Prime Number	الأعداد الأولية
Probability	الاحتمالات
Problem Solving Algebra	حل المسائل في الجبر
Projective Geometry	الهندسة الإسقاطية
Proofs of Algebraic	براهين النظريات الجبرية
Theorems	
Properties of Pascal	خصائص مثلث باسكال
Triangle	
Pythagorean Theorem-	ثلاثيات نظرية فيثاغورس
Triples	
Regular Polygons	المضلعات المنتظمة
The Regular Seventeen-	مضلع منتظم بـ 17 وجها
sided Polygon	
Remannian Geometry	هندسة ريمان
Solving Cubics and	حل الكعيات
Quartics	
Special Factoring	التحليل العاملي الخاص

ينبغي على المعلم أن يشير، في بعض الأحيان (وخلال المراحل المبكرة من المشروع بالتحديد) إلى ماهية الفجوات المكتوبة التي ستضمها الجزء، الكتابي منه. ومن الضروري أن لا يلجأ المعلم إلى تحديد الصيغة والمحتوى بصورة حاسمة بحيث يؤدي إلى إحباط العنصر الإبداعي الذي قد يتضمنه عمل الطلاب عند أعدادهم لتقاريرهم. ويستطيع المعلم أن يقترح اجتماعات فردية مع الطلبة الذين يجدون بأن الشكل المقترح عليهم لا يتلاءم مع الخصائص التي يتم بها مشروعههم. إن ميزات مثل البيولوجرافيا ينبغي أن تكون جزءاً لا يتجزأ من جميع أوراق البحث التي يقوم الطلبة بإعدادها. كما أن دعم النتائج وحساباتها باستخدام الآلة الحاسبة والحاسوب سيكون ضرورياً وبحاجة إلى تشجيع دائم كلما كان هذا الأمر مناسباً.

معرض الرياضيات The Mathematics Fair

يعقد في عدة مناطق من البلاد، معارض (سنوية، نصف سنوية، ... الخ) لمشاريع الرياضيات التي يعمدها الطلبة. وتتراوح هذه المعارض بين معارض على مستوى المدارس وترتقي لكي تصبح معارضاً على مستوى البلاد في مجال اهتماماتها بالمشاريع الطلابية. ويتم رعاية بعضها وتمويلها محلياً، والبعض الآخر تتكفل برعايته منظمات وطنية. بصورة عامة ينبغي أن تتوفر مثل هذه المعلومات من خلال الإدارات أو منظمات معلمي الرياضيات. إن إمكانية العرض النهائي في معرض الرياضيات ستفيد بوصفها تحفيزاً إضافياً للطلبة يزيد من عرى ارتباطهم بمادة الرياضيات والأنشطة المصاحبة لها.

إن مثل هذا النوع من الاتصال سيتيح للطلبة الموهوبين فرصة المساهمة، وتعاود الحوار مع الباحثين الرياضيين لمعرفة المزيد عن عملهم وإنجازاتهم العلمية. كذلك يمكن أن يتعمق الاتصال والحوار عبر البريد الإلكتروني، أو تقنية الاتصال التي تتيحها تقنية المعلومات.

مجلة الرياضيات بالمدرسة

The School Mathematics Magazine

إن من المهام التقليدية لقادي الرياضيات هي إصدار مجلة الرياضيات بالمدرسة. تتألف هذه المجلة من بضعة أوراق بحث لأفضل الطلبة (أو مشاريعهم). إن عمل الطالب (مع بعض أنواع الانتقاء في تحرير النص) يمكن أن يتحقق له فرصة النشر في مجلة الرياضيات هذه.

بصورة عامة، يتم توزيع المجلة (أو بيمها) من خلال المدرسة، وترسل نسخ منها إلى المدارس القريبة، أما إلى الطلبة الموجودين في تلك المدارس، أو إلى رؤس قسم الرياضيات.

إن مشروعاً من هذا النوع غالباً ما يوفر، نشاطاً مثمراً لكل عضو في النادي. وسينفض الطلبة (الأكثر تحفيزاً) بانجاه مادة الرياضيات، والطلبة الذين يتميزون بمستوى متقدم في هذه المادة) بأعباء كتابية محتويات مجلة الرياضيات المرتقبة، بينما سيمساهم الطلبة ممن يتمتعون بمواهب فنية في تصميم التوزيع الطباعي، والغلاف، والأعمال الفنية التي ستضمونها. أما بقية الطلبة فسيملعون دوراً مهماً في الجوانب التجارية من المشروع، مثل: الدعاية والإعلان، والتوزيع، ومتابعة المخططات المادية. إن دور راعي إدارة المجلة سيكون، بالضرورة، في تذليل العقبات عبر تعريف حدود المهمة ومتطلباتها، ثم السماح للطلبة بإجراء تعديلات جزئية تتناسب مع حاجاتهم ورغباتهم. وكما هو الحال مع أي مشروع أحسن تنظيمه، يجب أن يكون على الأقل هناك شخص محدد ينفض بأعباء إدارة المشروع بكافة تفاصيله. وسيكون الاهتمام والعناية البالغة يمثل هذه الأمور مثل: القدرات التنظيمية، وميزة القيادة ضرورياً قبل اختيار الطالب الذي سيكون رئيس التحرير. وإن هذا الاختيار سيكون أكبر تأثيراً إذا نشأ (على الأقل بجزء من أجزائه) من مجموعة الطلبة المساهمين في هذا النشاط.

بالإضافة إلى توفير قناة خارجية لمرض الشاريع والمساهمات الفردية في الرياضيات، فإن المجلة الرياضية ستكون مصدر فخر دائم لكل من ساهم في إعدادها. وستذهب هذه العناية بعيداً نحو إثارة مزيد من الاهتمام بالرياضيات، بينما توفر مورداً جيداً لإثراء مادة الرياضيات.

عندما يتضمن مشروع الطالب بعض التماذج الفيزيائية، مثل الترابطات أو إنشءات هندسية، فإن العرض المجرد سيكون ذو معنى وهدف محدد، أما عندما يكون مشروع الطالب عبارة عن تطوير رياضي، أو دراسة بعض المفاهيم، آنذاك تصبح عملية العرض أمراً ضرورياً. وتنظم جل معارض الرياضيات بحيث توفر فرصة مناسبة للطلبة في عرض أوراق بحثهم مقالاتهم (شغفياً) أمام مجموعة من المحكمين. ويتم اختيار الفائزين، في مراحل متقدمة، من كل مستوى مرحلة ساهمت في المعرض. بصورة عامة يتجذب الكثير من أعضاء الجماعة إلى مثل هذه المناسبات.

إن خبرة التعلم التي تتضمنها عملية إعداد المشروع أو كتابة ورقة بحث، ثم عرضه على أنظار الغير، أو الدفاع عما ورد فيه من آراء، تعد ذات أهمية بالغة. وسواء ظفر الطالب بالفوز في منافسات المعرض أو فشل في تحقيق ذلك، فإن الأهمية التي تمتاز بها هذه المشاركة تكمن في الاهتمام والعناية الذي يوليه الحاضرون للعمل الذي قام بإنجازه.

التعاون مع الجامعة

Cooperation With A University

إن التقارب مع الجامعة وإقامة صلات متينة معها قد تزود الفتيان الموهوبين بفرصة ذهبية للعمل سوية مع الرياضيين الأكاديميين. وفي هذا المقام ستوفر للطلبة فرصة الحصول على خبرة مباشرة بمهامية الرياضيات التي تقع خارج دائرة غرفة التعليم وقد يصبح الطلبة طرفاً في العمل الذي يساهم فيه الباحث، أو قد يسمعون وراء استقصاء رياضي مواز لعمل الباحث وبمستوى يتناسب مع قدراتهم، وتحت وصاية وإرشاد الباحث. وفي كل حالة من هذه الحالات سيكون الإثراء مثمراً. إن حصيلة ما سيجنيه الطالب من هذا النشاط العلمي قد يجعله مؤهلاً للمشاركة في معرض الرياضيات أو في مجلة متخصصة كي ينشر على صفحاتها. إن الانضمام والانتساب كعضو في جامعة محلية سيوفر للطلبة الموهوبين فرصة للحصول على مساقات دراسية بالرياضيات المتقدمة. ويعني أن يتم اختيار المعلم المناسب والذي سيرتبط معه الطلبة، بعناية بالغة، بحيث تكون الخبرة التي سيكتسبها الطلبة منه مصدر إثراء لمراقهم بدلاً من أن تكون مصدراً لإحباطهم، الأمر الذي سيكون ذو تأثيرات سلبية تصعب معالجتها.

وفي حالة عدم وجود جامعة في الجوار، فإن الارتباط عن طريق المؤتمرات الفيدوية (الانترنت البعدي) Video Conference يمكن أن يستخدم لربط الطلبة وتقديمهم إلى بيئة عمل الرياضيين الأكاديميين.

الفصل الثالث من هذا الكتاب. وفي هذه الحالة سيشارك جميع المشاهدين والمستمعين بصورة فاعلة. وببساطة دع كل طالب يختار عدد 5 المكون من ثلاث مراتب، ويتبع الخطوات المحددة ليحصل على العدد 1089. إن النتيجة المذهلة المتساوية التي يتحصل عليها كل واحد - بغض النظر عن العدد الذي اختاروه، ومن خلال اتباع الإرشادات، ستثير بالتأكيد متعة لهم.

نظرا للطبيعة الرثية التي تمتاز بها الهندسة فإنها تقدم عددا من الموضوعات التي يمكن أن تكون مناسبة لهذا النوع من برنامج الجمعية العمومية للرياضيات. إن قص قطعة كبيرة من النصف الأول لشريحة موبوس Mobius من جهة الحافة، ثم ثلث العرض من الحافة، سوف ينشئ عنصرا للتشويق بين المشاهدين والمستمعين. ولتجنب الخمول أثناء العرض، ينصح بعمل ثقب (يعني، بصورة جزئية) في شريحة موبوس قبل البدء بالبرنامج.

إن كثيرا من المفاهيم والأسس الطوبولوجية تأسر اهتمام عامة المشاهدين. وتتضمن مثل هذه الموضوعات نزق الصدر دون اللجوء إلى نزق السترة الخارجية، وقلك وثائق رجلين ثم إحكام ربطهما بحبل مربوط على رسيهما دون نزق الحبال، وأمور أخرى مشابهة. إن التمتع بالنظر في الوحدات الإثرائية الموجودة في هذا الكتاب سيتيح لك فرصة تلمس أفكار جديدة لبرنامج الجمعية العمومية للرياضيات. إن مصدرا مفيدا لمثل هذه الأفكار هو:

Riddles in Mathematics, by E. P. Northrop (Princeton, NJ: Van Nostrand, 1944).

إن مراقبة عرض مسرحي يعالج اختصارا رياضيا قصيرا، يكون ذو أبعاد تعليمية إضافة إلى الجوانب الترفيهية التي ينالها المشاهدون من متابعة فقراته. حيث يمكن اختيار فريقين للتنافس فيما بينهم أمام المشاهدين والمستمعين.

وكما كانت الأسئلة المروضة واضحة وبينة لدى المشاهدين والمستمعين، فإن هذه الخبيرة ستكون عاملا محفزا لهم على المساهمة سوية مع التبارين على المسرح. إن الأسئلة التي وقع عليها الاختيار لكي تستخدم في العرض، ينبغي أن تكون في حدود فهم جل الطلبة الموجودين ضمن جماهير المشاهدين والمستمعين. ويمكن استخدام لوحة عرض كبيرة لتقديم الأسئلة وعرضها على أنظار المشاهدين.

إن الاقتراحات المقدمة لبرنامج الجمعية العمومية للرياضيات، يمكن أن توظف في الإنتاج التلفزيوني، المدد على شرط يتعرض على صفوف منفردة، أو بيت حيا على الهواء

برنامج الجمعية العمومية للرياضيات

The Mathematics Assembly Program

بالرغم من كون المجلة أكثر شوعا من برنامج الجمعية العمومية للرياضيات، فإنه قد يكون تناظرا شقيقا لها. سيوزد الطلبة بغرضه لعرض بعض الأعمال الفردية أو أعمال المجموع على مجموعة كبيرة من المستمعين، ويلاحظ بأن رد الفعل الأولي لجميع المعلمين إزاء دلائل نجاح برنامج الجمعية العمومية للرياضيات هو الميل نحو الشك بإمكانية تحقيق أهدافه. إن فكرة عرض برنامج لمجموعة غير متجانسة من المستمعين هو أمر شاق ومربك. وهناك جملة من الإمكانيات لبرنامج هذه الجمعية العمومية، فعلى سبيل المثال، يمكن عرض سلسلة من المسرحيات الهزلية القصيرة لغرض إضفاء بعد مسرحي على أهم الإنجازات في تاريخ الرياضيات. ويمكن أن تتضمن. كذلك، مسرحية جذلة Light-headed، مثل قصة الفتى كاوس، والمذكورة في الفصل الثالث من هذا الكتاب. كما يمكن كتابة مسرحية قصيرة تتناول تطبيقا لموضوع في رياضيات المدرسة الثانوية شريطة أن نكون حذرين بحيث يكون الموضوع مناسباً لمعلم المستمعين الذين سيحضرون لمشاهدة هذا النشاط ثم إنتاج برامج ناجحة للجمعية العمومية للرياضيات، والتي تضمنت مشاركة فردية لبعض الطلبة، أو مجاميع صغيرة في عرض موضوعات قصيرة وعلى جانب كبير من الإثارة لمستمعين من قطاعات عامة فعلى سبيل المثال، تمتاز الحيل والخدع الرياضية القصيرة بكونها بسيطة وسهلة لدرجة جعلها كافية لتوليد اهتمام متزايد لدى جميع فئات الطلبة الموجودين في حلقة المستمعين وبصرف النظر عن قابلياتهم. إن المقدم Presenter سيقوم بعرض طريقة أمام أنظار المشاهدين والمستمعين تتناول كيفية ضرب الرقم 11 ذهنيًا. إن ضرب العددين 11×62 سيتضمن ببساطة، إضافة $6+2$ وإدراج هذا المجموع بين 6، 2 للحصول على الناتج 682. وبالنسبة لعدد مثل 75، فإن الضرب الذهني 11×75 سيشمل إضافة المراتب العشرة لمجموع $5+7$ إلى الرقم 7 بعد إدراج وحدات المراتب بين 7، 5، أي $11 \times 75 = 825$. أما بالنسبة للأعداد التي تتألف من ثلاثة مراتب عشرية أو أكثر، فإن القاعدة تتضمن إضافة كل زوج من الأرقام مبتدئين من اليمين، وفي كل مرة على التوالي ندرج وحدات مراتب المجموع (ناقلين المرتبة العشرية) بين مراتب النهاية. وعليه

$11 \times 3542 = 3542 \times (4+2) = (5+4) \times 3 = 38962$. وهناك "حيلة" العدد المثير والتي يمكن أن يكون مثلاً كما جاء في

الواقع يستطيع الطلبة ملاحظة كيفية احتساب علامات الرهان التي تمنح للمشاركين فيه، وتطبيقات أخرى مباشرة على حساب الاحتمالات. وتوجد بين الفينة والأخرى عروض خاصة تقدم لتحفيز الطلبة نحو التعمق في دراسة الرياضيات، ويمكن استخدام هذه العروض في سفرة صفية-رياضية مشوقة. إن المعلم الذي يمتلك ذهنًا ثاقبًا سوف يكتشف أفكارًا أخرى لرحلات رياضية - صفية ذات فائدة ملموسة لطلابه.

إن القرب من منطقة كبيرة بالعاصمة أو منطقة تمتلك صناعة تركزت في كثير من جوانبها التطبيقية إلى الرياضيات هو بلا شك أمر ضروري لرحلة صفية-رياضية ناجحة. وعلى سبيل المثال، إذا كانت هناك أعمال تخطيط أحد الطرق، يستطيع الصف الاستفادة من مراقبة المهندسين والمساحين الذين يمكنهم على إعداد الخرائط والمخططات. وحتى طائرة الهليكوبتر التي يستخدمها رجال البوليس لمراقبة سرعة السيارات والمركبات فإنها يمكن أن توفر موردًا رياضيًا يؤثر انتباه الطلبة واهتمامهم. وفي بعض المواطن تلعب مبادرة المعلم وأبداعاته دورًا فاعلاً تزيد أهميته عن بقية الجوانب التي يتطلبها هذا النشاط، لذا ليس بمستغرب أن يعد هذا القسم تحديًا إزاء كونك معلم للرياضيات بالفعل!

لا شك إن العنصر الأكثر أهمية في عملية التهيئة لرحلة صفية ناجحة يمكن في التخطيط السليم لجميع مفرداتها، وهو أمر لا يقتصر على الأعداد اللوجستي logistic للرحلة فحسب. وتقع على قائمة الاهتمامات التخطيط للسفر والتجهيزات الأخرى المرتبطة به، يضاف إلى ذلك أهمية التخطيط الدقيق لأسلوب التهيؤ المناسب للصف بشأن متطلبات الرحلة. كما ينبغي على المعلم أن يزود الصف بالخلفية الضرورية للجوانب الرياضية والاختيارية التي تخص الرحلة المخططة قبل موعد المغادرة. وتتضمن الخلفية عرض موضوع ذو صلة بالرحلة لم يباشر الطلبة بدراسته، وعرض موضوع قبل التوقيت الزمني المحدد للحصول إليه، أو اللجوء في بعض الأحيان إلى تزوين موضوع لكي تكون الرحلة مناسبة لحد كبير. ويمكن، في بعض الحالات، دعوة ممثل من الواقع الذي تنوي زيارته إلى المدرسة، لكي يهيئ الطلبة ويحفزهم على رحلة الصف الوشيكة. إن هذا البعد الإضافي سيساعد الطلبة على الاستفادة القصوى من الرحلة بعد أن ترسخت في أذهانهم مفردات كثيرة عن الموقع عبر المناقشات الدائرة مع الممثل الزائر. إن التخطيط لرحلة ما سيكون أمرًا لا غنى عنه إذا تضمن زيارة متحف قريب بهدف التنقيب عن فقرات تمتلك أهمية رياضية. إن هذه

عبر منظومة دائرة تلفزيونية مغلقة (إذا توفرت) خلال المدرسة أو المقاطعة. ويؤمل أن تكون الآراء المروضة في المروض مصدرا لإثارة وتوليد آراء وأفكار أخرى تكون مناسبة للمشاهدين الذين حضروا العرض.

برنامج الضيوف المتحدثين

Guest Speakers Program

تتوفر مكاتب المتحدثين بالرياضيات للمدارس الثانوية في مواقع كثيرة على امتداد مساحة البلاد. ترحي هذه المكاتب، بصورة عامة، بواسطة المؤسسات الجامعية، أو المنظمات المتخصصة والمهنية. بصورة عامة، تتوفر في المدارس المحلية قائمة بأسماء المتحدثين، وعناوينهم، والمواضيع التي ستكون محور حديثهم. ولا تتحمل المدرسة، غالبًا، أية نفقات إزاء الحصول على هذه الخدمة وتوفيرها لطلبتها. إن النشاط المعتاد لنادي الرياضيات، في مثل هذه الحالة، سيتألف من إعداد دعوات لمحدثين محددين، ثم الإعلان عن كل كلمة بوسائل الدعاية والإعلان المتاحة. ويعتمد حجم الحضور على الموضوع الذي تم اختياره، كذلك قد يكون الحضور متجانسًا أو متباينًا. ويفضل أن تترك فرصة اختيار المتحدث للطلبة بدلًا من المعلمين، لأن الطلبة سهلًا، بكل حال من الأحوال، إلى المعلم لإبداء المشورة والرأي بهذا الخصوص. بالمقابل ينبغي على المعلم أن يكون حذرًا بعدم فرض انحياز شخصي تجاه عملية اختيار المتحدث، ويقتصر على إبداء المشورة فحسب. ويمكن للمدرس أن يتصل بمدارس ثانوية أخرى لتحديد هوية المتحدثين الذين لاقوا إقبالًا واسعًا لديهم، والآخرين الذين لم يغلحوا بإحراز إقبال مناسب.

وإذا تم التخطيط بصورة محكمة ومناسبة لهذا النشاط، فإن فوائده الخصبة ستكون دليلًا قاطعًا على جدوى العناية المبدولة في سبيل إنجازه.

رحلات الصف ذات الفائدة الرياضية

Class Trips Of Mathematical Significance

توفر المناطق الكبيرة بالعاصمة أمثلة جذابة ومثيرة لتطبيقات الرياضيات. وينبغي على المعلمين المقيمين في هذه المناطق تعميق الاستفادة الشخصية من هذه الموارد، بين الفينة والأخرى. فعلى سبيل المثال، فإن مختبرًا للهندسة أو البحوث (مثل مختبرات شركة BELL، أو مختبرات شركة IBM) قد تكون موطن اهتمام بالغ لدى الطلبة. وقد يجد البعض الآخر أن زيارة حلبة سباق باريموتويل Parimutuel أمرًا مثيرًا للاهتمام. في ذلك

التعلم. كذلك فإن معرفة كيفية شد اهتمام الطلبة الذين يعدون ذوي قابليات متوسطة يحتل نفس المكانة من الأهمية لدى معلم الأقران. ولضمان نجاح هذا النشاط ينبغي أن تعد، بعناية، طرق ومناهج مستحدثة للتعليم.

عندما يباشر الطلبة المتفوقون عملية تعليم الأقران لغرض إثراء معارف بقية الطلبة، ينبغي أن يعد أنموذج لضمان مشاركة جل طلبة المدرسة. فعلى سبيل المثال، يستطيع مستشار الإدارة تقديم موضوعات لإثرائها إلى المجموعة المنتخبة من الطلبة المتفوقين لأغراض تعليم الأقران، أو قد يقوم بإعداد برنامج زمني لمحدثين من خارج المدرسة يساهمون في عرض موضوعات إثرائية متنوعة لهؤلاء الطلبة. ومتى استكملت هذه الإجراءات وأحس المدرسون الأقران براحة معقولة بالموضوعات الجديدة التي تلقونها، سيتم لم شملهم في اجتماع برعاية عضو إدارة النادي لإنشاء استراتيجية واضحة المعالم لمرض هذا الموضوع لأنواع مختلفة من صفوف المدرسة. وينبغي أن يؤخذ بعين الاعتبار مستوى من سيحضر من المشاهدين والمستمعين، بعناية واهتمام بالغ، عند التحضير لعملية تعليم الأقران. ويمكن تقديم مواد إثرائية متنوعة بمادة الرياضيات لمعلم طلبة المدرسة باستخدام هذا الأنموذج، وعلى نطاق مناسب لمستويات مختلفة من قابليات الطلبة وقدراتهم.

ورغم أن استخدامنا لاصطلاح "تعليم الأقران" يعمل إلى الاستخدام الحرفي لهذه الكلمة، فإن الآراء التي عرضت في هذا المقام يمكن أن تعاني الزهد من التوسع في المعالجة بحيث تصبح مادة "للمعلمون الأقران" موضوعاً يعرض على الطلبة الباقين، سواء في نفس المدرسة أو المدارس الأدنى القريبة منها.

وتحت جميع الظروف، فإن المحتوى وأسلوب المعالجة ومفاهيمها بحاجة إلى أن تخطط بعناية قبل مباشرة أي نوع من أنواع تعليم الأقران. ومتى أنجز تعليم الأقران بصورة صحيحة ومتكاملة سيكون ذو قيمة وأهمية بالغة لكل من الطلبة الذين يمارسون مهمة التعليم وأقرانهم الذين يتلقون الدروس منهم.

الحاسوب The Computer

بعد أن يظهر الطلبة درجة مقبولة من الثقة بالحاسوب وأنبيائه، ينبغي أن يشجعوا بالعمل عليه خلال الأوقات المفتوحة في المدرسة، أو بعد الانتهاء فترة الدروس. وقد يجد الطلبة متعة كبيرة في توسيع الاستكشافات غير المنهجية باتجاه: الأشكال الثنائية أو ثلاثية الأبعاد، ونمذجة وتطبيقات العالم الواقعي، والأعداد العشوائية، وفراكتال ماندلبرو، أو أي موضوع آخر يقع اختيارهم عليه.

الفترات سوف تتخذ مدى يبتدئ بغن الرسم والعمارة وينتهي بالأدوات والآلات التي استخدمت في عصور غابرة. ومهما كان نوع وطبيعة النشاط المتضمن، فإن التخطيط (الذي يشمل زيارة تمهيدية للمعلم إلى موقع الرحلة الصيفية) سيبقى على الدوام خطوة ضرورية في تأسيس نجاح رحلة الصف الرياضية.

برنامج تعليم الأقران

Peer Teaching Program

يمكن إجراء تعليم الأقران لجميع مراحل التعليم الثلاثة والتي تشمل: التعليم المتدرج - On Grade Teaching، والعلاج، والإثراء. وربما يعد هذا الأمر نشاطاً إذا قرر نادي الرياضيات أن يأخذ على عاتقه مباشرة فعالية تمارسها مجموعة من الطلبة مع مشاوير إدارته.

يسهم تعليم الأقران - إلى حد كبير، في تعميق الفائدة على الطالب الذي يمارسه، والطلبة الذين يتلقون الدرس عنه. فالذي يمارس مهمة تعليم مفهوم أو موضوع محدد، يكتسب فهماً أكثر عمقا وشعولا بالموضوع ذاته وسيكون هذا الفهم، في جزء منه. نتيجة الحاجة إلى تنظيم العرض بأسلوب فطن، والذي سيؤدي - بالمقابل - إلى بلورة أفكار المعلم تجاه ذلك الموضوع. ومع أن تحسن القدرة على الفهم ليست بالضرورة السبب الأساس لإنشاء برنامج تعليم الأقران، فإن هذه الظاهرة هي أحد الخصائص التي تغيد من تطبيقه.

وينبغي أن يتوفر وقت كاف للطلبة الذين سيشاركون في تعليم أقرانهم. قبل البدء بأي عملية من عمليات تعليم الأقران. كما من الضروري أن يكون هؤلاء الطلبة على ألفة تامة مع تقانات التعليم الأساسية والموارد المتوفرة لاستخداماتهم. لذا فإن من الطبيعي تركيز الاهتمام على الضموم عند إعداد معلمين أقران. ومع ذلك، فإن جزءاً لا بأس به من الوقت ينبغي أن يكرس لعملية التعليم.

يمكن أن يأخذ تعليم الأقران أكثر من شكل وقالب، فقد يكون عبارة عن دروس خصوصية ذات صفة فردية، وقد تتضمن مجموعات صغيرة من الطلبة، أو قد تكون تكملة للتعليم الصفي النظامي. ومهما كان أسلوب وصيغة المستخدم، فيتوجب أن تسبق أي عملية تعليم أقران بتحضيرات مكثفة وملائمة، حيث تظهر حاجة ملموسة إلى مهارات خاصة لكل نوع من أنواع التعليم. فإذا كان تعليم الأقران مخصصاً لأغراض علاجية، ينبغي أن نجعل معلني الأقران على معرفة كافية ودرابية بالطرق الإجرائية التشخيصية مع تدربهم على أن يكونوا حساسين حيال حاجات الطلبة الذين يعانون من بطة

مناسبات خاصة مثل معارض الرياضيات على لوحة البيانات والبلاغات.

7. هناك فرصة مناسبة لتوظيف لوحة البيانات والبلاغات في تذليل العقبات أمام برنامج تعلم الأقران عبر توفير مناخ مناسب للإعلان، ومد جسور التعاون مع مؤسسة البرنامج.

8. يبحث الطلبة المتميزون في مادة الرياضيات عن الإرشادات الخاصة بهذا الحقل لكي يسبروا على هديه، وتعد لوحة البيانات والبلاغات موطناً مناسباً يخصص عليها موقعا مناسباً لمعرض هذا الموضوع بتفصيل يشفي غليل هؤلاء الطلبة.

9 يمكن أن تستخدم لوحة البيانات والبلاغات في تنسيق أنشطة الحاسوب بالإضافة إلى عرض البرامج الفريدة التي نجح الطلبة المتميزون بإعدادها، مثل فن الفراكتال Fractal Art. إن إعداد العرض بصورة جذابة سيساعد على نشر وتوسيع مدى استخدام الحاسوب وتطبيقاته لدى بقية الطلبة.

10. يمكن إعداد عروض فصلية في ضوء علاقتها بالرياضيات لإغراء الطلبة وجذبهم نحو تحري التطبيقات شير التقليدية للرياضيات (على سبيل المثال، ان عرض فصل الربيع يمكن أن يقيم علاقة بين ترتيب الأضراس Phyllotaxis واعداد فايوناشي Fibonacci).

11. يمكن استخدام لوحة البيانات والإعلانات لإرسال البلاغات بواسطة الكليات والجامعات، والتي تخص برامج رياضية محددة يتم تقديمها خلال فصل الصيف والسنة الأكاديمية.

خلاصة Summary

لقد ناقشنا عدة أنواع من الأنشطة اللامنهجية في رياضيات المدارس الثانوية. وتعد بعض هذه الأنشطة خارج نطاق درس الرياضيات (مثل: النوادي، والفرق، والمباريات)، وبعضها الآخر يكمل تعليم النظامي ويضيف إليه بمصمة جديدة (مثل: مشاريع الرياضيات، والضيوف المتحدثين، والرحلات الدراسية). وقلمنا نجد مدرسة واحدة تقوم بتنهي هذه الأنشطة جميعاً وتقدمها إلى طليقتها، ومع ذلك فإن الإدراك العميق لبعض خيارات الأنشطة اللامنهجية في مادة الرياضيات يبقى أمراً ضرورياً ولا بد منه عند تصميم برنامج لنشاط لا منهجي في الرياضيات يناسب مدرسة بعينها. بالمقابل فإن البرنامج الجيد للنشاط اللامنهجي سوف يمسّر قدماً على طريق تعميق برنامج الرياضيات التقليدي في المدرسة.

لوحة البيانات والبلاغات The Bulletin Board

ينبغي أن تكون هناك لوحة بيانات وبلاغات، واحدة على الأقل في كل مدرسة، مخصصة حصراً لمادة الرياضيات، وتثبت في موقع قريب من قسم الرياضيات أو على مقربة من صف الرياضيات.

ويمكن للوحة البيانات والبلاغات أن تستوعب جميع الأنشطة اللامنهجية التي ذكرت في ثنايا هذا الفصل. ويمكن أن تصبح هذه اللوحة أمراً لا غنى عنه في كل مدرسة ثانوية بوصفها أداة مساعدة في تزويد الطلبة بهذه النشاطات، إضافة إلى كونها مصدر للدعاية وإشاعة المعرفة الرياضية. إن بعض الاستخدامات المقترحة للوحة بيانات وبلاغات الرياضيات هي:

1 يمكن استخدام لوحة البيانات والبلاغات لإثارة الاهتمام في موضوع أو عملية رياضية. كذلك، يمكن استخدامها في تحفيز الطلبة على دراسة المزيد من المفردات الرياضية عبر تزويدهم بمواد كافية حول موضوع، أو مفهوم معين لترسيخ اهتمام الطلبة بصورة كافية بحيث يستطيعوا مباشرة نشاط بحثي فردي. إن الشكل الأفضل لهذا النشاط سيكون بصورة مسألة مفتوحة أو ذات طابع يعمل إلى التحدي.

2 يمكن عرض نتائج لقاءات فريق الرياضيات (متضمنة الأسئلة وأجوبتها النموذجية) على لوحة البيانات والبلاغات.

3 تعد لوحة البيانات والبلاغات موطناً مناسباً للإعلان عن مباريات الرياضيات (المفتوحة أمام مساهمات جميع الطلبة).

4 يمكن أن تصبح لوحة البيانات والبلاغات بؤرة للمباريات الأسبوعية المستمرة بالرياضيات داخل المدرسة، مع طرح "مسألة الأسبوع Problem of The Week" التي تلصق أسبوعياً. ويصار في بداية كل أسبوع إلى عرض الحل النموذجي للمسألة مع قائمة بأسماء الطلبة الذين نجحوا في حلها. إن الدعاية المناسبة لهذه اللوحة بواسطة معلم متحمس لهذا النشاط الفريد، سيجعل منها مورداً مناسباً لإرساء مناخ رياضي صحي.

5 يمكن أن تعلن جميع أنشطة نادي الرياضيات، والتي تتضمن مناسبات خاصة لغير الأعضاء (على سبيل المثال، الضيف المتحدث) على لوحة البيانات والبلاغات لكي توفر فرصة مفتوحة أمام الطلبة للاطلاع عليها.

6. يمكن عرض مشاريع الرياضيات المختلفة، والإعلان عن

تمارين Exercises

من رفض أي مادة مقدمة إلى المجلة خشية جرح مشاعر المؤلف وإغاضته بحيث لا يماود تقديم مقال في المستقبل للمجلة.

ج- انخفاض مبيعات المجلة بشكل ملموس وعدم قدرتك على توفير النفقات المطلوبة لطباعتها وإخراجها.

د- نشوب خلافات بين أعضاء هيئة التحرير من الطلبة، كما أن رئيس التحرير قد استقال من منصبه قبل أسبوعين من صدورها.

6. اعد خطة للجمعية العمومية للرياضيات تستغرق خمس وأربعين دقيقة والتي يمكن هدفها الأساسي في إنتاج معظم المشاهدين والمستمعين من الطلبة وجذب أكبر عدد ممكن من حضورهم لاختيار مسابقات الرياضيات في المساق الدراسي القادم.

7. بوصفك مستشارا لنادي الرياضيات، قمت بتهيئة متطلبات دعوة متحدث لإلقاء كلمة في لقاء النادي. كيف ستعامل مع كل من الحالات الآتية:

أ- كانت محاضرة المتحدث خارج نطاق استيعاب الطلبة الحاضرين بحيث بدأ الطلبة بمغادرة القاعة قبل انتهاء كلمة المحاضر.

ب- كان المتحدث ثقيل الظل، مثيرا للضجر، ويتكلم بصوت عال للطلبة، ويناقش أمور تافهة لحد كبير، بحيث بدأ يخسر مستمعيه.

ج- هبط عرض المتحدث إلى مستوى تقديم عروض للطلبة من أجل التقديم إلى الكلية التي يعمل المتحدث عضوا في إدارتها.

د- لم يبدو المتحدث بالمستوى المحدد له.

8. ناقش الفصل أساليب التخطيط للرحلة الدراسية، وتهيئة الطلبة لتلقي الخبرات التي سيصادفونها خلال الرحلة. ما هي طبيعة أنشطة-للتلميعة المناسبة والتي يجب على الطلبة مباشرتها بعد عودتهم من الرحلة لكي تكون مودنا تلمهيا متكاملًا.

9. افترض وقوع الاختيار عليك لتوجيه وإرشاد برنامج تعليم خصوصي للأقران الذي يديره قسم الرياضيات. وإن جل المعلمين الخصوصيين هم أعضاء الجمعية الفخرية للدرسة، وفي صفوف متقدمة من القسم. إن الطلبة الذين يساهمون في إعطاء الدروس الخصوصية غالبا ما يشكون من الطلبة

1 افترض بأنك قد تطوعت للعمل بصفة مستشار إدارة لنادي الرياضيات بمدرستك، والذي يعد نشاطا للقسم في بعض الأوقات. ولم يكن الشخص الذي سيقك بالعمل في هذا المنصب، والذي تقاعد لحينه، نشيطا ومفعما بالحيوية، وقد تراجع بصورة كبيرة جدا خلال توليه منصب عضوية النادي، بحيث أصبحت الأنشطة التي ينهض بأعبائها النادي قليلة ومتباعدة. بين الخطوات التي ستتخذها ليهب الروح ثانية بالنادي. وزمادة عدد أعضائه، وتطوير برنامج جذاب لأنشطته.

2 افترض بأنك تنهض بأعباء إدارة فريق الرياضيات بمدرستك، والذي داوم على التدريب وفق سياقات تقليدية لغاية هذا التاريخ، وغالبا ما تمارس خلال وقتك الفائض العمل على بعض المسائل التطبيقية قبل عقد الاجتماع أو اللقاء. وقد نصحك مستشارك العلمي بأن المدرسة ستكون في نهاية المساق الدراسي قادرة على توفير مستلزمات إدراج فريق الرياضيات كصف منهجي ضمن برنامجك. اعد إلى صياغة خطط لتحسين برنامج تدريب لأعضاء الفريق، وما هي الموضوعات التي تخطط بتعليمها خلال الفترة المخصصة للدرس، على أن تورد تبريرات معقولة لقراراتك.

3 في أي صف من صفوف الرياضيات تحس بضرورة تحديد ورقة بحث المساق الدراسي أو المشروع كجزء لا يتجزأ من متطلبات استكمالها؟ وكيف ستستجيب لطلاب يشعر بأن هذا "العمل النظامي" هو مضية للوقت؟

4. مانا ستعمل لكي تشجع الطلبة على المشاركة بأوراق ومقالات في معرض الرياضيات إذا لم يكونوا رافضين فكرة إعداد البحث وكتابة المقال ولكنهم يخشون تقديم عرض شفهي لاكتشافاتهم أما أنظار مجموعة من أقرانهم وفئة المحكمين؟.

5 افترض بأنك مستشار إدارة مجلة رياضيات المدرسة. حاول معالجة المسائل الآتية مع اقتراح حلول أولية لكل منها، أ- هناك عدد محدود من الطلبة القادرين على بذل الجهد المطلوب لكتابة مقالات رصينة تستحق أن تدرج ضمن مقالات المجلة.

ب- إن عددا من المقالات قد تقدمت إلى المجلة لكي تدرج في ثنائها، ويخشى الطلبة العاملين في هيئة التحرير

على أكوام غير مرتبة وتفتقر إلى التنظيم من: وثائق الصف الرسمية، وإشعارات حول الأنشطة القادمة، ومجموع نقاط الفريق، وتوقيعات الحاسوب، و "مسألة الأسبوع"، وقرارات أخرى متنوعة.

ما هي الخطوات التي ستأخذها لإعادة النظام والترتيب لهذه القوضى، وكيف ستعمل على تطوير لوحة البيانات والبيانات التي سيفخر بها قسم الرياضيات؟

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \quad 2$$

$$(a + b + c) > (m_a + m_b + m_c) > \frac{3}{4}(a + b + c) \quad 3$$

4. إن المستقيمات المتوسطة في المثلث تتلاقى في نقطة واحدة تقسم المستقيم المتوسط إلى ثلاثة أقسام متساوية.

5. يقسم المستقيم المتوسط المثلث إلى مثلثين متساويين بالمساحة.

6. في مثلث قائم الزاوية، فإن المستقيم المتوسط للوتر (أ) يقسم المثلث إلى مثلثين متساويي الساقين، (ب) يساوي نصف طول الوتر.

علاقات ارتفاع المثلث:

$$1. ah_a = bh_b = ch_c = 2\alpha \quad (\text{حيث } \alpha \text{ تمثل المساحة}).$$

$$2. a : \frac{1}{h_a} = b : \frac{1}{h_b} = c : \frac{1}{h_c} = 2\alpha$$

$$\text{أو } h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = bc : ac : ab$$

$$3. h_c = \frac{ab}{2R} \quad (\text{حيث } R \text{ محيط نصف القطر})$$

(Circumradius)

مساحة مثلث:

$$1. \alpha = 1/2 ah_a$$

$$2. \alpha = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$3. \alpha = \frac{abc}{4R} \quad (\text{حيث } R \text{ محيط نصف القطر})$$

$$4. \alpha = rs \quad (\text{حيث } r \text{ نصف القطر الداخلي})$$

$$5. \alpha = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{حيث } s \text{ مثلث شبه محيط الشكل (Semi perimeter) (صيغة هيرون Heron)})$$

$$6. \alpha = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin (A+C)}$$

$$7. \alpha = \frac{S^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{k^2 \sqrt{3}}{3} \quad \text{بالنسبة للمثلث متساوي الأضلاع}$$

الذين يتعلمون على أيديهم، نظرا لكونهم: متغطرين، ونافدي الصبر، ويعانون من بطة ملحوظ في التعلم، إضافة إلى كونهم يشيرون الإرباك في بعض الأحيان. إن تعليم الأقران الخصوصي هو نشاط إلزامي لأعضاء جمعية الشرف لكي يديموا بقاعهم فيها. كيف ستعالج هذا الموقف؟

10. طلب منك المشرف عليك المحافظة على لوحة الإعلانات والبلاغات بمظهر جذاب وأنيق بوصفها مهمة محددة ومهنية تناط بك. وقد وجدت بأنها تعاني من احتوائها

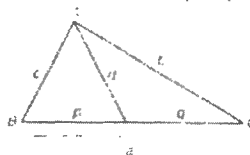
ملاحظات لفريق الرياضيات

Notes For Mathematics Team

خصائص المثلث Triangle Properties

نظرية ستيوارت Stewarts Theorem

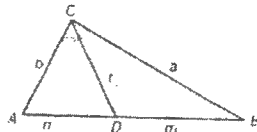
$$pb^2 + qc^2 = a(d^2 + pq)$$



علاقات منصف الزاوية:

$$a : b = m : n \quad 1$$

$$t^2 cab - mn = t_c^2 \quad 2$$



$$3. t_c = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}$$

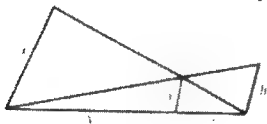
4. إن نقطة تقاطع منصفات الزوايا هي مركز الدائرة المرسومة داخل للمثلث.

علاقات المستقيم المتوسط بالمثلث:

$$1. m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

3. في الشكل (3)، المستقيمات a, b, c متوازية، وعليه:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$



(شكل 3)

خصائص المضلع Properties of Polygons

1. مجموع قياسات الزوايا الداخلية $= 180^\circ (n-2)$ ، حيث n = عدد الأضلاع.

2. مجموع قياسات الزوايا الخارجية $= 360^\circ$.

3. في المضلع متساوي الزوايا:

أ. قياس كل زاوية من زواياه الداخلية $= 180^\circ$ - (قياس الزاوية الخارجية)

ب. قياس كل زاوية من زواياه الداخلية $= \frac{(n-2)180^\circ}{n}$

ج. قياس كل زاوية من زواياه الخارجية $= \frac{360^\circ}{n}$

الضلعيات المنتظمة Regular Polygons

$$1. \text{ المثلث: } \alpha = \frac{S^2\sqrt{3}}{4} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = 3r^2\sqrt{3}$$

2. الشكل الخماسي Pentagon:

$$S = \sqrt{2r\sqrt{5} - 2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

3. الشكل السداسي Hexagon:

$$S = R, \alpha = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3} = 2r^2\sqrt{3}$$

4. الشكل الثماني Octagon:

$$S = 2r(\sqrt{2} - 1) = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

5. الشكل عشري الزوايا Decagon:

$$S = \frac{2}{5}r\sqrt{25 - 10\sqrt{5}} = \frac{1}{2}R(\sqrt{5} - 1)$$

6. الشكل ذي الاثنى عشر زاوية Dodecagon: $\alpha = 3R^2$

$$7. \text{ General: } \alpha = \frac{1}{2}ap = \frac{1}{2}rp$$

(حيث p = apothem = a المحيط)

(حيث تمثل S الضلع، h الارتفاع).

8. إن نسبة مساحتي المثلثين اللذين يمتلكان زاوية بنفس القياس تساوي نسبة حاصل ضرب أطوال زوج الأضلاع التي تحد الزاويتين المتطابقتين.

الدوائر الماسة والمحيطة بمثلث:

$$1. r = \frac{a}{s} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad \text{حيث } r \text{ تمثل نصف القطر الداخلي.}$$

$$2. R = abc / 4\Delta \quad \text{(حيث } R \text{ تمثل محيط نصف القطر)}$$

$$3. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$4. r_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} \quad \text{نصف قطر الدائرة الماسة}$$

لإيجاد قياس زاوية في مثلث:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{(قانون جيبوس التمام)}$$

ثلاثيات فيثاغورث:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

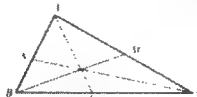
حيث.

$$a = u^2 - v^2; b = 2uv; c = u^2 + v^2 \text{ and } u > v$$

لأعداد الصحيحة u, v

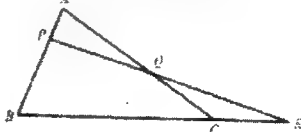
نظرية الخط المستعرض Transversal Theorem

1. في الشكل (1)، \overline{CN} ، \overline{BM} ، \overline{AL} مستقيمات تتلاقى في نقطة واحدة. وعليه $AN.BL.CM = AM.BN.CL$ (نظرية شيفا).

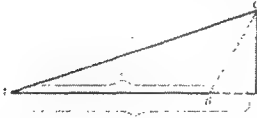
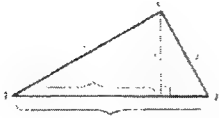


(شكل 1)

2. في الشكل (2)، تقع النقاط R, Q, P على خط مستقيم، وعليه فإن: $AP.BR.CQ = AQ.BP.CR$ (نظرية مينيلوس).



(شكل 2)



مساحات الأشكال الرباعية Quadrilaterals

$$A = bh \quad \text{المستطيل Rectangle 1.}$$

$$A = S^2 = \frac{1}{2}d^2 = 2R^2 = 4r^2 \quad \text{المربع Square 2.}$$

$$A = bh = ab \sin c \quad \text{متوازي الأضلاع Parallelogram 3.}$$

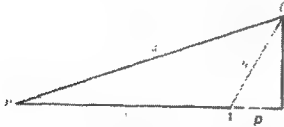
$$A = bh = \frac{1}{2}d_1 d_2 = ab \sin c \quad \text{المعين Rhombus 4.}$$

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) \quad \text{المعين المذروح Trapezoid 5.}$$

نظريات متنوعة حول المثلث والشكل الرباعي

9. في أي مثلث منفرج الزاوية، فإن مربع طول الضلع المقابل للزاوية المنفرجة يساوي مجموع مربعات أطوال الضلعين الآخرين مضافا إليه ضعف حاصل ضرب طول أحد هذين الضلعين وطول مسقط الضلع الآخر عليه.

$$(a^2 = b^2 + c^2 + 2cp : \text{بالنسبة للمثلث منفرج الزاوية } ABC)$$



نظريات متنوعة عن المحيط والمساحة

Miscellaneous Theorems on Perimeter and Area

1. في جميع المثلثات التي تمتلك نفس القاعدة ومساحات متساوية، فإن المثلث متساوي الساقين يمتلك المحيط الأقل.
2. في جميع المثلثات التي تمتلك نفس القاعدة وتتساوى محيطاتها، فإن المثلث الذي يتطابق ضلعاه الآخرين يمتلك المساحة الأكبر.
3. في كل متعددة الأضلاع المنشأة بنسب الأضلاع المعطاة وينفس الترتيب المعطى والتي يمكن رسمها داخل دائرة تمتلك المساحة الأكبر.
4. في متعدد الأضلاع اللذان يتساوى محيطيهما، فإن الشكل الذي يمتلك العدد الأكبر من الأضلاع يمتلك المساحة الأكبر.
5. إذا أنشئت متعددات أضلاع على الأضلاع الثلاثة لمثلث

1. مجموع أطوال الأعمدة القائمة على ساقى المثلث متساوي الساقين، من أي نقطة على قاعدته تساوي ارتفاع أحد الساقين.

2. في المثلث متساوي الأضلاع، يكون مجموع أطوال الأعمدة القائمة من أية نقطة على الأضلاع الثلاثة مساويا لطول ارتفاع.

3. في الشكل الرباعي المرسوم داخل لدائرة، فإن مجموع الأضلاع المتقابلة متساويا.

4. في الشكل الرباعي المرسوم داخل الدائرة، فإن مجموع حاصل ضرب أطوال الأضلاع المتقابلة مساويا لحاصل ضرب أطوال قطرية (نظرية بطليموس).

5. إن مساحة الشكل رباعي الأضلاع - الدائري (يعني،

الشكل الرباعي المرسوم داخل للدائرة) مساويا

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad \text{(صيغة براهماجوبتا)}$$

(Brahmagupta's formula).

6. في أي متوازي أضلاع، فإن مجموع مربعات أطوال قطريه يكون مساويا لمجموع مربعات جميع أطوال أضلاعه.

7. في أي مثلث الذي طول أضلاعه 13، 14، 15، يقسم h_1 الضلع 14 إلى قطعتين 5، 9 و h_2 يساوي 12.

8. في أي مثلث، فإن مربع طول الضلع المقابل للزاوية الحادة يساوي مجموع مربعات أطوال الضلعين الآخرين مطروحا منه ضعف حاصل ضرب طول أحد هذين الضلعين، وطول المسقط الناشئ عن الضلع الآخر عليه.

$$(a^2 = b^2 + c^2 - 2pc : \text{بالنسبة للمثلث } ABC)$$

التحليل العاملي Factoring1. بالنسبة لقيم e الفردية:

$$x^e + y^e = (x+y)(x^{e-1} - x^{e-2}y + x^{e-3}y^2 - \dots + y^{e-1})$$

2. لجميع قيم e :

$$x^e - y^e = (x-y)(x^{e-1} + x^{e-2}y + x^{e-3}y^2 + \dots + y^{e-1})$$

3. بالنسبة لقيم e الزوجية:

$$x^e + y^e = (x^{e/2} + y^{e/2})(x^{e/2} - y^{e/2})$$

نظرية ذات الحدين Binomial Theorem

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2$$

$$+ \dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

اللوغاريتمات Logarithms

$$\log_a b = x \text{ تعني } a^x = b \quad 1$$

$$(\log_a b)(\log_a c) = \log_a c \quad 2$$

المتباينات Inequalities

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad 1.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad 2.$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad 3.$$

المتوسطات Means

$$1. AM \geq GM \geq HM \quad \frac{a+b}{2} = (AM) \text{ المتوسط الحسابي}$$

$$2. (AM)(HM) = (GM)^2 \quad \sqrt{ab} = (GM) \text{ المتوسط الهندسي}$$

$$\frac{2bc}{a+b} = (HM) \text{ المتوسط التوافقي}$$

قائم الزاوية، فإن مجموع مساحات الأشكال متعددة الأضلاع القائمة على الساقين تساوي مساحة متعدد الأضلاع المقام على الوتر (هذا توسيع في نظرية فيثاغورث).

نظرية بابوس Pappus's Theorem

إن الحجم الناتج عن حركة مقطع مستو خلال الفراغ يساوي حاصل ضرب مساحة مقطع المستوي وطول مسار مركز ثقل المقطع المستوي.

بعض حقائق نظرية العدد**Some Number Theory Facts**

- قابلية القسمة على 2: آخر رقم من العدد يكون زوجياً.
- قابلية القسمة على 3: مجموع الأرقام يقبل القسمة على 3.
- قابلية القسمة على 4: عندما يعمل آخر رقمين كعدد مستقل يقبلان القسمة على 4 (مثال: 7812).
- قابلية القسمة على 5: آخر رقم يكون 0 أو 5.
- قابلية القسمة على 6: القواعد الخاصة بقابلية القسمة على 2 و 3.
- قابلية القسمة على 8: عندما تعمل الأرقام الثلاثة الأخيرة كعدد مستقل يقبلون القسمة على 8 (مثال: 57256).
- قابلية القسمة على 9: مجموع الأرقام يقبل القسمة على 9.
- قابلية القسمة على 10: آخر رقم يساوي صفراً.
- قابلية القسمة على 11: الفرق بين مجاميع الأرقام المتناوبة يقبل القسمة على 11.
- قابلية القسمة على 12: قواعد قابلية على 3 و 4.
- نظرية فيرمات: مضاعف $N^{p-1} = p$ ، حيث أن p هو عدد أولي، N عدد أولي بالنسبة إلى p (مثال: $3^{2-1} - 1$ هو مضاعف 7).

مراجع مقترحة Suggested References

- Altshiller-Court, Nathan A. College Geometry. New York: Barnes & Noble, 1952.
- Barnett, I.A. Elements of Number Theory. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1972.
- Berggren, L., J. Borwien, and P. Borwien. Pi: A Source Book New York: Springer, 1997.
- Bruckheimer, Maxim, and Rina Hirshkowitz. "Mathematics Projects in Junior High School."

- Mathematics Teacher 70 (1977): 573.
- Chrystal, G. Textbook of Algebra. 2 Vols. New York: Chelsea, 1964.
- Courant, Richard, and Herbert Robbins. What Is Mathematics? New York: Oxford University Press, 1941.
- Coxeter, H.S.M., and S.L. Greitzer. Geometry Revisited. New York: Random House, 1967.

- Davis, David R. *Modern College Geometry*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1949.
- Dudley, Underwood, A Budget of Trisections. New York: Springer, 1987.
- Elgarten, Gerald H. "A Mathematics Intramurals Contest." *Mathematics Teacher* 69 (1976): 477.
- Farmer, David W., and Theodore B. Sanford. *Knots and Surface: A Guide to Discovering Mathematics*. Providence, RI: American Mathematics Society, 1996.
- Gorini, Catherine A., Ed. *Geometry at Work: A Collection of Papers Showing Application of Geometry*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.
- Hall, H.S., and S.R. Kinght. *Higher Algebra*. London: Macmillan, 1960.
- Holmes, Joseph E. "Enrichment or Acceleration?" *Mathematics Teacher* 63 (1970): 471.
- House, Peggy A. *Interaction of Science and Mathematics*. Columbus, OH: ERIC Clearing House for Science, Mathematics, and Environmental Education, 1980.
- Ippolito, Dennis. "The mathematics of The Spirograph." *Mathematics Teacher* 92 (1999): 354-357.
- James, Robert C., and Glenn James, Eds. *Mathematics Dictionary*, 4th ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1976.
- Johnson, Roger A. *Modern Geometry*. Boston: Houghton Mifflin, 1929.
- Jones, Mary H. "Mathematics: A New Junior High School Mathematics Composition." *Mathematics Teacher* 76 (1982): 482.
- Karush, William. *The Crescent Dictionary of Mathematics*. New York: Macmillan, 1962.
- Leonard, William A. *No Upper Limit; The Challenge of the Teacher of Secondary Mathematics*. Fresno, CA: Creative Teaching Assoc., 1977.
- Lichtenberg, Betty K. "Some Excellent Sources of Material for Mathematics Clubs." *Mathematics Teacher* 74 (1981): 284.
- Martin, George E. *Geometric Construction*. New York: Springer, 1998.
- Morgan, F., E.R. Melnick, and R.Nicholson. "The Soap-Bubble-Geometry Contest." *Mathematics Teacher* 90 (1997): 746-750.
- Morgan, Frank. *The Math Chat Book*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.
- Newman, James R. *The World of Mathematics*. 4 vols. New York: Simon & Schuster, 1956.
- Olds, C.D. *Continued Fractions*. New York: Random House, 1963.
- Posamentier, Alfred S. *Advanced Euclidean Geometry: Excursion For Secondary Students and Teachers*. Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.
- Posamentier, Alfred S. *Making Algebra Come Alive*. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.
- Posamentier, Alfred S. *Making Geometry Come Alive*. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.
- Posamentier, Alfred S. *Making Pre-algebra Come Alive*. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.
- Sadovskii, L.E. and A.L. Sadovskii. Translated by S.Makar-Limanov. *Mathematics and Sports*. Providence RI: American Mathematical Society, 1996.
- Schaaf, William L., Ed. *A Bibliography of Recreational Mathematics*. 4vols. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1978.
- Smith, David E., Ed. *Source Book in Mathematics*. New York: Mc Graw-Hill, 1929.
- Wright, Frank. "Motivating Students with Projective and Teaching Aids." *Mathematics Teacher* 58 (1965): 47.

مصادر لأنشطة لا منهجية

Resources For Extracurricular Activities

تاريخ الرياضيات History of Mathematics

- Ball, W.W. Rouse. *A Short Account of the History of Mathematics*. New York: Dover, 1960.
- Bell, E.T. *Men of Mathematics*. New York: Simon & Schuster, 1937.
- Bell, E.T. *Mathematics, Queen and Servant of Science*. Washington, DC: Mathematics Association of American 1979.

- Boyer, Carl B.A History of Mathematics. New York: Wiley, 1968.
- Bunt, Lucas N.H., Philip S. Jones, and Jak D. Bredient. The History Roots of Elementary Mathematics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1976.
- Cajori, Florian. A History of Mathematics Notations. 2 vols LaSalle, IL: Open Curt, 1928.
- Campbell, Douglas M., and John C. Higgins, Eds. Mathematics: People, problem, Results. Belmont, CA: Wadsworth, 1984.
- Eves, Howard. An Introduction to the History of Mathematics, 4th ed. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1976.
- Gray, Shirley B., and C. Edward Sandifer. "The Sumario Compendioso: The New World's First Mathematics Book." Mathematics Teacher 94 (2001): 98-103.
- Hamburger, Peter, and Raymond E. Pippert. "Venn Said It Couldn't Be Done." Mathematics Magazine 73 (2000) 105-110.
- Heath, Thomas L. Greek Mathematics. New York: Dover, 1963.
- Kaplan, Robert. The Nothing That Is: A Natural History of Zero. New York: Oxford University Press, 1999.
- Kelly, Loretta, "A Mathematical History Tour." Mathematics Teacher 93 (2000/) 14-17.
- Mathematics Teacher 98 (November 2000) entire issue. Norwood, Rick. "A Star Guide Us." Mathematics Teacher 92 (1999): 100-101.
- Posamentier, Alfred S., and Noam Gordon. "An Astounding Revelation on the History of π ." Mathematics Teacher 77 (1984): 52.
- Resnikoff, H. L., and R. O. Wells, Jr. Mathematics in Civilization. New York: Dover, 1984.
- Smith, David E. A Source Book in Mathematics. New York: McGraw-Hill, 1929.
- Smith, David E. History of Mathematics. 2 vols. New York: Dover, 1953.
- Van der Waerden, B. L. Science Awakening. New York: Wiley, 1963.
- Mathematical Recreation** رياضيات استجمامات
Ball, W. W. Rouse, and H. S. M. Coxeter. Mathematical Recreations and Essays. New York: Macmillan, 1960.
- Barbeau, Edward J. Mathematical Fallacies, Flaws, and Flimflam. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.
- Bay, J. M., R. E. Reys, K. Simms, and P. M. Taylor. "Bingo Games: Turning Student Intuitions into Investigations in Probability and Number Sense." Mathematics Teacher 93 (2000): 200-206.
- Beasley, John D. The Mathematics of Games. New York: Oxford University Press, 1989.
- Benson, William, and Oswald Jacoby. New Recreations with Magic Squares. New York: Dover, 1976.
- Caldwell, J. H. Topics in Recreational Mathematics. London: Cambridge University Press, 1966.
- Cipra, Barry. Mistakes ... and How to Find Them Before the Teacher Does. San Diego, CA: Academic Press, 1989.
- Cundy, H. Martyn, and A. P. Rollett. Mathematical Models. New York: Oxford University Press, 1961.
- Gardner, Martin. New Mathematical Diversions. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1995.
- Honsberger, Ross. Mathematical Morsels. Washington, DC: Mathematics Association of America, 1978.
- Kahan, Steven. Take a Look at a Good Book: The Third Collection of Additive Alphametics for the Connoisseur. Amityville, NY: Baywood Publ. Co., 1996.
- Kraitchik, Maurice. Mathematical Recreations. New York: Dover, 1942.
- Madachy, Joseph. Mathematics on Vacation. New York: Charles Scribner's Sons, 1966.
- Nelsen, Roger B. Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.
- Northrop, Eugene. Riddles in Mathematics. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1944.

- Ogilvy, C. Stanley. *Through the Mathscope*. New York: Oxford University Press, 1956.
- Posamentier, Alfred S. *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students*. Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.
- Posamentier, Alfred S. *Advanced Geometric Constructions*. White Plains, NY: Dale Seymour Publications, 1988.
- Posamentier, Alfred S. *Making Algebra Come Alive*. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.
- Posamentier, Alfred S. *Making Geometry Come Alive*. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.
- Posamentier, Alfred S. *Making Pre-Algebra Come Alive*. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.
- Schuh, Fred. *The Master Book of Mathematical Recreations*. New York: Dover, 1968.
- Stevenson, Frederick W. *Exploratory Problems in Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1992.
- Mathematics Clubs أندية الرياضيات**
- Carnahan, Walter H., Ed. *Mathematics Clubs in High Schools*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1958.
- Gtuver, Howell L. *School Mathematics Contests: A Report*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1968.
- Hess, Adrien L. *Mathematics Projects Handbook*. Eashington, DC: National Council of Theachers of Mathematics, 1977.
- Morgan, F., E. R. Melnick, and R. Nicholson. "The Soap-Bubble-Geometry Contest." *Mathematics Teacher* 90 (1997): 746-750.
- Mu Alpha Theta. *Handbook for Sponsors*. Norman, OK: University of Oklahoma, 1970.
- Ransom, William R. *Thirty Projects for Mathematical Clubs and Exhibitions*. Protland, ME: J. Weston Walch, Publisher, 1961.
- Teppo, Anne R., and Ted Hodgson. "Dinosaurs, Dinosaur Eggs, and Probability." *Mathematics Teacher* 94 (2001): 86-92.
- حل المسائل Problem Solving**
- Andreescu, Titu, and Zuming Feng. *Mathematical Olympiads 1998-1999*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.
- Artino, R. A., A. M. Gaglione, and Shell. *The Contest Problem Book IV*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1982.
- Berzenyi, G., and S. B. Maurer. *The Contest Problem Book V*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1997.
- Conference Board of Mathematical Sciences. *The Role of Axiomatics and Problem Solving in Mathematics*. Boston: Ginn, 1966.
- Gardiner, Tony. *Mathematical Challenge*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1996.
- Gardiner, Tony. *More Mathematical Challenges*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1997.
- Hayes, John R. *The Complete Problem Solver*, 2d ed. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1989.
- Holton, Derek. *Let's Solve Some Math Problems*. Waterloo, ON: Waterloo Mathematics Foundation, University of Waterloo, 1993.
- Honsberger, Ross. *From Erdos to Kiev, Problems of Olympiad Caliber*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1996.
- Hudgins, Bryce B. *Problem Solving in the Classroom*. New York: Macmillan, 1966.
- Krantz, Steven G. *Techniques of Problem Solving*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997.
- Krulik, Stephen, and Jesse A. Rudnick. *Problem Solving, A Handbook for Teachers*. Boston: Allyn and Bacon, 1980.
- Polya, George. *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.
- Polya, George. *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2 vols. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1954.
- Polya, George. *Mathematical Discovery*. 2 vols. New York: John Wiley, 1962.
- Posamentier, Alfred S. *Students! Get Ready for the Mathematics for SAT I: Problem-Solving Strategies and Practical Tests*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1996.
- Posamentier, Alfred S., and Stephen Krulik. *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the*

Mathematics Teacher. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1998.

Posamentier, Alfred S., and Stephen Krulik. Teachers! Prepare Your Students for the Mathematics for SAT I: Methods and Problem-Solving Strategies. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1996.

Posamentier, Alfred S., and Wolfgang Schulz. The Art of Problem Solving: A Resource for the Mathematics Teacher. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1996.

Schneider, Leo J. The Contest Problem Book VI. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

Whimbey, Arthur, and Jack Lochhead. Problem Solving and Comprehension, A Short Course in Analytical Reasoning. 2d ed. Philadelphia: Franklin Institute Press, 1980.

Wickelgren, Wayne A. How to Solve Problems. San Francisco: W. H. Freeman, 1974.

مصادر لمشاكل فريق الرياضيات

Sources for Mathematics Team Problems

Aref, M. N., and William Wernick. Problems and Solutions in Euclidean Geometry. New York: Dover, 1968.

Barbeau, E., M. Klamkin, and W. Moser. 1001 Problems in High School Mathematics. Montreal, PQ: Canadian Mathematics Congress, 1978.

Barbeau, E., M. Klamkin, and W. Moser. Five Hundred Mathematical Challenges. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1995.

Barry, Donald T., and J. Richard Lux. The Philips Academy Prize Examinations in Mathematics. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1984.

Brousseau, Brother Alfred, Ed. Mathematics Contest Problems. Palo Alto, CA: Creative Publications, 1972.

Bryant, Steven J., George E. Graham, and Kenneth G. Wiley. Nonroutine Problems in Algebra, Geometry, and Trigonometry. New York: McGraw-Hill, 1965.

Butts, Thomas. Problem Solving in Mathematics. Glenview, IL: Scott, Foresman, 1973.

Charosh, Mannis, Ed. Mathematical Challenges. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1965.

Comprehensive School Mathematics Program. E. M. Problem Book. 2 vols. St. Louis: CEMREL, 1975.

Dowlen, Mary, Sandra Powers, and Hope Florence. College of Charleston Mathematics Contest Book. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1987.

Dunn, Angela, Ed. Mathematical Bafflers. New York: McGraw-Hill, 1964.

Dunn, Angela, Ed. Second Book of Mathematical Bafflers. New York: Dover, 1983.

Edwards, Josephine D., Declan J. King, and Peter J. O'Halloran. All the Best From the Australian Mathematics Competition. Canberra, Australia: The Australian Mathematics Competition, 1986.

Engel, Arthur. Problem-Solving Strategies. New York: Springer, 1998.

Fisher, Lyle, and Bill Kennedy. Bother Alfred Brousseau Problem-Solving and Mathematics Competition. Introductory Division. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1984.

Fisher, Lyle, and William Medigovich. Brother Alfred Brousseau Problem-Solving and Mathematics.

Competition. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1984.

Gardiner, A. The Mathematical Olympiad Handbook: An Introduction to Problem Solving. New York: Oxford University Press, 1997.

Greitzer, Samuel L. International Mathematical Olympiads. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1978.

Hill, Thomas J., Ed. Mathematical Challenges II-Plus Six. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1974.

Honsberger, Ross. In Polya's Footsteps; Miscellaneous Problems and Essays. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1997.

Polya, George, and Jeremy Kilpatrick. The Stanford Mathematics Book. New York:

- Teachers College Press, 1974.
- Posamentier, Alfred S., and Charles T. Salkind. Challenging Problems in Algebra. New York: Dover, 1970, 1988, 1996.
- Posamentier, Alfred S., and Charles T. Salkind. Challenging Problems in Geometry. New York: Dover, 1970, 1988, 1996.
- Rapaport, Elvira, trans. Hungarian Problem Book. 2 vols. New York: Random House, 1963.
- Salkind, Charles T., Ed. The Contest Problem Book. New York: Random House, 1961.
- Salkind, Charles T., Ed. The MAA Problem Book II. New York: Random House, 1966.
- Salking, Charles T., and James M. Earl, Eds. The MAA Problem Book III. New York: Random House, 1973.
- Saul, Mark E., G. W. Kessler, Sheila Krilov, and Lawrence Zimmerman. The New York City Contest Problem Book. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1986.
- Shklarsky, D. O., N. N. Chentzov, and I. M. Yaglom. The U. S. S. R. Olympiad Problem Book. San Francisco: W. H. Freeman, 1962.
- Sitomer, Harry. The New Mathlete Problem Book. Nassau County, NY: Interscholastic Mathematics League, 1974.
- Steinhaus, Hugo. One Hundred Problems in Elementary Mathematics. New York: Pergamon Press, 1963.
- Straszewicz, S. Mathematical Problems and Puzzles from the Polish Mathematical Olympiads. New York: Pergamon Press, 1965.
- Trigg, Charles W. Mathematical Quickies. New York: McGraw-Hill, 1967.

وحدات إثرائية لصفوف المدرسة الثانوية

Enrichment Units for The Secondary School Classroom

الأداء" التي تمتاز بها الوحدة. ولن تؤدي الأهداف بمفردها على إحكام محتويات الوحدة فحسب، ولكنها ستوفر، أيضاً، مؤشراً واضحاً ومفيداً عن مجال المادة التي عنيت بمعالجتها. لذا نستطيع أن نحدد، وبصورة أفضل، مدى ملائمة الوحدة للصف، بعد تقديم تقييم أولي لها. وبالإضافة إلى مساعدتك على التحقق من جاهزية طلبتك ومدى استجابتهم لمادة الوحدة، فإن هذا القسم سيسهم بدوره كمورد خصب للتعزيز الذي تأمل باستخدامه في عرض الموضوع أمام طلبتك. وسيعرض في القسم القادم، استراتيجيات التعليم Teaching Strategies، الموضوع الإثرائي بطريقة تمكنك من استخدامها في عرض المادة على الصف الذي تقوم بتعليمه. وقد تم تطوير الموضوع، في هذا المقام، بمثابة، بالغة، وبمزيد تشخص نحو استباق حصول الإخفاقات المحتملة، مع ضمان قدرة الطلبة على التغلب على الصعوبات التي ستشخص أمامهم. كذلك تم تبني أسلوب المحادثة، في كل مواطن الوحدات الإثرائية، وذلك لجعل عملية القراءة والمتابعة أكثر استرخاء. وقد قدمت اقتراحات، بين الفينة والأخرى، للتوسع في معالجة الموضوع، بحيث لا تبدو الوحدة أمام الطالب مبنوثة وعديمة الصلة بالموضوعات القريبة منها. ولا شك بأن الهدف الذي يكمن طوال الطرح الموضوعي لهذه الوحدات هو إتاحة فرصة مناسبة للطلبة كي يكونوا نقطة وثوب نحو مزيد من التحري والبحث. وقد راعينا عرض مصادر إضافية، كلما كان الأمر مناسباً، لفتح الأبواب على مصادرها أمام دراسات وتنقيبات إضافية.

إن إحدى الطرق الأكثر كفاءة لتحديد مدى الوصول إلى الأهداف المتوخاة لوحدة معينة هي تلك التي ستعتمد مبدأ مسالة الطلبة حول الموضوع الذي طرح عليهم. وقد تم توفير عينة من المسائل في قسم التقييم اللاحق في نهاية الوحدة. وأنت مدعو لأن تضيف إلى هذه الأسطة جملة ما تراه مناسباً في ضوء حاجة الصف لها.

ونظراً لأن هذه الوحدات الإثرائية يمكن أن تستخدم على شريحة واسعة من صفوف الرياضيات، والطلبة بمستويات متباينة من القابليات والقدرة الرياضية، فقد تم توفير جدول بقلامة تفصيلية يسهل استخدامه. وسيساعدك الجدول على

هناك الكثير من الموضوعات الرياضية التي تصلح لأن تكون مادة إثرائية للمساقات الدراسية بمادة الرياضيات في المدرسة الثانوية. ونستطيع بدورنا أن نلقت هذه الموضوعات ونقتصرها من جميع حقول الرياضيات وفروعها، وسيسهم هذا الأمر كثيراً وبوضوح في تقوية دعائم معايير NCTM.

إن حب الاستطلاع العددي Numerical Curiosities، والتجارب الجبرية للعلاقات العددية والظواهر الهندسية لا تتوفر غالباً لهذا الحضور، يضاف إلى ذلك غياب الكثير من الموضوعات الأخرى في مناهج المدارس الثانوية والكلية، ولكنك ستجد جميعها متوزعة بين الوحدات المدرجة في هذا القسم من الكتاب.

إن معاناة موضوع شائع وتقليدي من خلال منظور غير تقليدي سوف يوفر، بالتأكيد، مناخاً إثرائياً خصباً لدى المستمع المناسب. وإن محاولة تزويد الطلبة بأنشطة إثرائية، بصورة خفية ومبهطة، تكمن في اللجوء إلى عرض المادة بأسلوب متقدم يوظف بذلك، وبأسلوب محفز جذاب. وسوف يروشدنا هذا التحدي الهادف ويغير الدرب أمامنا من خلال الوحدات التي عرضت في هذا القسم من الكتاب. ولكن ينبغي أن لا يغيب عن أذهاننا - من البداية - بأن الأنشطة الإثرائية ليست مقصورة على الطلبة النابهين والمتفوقين فقط. وكما ستلاحظ خلال هذا القسم من الكتاب، فهناك الكثير من الأنشطة الإثرائية التي يمكن استخدامها بنجاح مع الطلبة من ذوي الإمكانيات المتوسطة، بالإضافة إلى استخدامها في الصفوف العلاجية، شريطة اعتماد تعديلات مناسبة لكل منها. بصورة طبيعية: فإن هذه التعديلات في العرض (في كل من المحتوى، وأسلوب العرض) سوف تكون على يدي معلم المادة الذي يستخدم المادة. حصراً. مع دوام هذا الأمر عالقاً في أذهاننا، دعنا نتأمل الصيغة التي ستعرض من خلالها هذه الوحدات الإثرائية.

تعالج كل وحدة إثرائية موضوعاً قائماً بذاته، ومع بعض الاستثناءات، يمكن أن تعالج الموضوعات بأي ترتيب تقريباً دون وجود محددات على تسلسل ورودها.

يعد طرح مقدمة مبسطة عن الوحدة، شرعاً ببيان أهداف

وطلبا للسهولة سوف نستخدم نفس مفردات المنهج للطلبة المتميزين كما هو الحال عليه لدى الطلبة المتوسطين (المشار إليهم أعلاه). وقد افترض عند هذه النقطة توفر قابليات متميزة في مادة الرياضيات وتقانات تطبيقاتها.

يشير الرقمان 1 و 2 إلى المستمعين بقتيتهم الأولية والثانوية لكل وحدة من الوحدات. وهذا الأمر يدل ضمنا على ضرورة إحداث تغييرات في الوحدات (والتي تعد ضرورية) بحيث تتناسب مع كل مرحلة من المراحل في ضوء ما تراه مناسبا. بصورة طبيعية، هناك بعض التعديلات التي ينبغي إجراؤها على الوحدات، وهناك وحدات أخرى بحاجة إلى أن تخفف وتبسط "Watered down" للطلبة الضعفاء بالرياضيات، بينما ستكون بعض الوحدات للطلبة المتفوقين-الباقيين نقطة وثوب نحو المزيد من التحريات والتجارب في أعماق مادة الرياضيات.

التقديرات Ratings

1. استخدام أولي (مخصص للمستمع المحدد حصرا).
2. استخدام ثانوي (يمكن استخدامه لذلك المستمع مع إجراء بعض التعديلات).

هناك عامل مهم آخر ينبغي أن يؤخذ بنظر الاعتبار عند اختيار الوحدة الإثرائية هو فرع الرياضيات الذي يرتبط بها. ويعد هذا الأمر بالغ الصعوبة بالنسبة لكثير من الوحدات التي لا يمكن الفصل بينها، نظرا للعلاقات المتعددة التي تربطها مع عدة فروع بمادة الرياضيات. إن استخدام نظام التصنيف الآتي، والذي تم إدراجه في "الموضوع" Subject سؤاير بوضوح نحو فروع الرياضيات المختلفة التي ترتبط بهذه الوحدة. وبالرغم من أن ممارسة عملية تغيير ترتيب الفروع يمكن أن يتم إجراؤها بسهولة ودون إحداث تغيير ملموس في تفكير الموضوعية، إلا أننا قد حاولنا إدراج فروع الرياضيات بترتيب تنازلي Descending وبحسب ارتباطها بكل وحدة، وفي ضوء القرار الذي اتفقت عليه مجموعة من معلمي الرياضيات.

تصنيف الموضوع Subject Code

1. علم الحساب. Arithmetic
2. نظرية العدد. Number Theory
3. الاحتمالات. Probability
4. المنطق. Logic
5. الجبر. Algebra
6. الهندسة. Geometry
7. الهندسة التحليلية. Analytic Geometry
8. الطوبولوجيا. Topology
9. الإحصاء. Statistics
10. حل المسائل. Problem Solving
11. تطبيقات. Applications
12. الفضول الرياضي. Mathematical Curiosities

اختيار الوحدات الإثرائية وفقا: للموضوع، ومستوى الصف، ومستوى قابلية الطالب.

بصورة طبيعية، ستحتاج إلى إجراء بعض التعديلات في الشكل لجعل الوحدة تتلاءم مع متطلبات الحاضرين. تدعم كثير من هذه الوحدات، وبصورة واضحة جدا، معايير NCTM الخاصة بإعداد الارتباطات، نظرا لأنها توضح كيف إن الموضوعات والمفاهيم التي تعلم بطريقة تقليدية يمكن أن تستخدم بأسلوب مثير وخصب بمحتوى غير متوقع بصورة كلية!

بصورة عامة، وجدنا لزاما علينا أن نبذل كل ما في وسعنا من طاقة في إدخال الأنشطة الإثرائية بجميع مفردات الرياضيات التي تنهض بأعباء تعليمها، وبصرف النظر عن قابليات الطالب الرياضية. إن مثل هذه الأنشطة ستكون مجرد مكافأة في الصف العلاجي كما هو الحال في صف يحوي طلبة متفوقين. وإن الفائدة، رغم ظهورها وجلالها بصورة مختلفة، ستكون مقاربة وملموسة في جميع الصفوف على حد سواء.

قائمة تفصيلية-مقاطعة للوحدات الإثرائية Cross-Catalogue of Enrichment Units

لتيسير استخدام الوحدات الإثرائية الموجودة في هذا القسم، وتسهيل الوصول إليها، تم توفير قائمة تفصيلية-مقاطعة. وقد أدرجت الوحدات بنفس الترتيب الذي تم عرضها فيه خلال هذا القسم. يضاف إلى ذلك، فقد تم تزويدها بأرقام صفحات كل وحدة، ومستوى الصف، ومستوى القابلية، وفروع الرياضيات الذي ترتبط به وتنتمي إليه كل وحدة من هذه الوحدات. إن هذه التقييمات هي ببساطة ما يعتقده المؤلفون، وبعض معلمي الرياضيات بالمدارس الثانوية، وقد تمارس هذه الوحدات مع طلبة يختلفون عن الذين ذكروا في القائمة. ستلاحظ بأن كل مستوى قابلية: العلاجي، والمتوسط، أو المتفوق قد تم تقسيمها إلى أربعة أقسام لستوى الصف: 7-8، 9-10، 11-12.

وبالنسبة للطلاب المعالج، بصورة عامة، تمثل الصفين 7-8 لمساقات الرياضيات الدراسية في المدارس الثانوية الدنيا، وفي الصفين 9 و 10 رياضيات عامة أو متقدمة لعلوم الجبر. وتوجد في الصفين 11-12 تنمة للمساقات الدراسية السابقة ولكن مع درجة أكبر من التعقيد والمعالجة الأكثر عمقا.

إن قاطع الطالب المتوسط يشير إلى برنامج المدارس الثانوية الدنيا لمادة مقدمات الجبر للصفين 7-8، والجبر الأولي للصف 9. ومساق الهندسة الدراسي للمدارس الثانوية للصف 10، والمساق الدراسي للسنة الثانية بمادة الجبر (مع حساب المثلثات) وما يتجاوزها للصفين 11-12.

ورغم إن الطلبة المتفوقين والمتميزين، غالبا ما يبدؤون بدراسة الجبر الأولي في الصف الثامن (أو بمرحلة مبكرة)،

رقم الصفحة	صفوف متقدمة وتنشئة				صفوف متوسطة				Remedial Classes				الموضوع	موضوع الإثراء	
	12-11	10	9	8-7	12-11	10	9	8-7	12-11	10	9	8-7			
320							2	1	2	1	1	1	1+4+12	إنشاء مبرعات سحرية بنسق لبردي	1
322							2	1	2	1	1	1	1+12	إنشاء مبرعات سحرية بنسق زيجي	2
325			2	1			1	1	1	1	2	2	1+4	مقدمة إلى العد الحربي Alphametic	3
327			2	2			2	1	2	1	1	1	1+12	حاسبة لعبة العالم	4
330			2	2			2	1	1	1	1	2	4+1+12	لعبة Nim	5
332			2	2			1	1	1	1	2	2	4+1+12	برج هانوي	6
334	2		2	1			1	1	1	1	2	2	4+1+12	أي يوم كان من الأسبوع ؟	7
340	2		1	1	2		1	1	2	2	1	1	2+1+12	الأعداد المتكاملة Palindromic	8
343			2	1			2	1	1	1	1	2	1+2+12	العدد الأسر تسعة 9	9
345			2	1			2	1	1	1	1	2	1+2+12	خصائص العدد الثريد	10
348			2	1			2	1	1	1	1	1	1+2+12	إثراء بآلة حاسبة-يدوية	11
351			2	1	2		2	1	1	1	1	2	1+2+12	المخاطبة المتناسقة	12
353	2		2	1	2		2	1	1	1	1	2	1+2+12	التعبيرات على موضوع العرب	13
356	2		1	1	2		2	1	1	2	2		1+2	علم الحساب في مصر القديمة	14
359		2					2	1	1	1	1	1	1+2+11	قلبيان نابير	15
360							2	1	1	1	1	1	1+11	وحدة تصوير	16
361			2	1			1	1	1	1	1	2	1+11+12	الحسابات والزائدات المتعاقبة	17
363					2		2	2	2	1	1	1	1+2	العوامل الأولية والركبة للعدد الصحيح	18
365							1	2	2	1	1	2	2+1+12	نظام العد الأولي	19
368					2		1	2	2		2		2+1	التوسعات بالتراتب العشرية المتكررة	20
370			2	1	2		1	1					2+1+12	خصائص التكرار المتتالي للتراتب العشرية	21
372			2	2			1	1	2	2			4+5	الأنماط في الرياضيات	22
374							2	1	2	1	1	2	1+12	الأعداد الكهيرة	23
377	2		1	2	1		2		2	2			3+9+5	رياضيات التائمين على الحياة	24
379		2	1	1			1	1	2	2			6+4+10	التجزئة الهندسية	25
382	2	1	1	1			2	2	2	2			8	قنبلة كلاين Klein	26

رقم الصفحة	صنوف متميزة ومتفوقة Gifted Classes				صنوف متوسطة Average Classes				صنوف علاجية Remedial Classes				الوضع	موضوع الإثراء	
	12-11	10	9	8-7	12-11	10	9	8-7	12-11	10	9	8-7			
384		2	2	1	2	1	1	1					8,4	مسألة الخارطة ذات الألوان الأربعة	27
386				2		2	2	1					1,4,6	رياضيات حول الدراجة	28
389	2		1	1	2	2	2	1		1	2		1,11	الرياضيات والوسيقى	29
392	2	2	1	1	2	1	1	1		2	2		11,12,2	الرياضيات في الطبيعة	30
395	1	1	1	1	1	2	1	2		2			3,12,11	مسألة يوم الهلالي	31
397			1	1	1	2	1	2					1,5	هيكل نظام الأعداد	32
399	2	2	2	1	2	2	1	1		2	2		2,1,5	نوعات في قواعد الأعداد	33
402	2		1	1	1	1	1						5,11	زيادة القائمة	34
404		2	1	1	1	1	1	1					4,2	ملاقات الانعكاسية، وثنائية وانتقائية	35
407		1	1	1	1	1	2						6,10	تجاوز منطقة يصعب الوصول إليها	36
409		1	1	1	1	1	2						6,10	زاوية يصعب الوصول إليها	37
411	1	1	1	1	1	1	2						6,10	إنشاءات الثلث	38
413	1	1	1	1	1	1							6,5	معمار قابلية البناء	39
416	2	1	1	1	1	1	2						6,5	إنشاء أطوال جذرية	40
417	1	1	1	1	1	1	1						6,5	إنشاء شكل هندسي	41
419	1	1	2	1	1	1							6,12	تحري مقاطعات الثلث متساوي الساقين	42
421	2	1	2	1	1	1							6	نقطة متساوية الزوايا	43
423	2	1	2	1	1	1							6	النقطة الأقصر مسافة بمثلث.	44
426	2	1	2	1	1	1							6,10	إعادة زيارة الثلث متساوي الساقين	45
429	2	1	1	2	1	1	2						6,11	الخصائص الانعكاسية للمستوى	46
431		1			1	1	2						6,5	إيجاد طول سريان بمثلث.	47
434		1	2		2	1							6,10	تحدي مدخل	48
435		2	1	1	1	1	1	2					6	عمل اكتشافات في الرياضيات	49
437	2	1	1	2	1	1	2						6,5	مورصات الضيقضاء	50
439	2	1	1		2	1	1						6,2,5	تقديم نظرية فيثاغورث	51
442	2	1	1	2	1	1	1						6,5,12	عودة إلى التقسيم الثلاثي للزوايا	52
445	2	1	2		2	2		2					6,10	برهنة ثلاثي المستقيمت	53

رقم الصفحة	صنف متفهم ومتفوقه Gifted Classes				صنف متوسط Average Classes				صنف علاجه Remedial Classes				الموضوع	موضوع الإثراء
	12-11	10	9	8-7	12-11	10	9	8-7	12-11	10	9	8-7		
447	2	1	1		2	1						6:10	مربعات	54
449	1	1	2		2	2						6:10	برهنة تساوت (استقامت) الزوايا	55
451		1	2			1						6	قياس الزاوية بواسطة دائرة	56
453	2	1	1		2	1	1					6:12	تقسيم الدائرة إلى ثلاثة أقسام متساوية	57
456	2	1	1		1	1	2					6:10	برهنة بطليموس	58
458	2	1	1		1	1	2					6:1	إنشاء π	59
461	1	1	1		1	1	2					6:5	الأربطوس	60
463	2	1	1	2	2	1	2					6	دائرة بنسبة نقاط	61
465	2	1	1	2	2	1	2					6	خط Euler	62
467	2	1	1	2	1	1	2					6	خط سمسون Simson	63
469	1	1	1	2	2	1	2					6:10	مسألة الفراشة	64
472	1	1	2		2	1						6:5	الدوائر المتساوية	65
474	1	1	2		2	2						6:5	الدائرة الخامسة والثلاث قائم الزاوية	66
477	2	1	1		1	1	2					6:5:2	المستطيل الذهبي	67
480	1	1	1		1	1						6:5	المثلث الذهبي	68
482	2	1	1		1	1						6:5	مناظرات هندسية	69
485	1	1	1	2	1	2						8:4	مقدمة السطح المنظم	70
487	2	1	1	1	2	1	1					1	مقدمة إلى الطوبولوجيا	71
489	2	2	1	1	2	1	1					1:5	زوايا على الساحة	72
491	2	2	1	1	1	2						5:1	إيجاد المعدل-المتوسط المتناسق	73
494	1	1	1	1	1	1	1					1:5	إغلاق بها!	74
496	1	1	1	1	1	1	1					5:1	إعادة زيارة المسائل الرقمية	75
498		2	1		2	1	1					5:6	هويات جبرية	76
500	2		1		1	2	1					5	طريقة التحليل العائلي للمعادني للخطي الحدود	77
502	1		1		1	2	1					5:10	بصيغة ax^2+bx+c	78
504	1		1		1		1					2:5	حل معادلات تربيعية	79
													الخوارزمية الاقليدية	

رقم الصفحة	صنوف متميزة ومتفوقة Gifted Classes					صنوف متوسطة Average Classes					صنوف علاجية Remedial Classes					الوضع	موضوع الإثراء	
	12-11	10	9	8-7		12-11	10	9	8-7		12-11	10	9	8-7				
506	1		1			2		2							2:5	الأعداد الأولية	80	
509	1	2	1			1	2	1							12:5	مناظرات جبرية	81	
511	1		1	1		1	2	1							5:6,12	اشتقاقات المجموع بواسطة المصفوفات	82	
514	1	1	1	2		1	1	2							2:5:6	لائحات فيثاغوراس	83	
516	1	2	1	1		1	2	1	1		1	1	2		2:1:5	قابلية القسمة	84	
519	1	2	1	1		2	2	1	2		2	3			5:2:12	مقابلات فيبوناتشي Fibonacci	85	
522	1	2	1	2		1	2	2							5:2	معادلات دايوفانتين	86	
524	1	2	1	2		1	1	2							5:2	الكسور المستمرة ومعادلات دايوفانتين	87	
526	1	2	1	2		1	1	2							5:2	تبسيط الصيغ التي تتضمن اللانهاية	88	
528	1	2	1			1		2							5	توسيع الكسور المستمرة للأعداد الصماء	89	
531	2	2	1	1	1	1	2	1	2		2	2	2		1:5	مقابلات فاراي Farey.	90	
533	1	1	1	1	1	1	1	2	2		2	2			6:7	خلاف القطع الكائني	91	
535	1	2	1	2		2									2:5	تطبيق التناظر على قابلية القسمة	92	
538	2	1	1	2		2	1	1							10:6:5	حل المسائل - استراتيجيات مماثلة	93	
542	1	2	1	2		1	2	2							1:5	المراتب العشرية والكسور في فروع أخرى	94	
543	1	1	1	2		1	1	1			2				2:5	Polygonal	95	
547	1	1	1	2		1	1	1	2		1	2			4:5:11:8	شبهكات	96	
549	1	1	2			1	2								5:6:2	تقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية - ممكّن أم مستحيل؟	97	
551	1	1	1			1	1	1							5:2:6	مقارنة المتوسطات	98	
553	1	1	2			1									5	هرم باسكال	99	
555	1	2	1			1	1	2							5:1:4	نظرية متعدد الحدود	100	
557	1		1			2	1								5	الحل الجبري للمعادلات التكعيبية	101	
560	1	1	1			2	2								5	حل المعادلات التكعيبية	102	
563	1	1	1			1	1	2							5	حساب مجاميع التواليف المحدودة	103	
565	1		2			2									5	صيغة عامة لمجموع متوالي بأسلوب $\sum p^2$	104	

رقم الصفحة	صفوف متقدمة وبتدولة				صفوف متوسطة				صفوف علاجية				الموضوع	موضوع الإجراء	
	12-11	10	9	8-7	12-11	10	9	8-7	12-11	10	9	8-7			
569	1	1	1		1	2	2		2				7:5	آلة حساب القطع الكافى	105
571	1	1	1		1	2	2						6:5,12:7	إنشاء القطع الناقص	106
574	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2			6:7:5	إنشاء القطع الكافى	107
577	1	1	1		1	2							7:5:6	استخدام منحنيات المسويات الأعلى لتقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية	108
580	1	1	1		1	2							6:5:7	إنشاء أختلة مسار دويوي فوقى وتحتي - دائري.	109
582	1	1	1		1	1	2						5:6	التعاقب المتناهم	110
484	1	2	2		2								5:7	التحويلات والمنحنيات	111
587	1	2	2		1								1:5	طريقة اللزوايات	112
589	1	1	1	2	1	1	1		2				3:5:4	تطبيق الاحتمالية على كرة السلة	113
591	1	1	2		1	1							6:5	مقدمة إلى التحويلات الهندسية	114
594	1	1	1		1	1	2						6:5:11	الدائرة والمنحنى الكافى	115
597	1	1	2		1	2							6:5:11	تطبيقات الأعداد المركبة	116
600	2	1	1	1	2	2		1	1	2	2		2:1	علم الحساب الهندسي	117
602	1	2	1		1								5	البؤرة على الأعداد الصماء	118
604	2	2	1	1	1	2							1:2:10	استخدام المصالح المقتدة على الحاسوب لإعداد حلول لمسائل رياضية محددة	119
605	1	1	2										6	عوالم الهندسة الثلاثة	120
609	1												5	حليط π	121
610	1	2											5	التكرار الرسومي	122
613	1	2											5	رسم فيغنوم Feigenbaum	123
615	3	2	2	1									6	مئات سيربينسكي Sierpinski	124
617	1	1	1										6	الفركتال Fractals	125

إنشاء مربعات سحرية بنسق فردي

Construction Odd-Order Magic Squares

1

أما إذا لم يكن الطلبة معتادين على التعامل مع هذه الصيغة، يمكن أن تحال، بسهولة بالغة، إلى قصة الياقاع كارل فريدريش كاوس (1855-1777) الذي استجاب، وهو في سن العاشرة، للتحدي الرياضي الذي فرضه المعلم عليه.

اعتاد معلم كاوس على إعطاء عمل يومي طويل للطلبة لكي ينهضوا بأكمله (وهو على علم بطرق مختصرة لإنجاز هذا العمل). وفي يوم من الأيام طلب المعلم من طلبته إضافة سلسلة من الأعداد بصيغة: $1+2+3+4+...+97+98+99+100$.

بعد أن انتهى المعلم من بيان مسألته، عمد الياقاع كاوس إلى تقديم الجواب دونما تأخير!

وبدهشة غامرة، طلب المعلم من كاوس بيان سبب إجابته السريعة. وقد وضع كاوس بأنه قد تأمل إضافة المائة عدد بالنسق الذي قدمه المعلم، فالتفتحت في ذهنه العلاقة القائمة بين الأزواج

الآتية: $101=100+1$ ، $101=99+2$ ، $101=98+3$ ، $101=97+4$ ، ...، $101=51+50$ ونظرا لوجود خمسين زوجا من الأعداد التي يبلغ مجموع كل منها 101، فإن جوابه هو $101.50 = 5,050$. لقد عمد كاوس، في الواقع، إلى ضرب

نصف عدد الأعداد التي سيجد مجموعها $\left(\frac{n}{2}\right)$ بحاصل جمع العددين: الأول والأخير من المتوالية (8_1+8_n) . ولغرض

الحصول على المجموع الكلي للمتوالية نستطيع من هذه الصيغة بأن مجموع الأعداد الطبيعية من 1 إلى n^2 (الأعداد المستخدمة

في مربع سحري $n \times n$) هي $S = \frac{n^2}{2}(1+n^2)$. بيد أنه إذا ورد شرط بوجود تساوي مجاميع الصفوف، فإن المجموع سيساوي $\left(\frac{n}{2}\right)$. (ومن هنا فإن وصف "مجموع الصف" سوف يشير

بالواقع إلى "مجموع الأعداد الموجودة في الصف"). وعليه، فإن مجموع أي صف من الصفوف هو $S = \frac{n^2}{2}(1+n^2)$. وقد ترغب

في حث الطلبة على معرفة سبب كون القطر مساويا للصف $S = \frac{n^2}{2}(1+n^2)$. وسيكون الطلبة على أهبة الاستعداد

للبدء في العمل بطريقة نظامية على المسألة الأصلية. دع طلبتك يتأملون مصفوفة الرموز التي تمثل الأعداد 1-9 الآتية:

عدت هذه الوحدة لإثراء معرفة الطلبة الذين قد أتقنوا مبادئ الجبر الأولي، إن الأجزاء التي اختبرت بعناية لهذه الوحدة قد تكون مؤثرة ومفيدة في الصفوف العلاجية، حيث يفضل الطلبة بعض الرياضيات الترفيهية.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بإنشاء مربعات سحرية بأي نسق فردي مطلوب.
2. سيكتشف الطلبة خصائص المربعات السحرية ذات النسق الفردي المعطاة.
3. سيقوم الطلبة باحتساب مجموع عناصر لأي صف (أو عمود، أو قطر) بأي مربع سحري، بعد معرفة نسقه فحسب.

التقييم السابق Pre Assessment

تحديد الطلبة بإعداد مصفوفة 3×3 ، وبالأعداد 1-9 بحيث أن مجموع عناصرها في كل صف، وعمود، وقطر من أقطارها يكون متساويا. وضع للطلبة بأن مثل هذه المصفوفة يطلق عليها "مربع سحري" (بنسق 3).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد أن يتوفر للطلبة وقت كاف لكي ينجحوا في تجاوز عقبة التحدي، أو يمانون من إحباط نتيجة الفشل بالوصول إلى ما طلب منهم (في فترة لا تتجاوز غالبا 15 دقيقة)، تستطيع أن تجابه المسألة بمشاركة الطلبة شريطة أن تدعهم يدركون فائدة معرفة مجموع كل صف (أو عمود، أو قطر) سلفا.

ولغرض إعداد صيغة لحاصل جمع العناصر في أي صف، عمود، أو قطر من أقطار المربع السحري^(*)، ينبغي أن يعتاد الطلبة على التعامل مع صيغة مجموع متوالية حسابية، $S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

(*) ما لم ينص على أمر آخر، فإن هذه الوحدة سوف تمنى بالمربعات السحرية ذات الأعداد الطبيعية المتتالية والتي تبدأ بالعدد 1.

والآن دع الطلبة يدركون بأن كل من العددين 3 أو 7 لا يمكن أن يقعا في موقع بإحدى زوايا المربع السحري. لذا فإنهم سيمضون إلى استخدام المعايير المبينة أعلاه لإنشاء مربع سحري برتبة 3. وسيحصل الطلبة على أحد المربعات السحرية الآتية:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

قد يرغب الطلبة، الآن، بتوسيع دائرة تطبيق هذه التقانة لإنشاء مربعات سحرية بأنساق أخرى، ولكن هذه الخطوة Scheme ستصبح مثيرة للفضول. ونورد هنا طريقة ميكانيكية لإنشاء مربع سحري بنسق فردي.

أبدأ بوضع العدد 1 في الموقع الأول بالعمود المتوسط استمر بوضع العدد الذي يليه في الخلايا للقطر (بالميل الموجب). وهذا بالطبع أمر مستحيل لعدم وجود أية خلية "أعلى"، المربع.

وعندما يجب علينا أن نضع عددا في موقع "فوق" المربع، ينبغي بدلا من ذلك أن يوضع في آخر خلية من العمود التالي على الجهة اليمنى. بعدها يتم وضع بقية الأعداد على التعاقب في القطر ذي الميل الموجب. وعندما (كما يبين في الشكل السابق) تقع الأعداد خارج حدود المربع، من الجهة اليمنى، ينبغي أن توضع في الخلية الأولى (على الجهة اليسرى) بالصف التالي، فوق الصف الذي تم ملؤه (كما موضح في الشكل). وتستمر العملية بملء الخلايا المتعاقبة لحين الوصول إلى خلية قد تم ملؤها في البداية (كما هي مع العدد، الموضح في الشكل السابق). وبدلا من وضع عدد آخر في الخلية المشغولة، يتم وضع العدد تحت العدد السابق. وتستمر العملية لحين الوصول

	c_1	c_2	c_3	d_2
D_1				
r_1	a	b	c	
r_2	d	e	f	
r_3	g	h	i	

باستخدام الصيغة التي أعدت سابقا، $S = \frac{n^2}{2}(1+n^2)$ ، سنجد بأن مجموع صف في مربع سحري برتبة (3×3) هو $\frac{3}{2}(3^2+1) = 15$ ، وعليه فإن

$$r_2 + c_2 + d_1 + d_2 = 4.15 = 60$$

ولكن

$$\begin{aligned} r_2 + c_2 + d_1 + d_2 &= \\ (d+e+f) + (b+e+h) + (a+e+i) + (c+e+g) &= \\ 3e + (a+b+c+d+e+f+g+h+i) &= 3e + 45 \end{aligned}$$

(نظرا لأن مجموع الأعداد $1+2+3+\dots+9 = 45$) وعليه فقد تم التوصل إلى أن موقع المركز من مربع سحري يتنسق ثلاثي سوف يتبوّه الرقم 5.

ونظرا لكون مجموع كل: صف، عمود، وقطر في المربع السحري يساوي 15، $a+i=g+c=b+h=d+f=15-5=10$ (ملاحظة: إن أي عددين في مربع سحري برتبة ثنائية يملكان متتامان Complementary إذا كان مجموعهما هو n^2+1 ، وعليه فإن a و i هما عدنان متتامان. والآن، أبدأ بإرشاد الطلبة إلى القضية الآتية:

العدد 1 لا يمكن أن يستقر في زاوية المربع. افترض بأن $a=1$ ، إذن $i=9$ ، ولكن الأعداد 2، 3، 4 لا يمكن أن تكون في نفس الصف (أو العمود) كما مع العدد 1. ونظرا لعدم وجود عدد طبيعي أقل من 10، ستكون قيمته كبيرة بحيث يحتل الموقع الثالث من مثل هذا الصف (أو العمود). ينسجم مع هذا الأمر ترك موقعين فقط في المربع غير المائل المبين أدناه التي يمكن أن تستقبل هذه الأعداد الثلاثة (2، 3، 4). ونظرا لأن هذا الأمر مخالف للحالة المطلوبة، فإن العددين 1، 9 يمكن لهما أن يستقران في موقعين وسيطين في صف (أو عمود) فحسب.

1		
	5	
		9

لا يمكن للعدد 3 أن يكون في نفس الصف (أو عمود) مع الرقم 9، لأن العدد الثالث المطلوب في نفس الصف (أو العمود) سيكون 3 لكي يكون المجموع 15 وهو خلاف المطلوب، ولأنه لا يمكن استخدام العدد مرتين داخل المربع السحري.

التقييم اللاحق Postassessment

ادع الطلبة إلى إنجاز التمارين الآتية:

1. جد مجموع صف في مربع سحري برتبة:
(أ) 4 (ب) 7 (ج) 8.
2. إنشاء مربع سحري برتبة 11.
3. وضع بعض الخصائص العامة للمربع السحري برتبة فردية يقل عن 13.

إلى العدد الأخير.

وبعد ممارسة تدريب مناسب سيدرك الطلبة أنماطا محددة، منها على سبيل المثال، إن العدد الأخير يستقر في موقع المنتصف بالصف الأسفل.

ينبغي أن يلاحظ بأن هذه الطريقة هي أحد الأساليب المستخدمة في إنشاء مربعات سحرية برتبة فردية. إن الطلبة الأكثر مهارة ينبغي أن يستحثوا على برهنة أن هذه العملية هي ثقافة ميكانيكية.

2

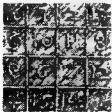
إنشاء مربعات سحرية بنسق زوجي

Construction Even-Order Magic Squares



شكل (1)

يظهر المربع السحري في الزاوية اليمنى-العليا من النقش



شكل (2)

أعلاه، وكما موضح في شكل (2).
ويعتقد بأن هذه هي المرة الأولى التي ظهر فيها المربع السحري في الحضارة الغربية. ومن الأمور التي تسترعي الاهتمام بهذا المربع هي مجموعة الخصائص غير المألوفة

التي يتميز بها. فعلى سبيل المثال، فإن الخليتين الوسطيتين

يمكن استخدام هذا الموضوع مع صف علاجي بمدرسة ثانوية. بالإضافة إلى اعتماده مع صف متقدم في أي مستوى مرحلة بمدرسة ثانوية. في الحالة السابقة، يمكن فقط اعتبار المربعات السحرية برتبة زوجية مزدوجة، بينما في الحالة التالية يمكن تضمين المربعات السحرية برتبة زوجية منفردة. وعندما يستخدم هذا الإثراء مع صف علاجي، فإن أعداد المربعات السحرية ذات الرتبة الزوجية سيعد مصدرا محفزا على تعميق الفهم بمبادئ الحساب.

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1 سيقوم الطلبة بإنشاء مربعات سحرية بأي رتبة أو نسق زوجي مطلوب.
- 2 سيكتشف الطلبة خصائص مربعات سحرية برتبة أو بنسق زوجي أعطيت لهم.

التقييم السابق Pre Assessment

ابداً مقدمتك بملاحظة تاريخية تذكر خلالها الفنان (والرياضي) الألماني اليربخت دورير Albrecht Durer (1471-1528) الذي أنجز عملاً خصباً بميدان الرياضيات المرتبطة بأعماله الفنية. إن إحدى الأمور التي تثير الاهتمام بعمله هو ظهور مربع سحري في نقش أمده عام 1514 بعنوان "ميلانخوليا Melancholia" (شكل (1)).

بعدها دعهم يستبدلون كل عدد في القطر بالعدد المتم له (أي، العدد الذي يعطي مجموعاً $n+1 = 16+1 = 17$). إن هذا العمل سيمتحننا مربعاً سحرياً برتبة (بنسق) 4×4 . (الشكل 4). (ملاحظة: عمل دورير Durer ببساطة على استبدال العمودين 2 و 3 للحصول على مربعه السحري).

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

شكل 4

استخدمت عملية مشابهة لإنشاء مربعات سحرية أكبر برتبة زوجية-مزدوجة. ولغرض إنشاء مربع سحري برتبة (بنسق) 8×8 ، قم بتقسيم المربع إلى مربعات برتبة 4×4 (شكل 5)

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

شكل 5

ثم استبدل الأعداد الموجودة في كل قطر من أقطار مربعات نسق 4×4 بالأعداد المتتمة لها.

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

شكل 6

إن المربع السحري الناتج يظهر في شكل (6). والآن دع الطلبة يباشرون بإنشاء مربع سحري برتبة 12×12 .

يمكن اعتماد خطة جديدة لإنشاء مربعات سحرية برتبة زوجية-منفردة، أي تلك التي تكون زوجية ولكنها غير مضروبة بالعدد 4. إن أي مربع سحري زوجي منفرد (افترض برتبة n) يمكن تقسيمه إلى رباعيات quadrants (شكل 7). ولتسهيل التعامل معها، اعمد إلى تسميتها بالرموز D, C, B, A.

من الصف الأول تؤثر إلى ستة إعداد النقش 1514. امنح لطالبك وقتاً مناسباً لإيجاد خصائص أخرى غير مألوفة للمربع السحري (غير تلك التي تخص تساوي مجاميع الصفوف، والأعمدة، والأقطار).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

سيستمتع الطلبة، بلا شك، في مناقشة جملة من خصائص هذا المربع السحري، وفيها:

1. إن مجموع كل من الزوايا الأربعة هو 34.
2. إن مجموع كل من الزوايا الأربعة 2×2 هو 34 أيضاً.
3. إن مركز المربع بالرتبة (النسق) 2×2 هو 34.
4. مجموع أعداد القطر يساوي مجموع الأعداد غير الموجودة فيه.
5. مجموع مربعات أعداد القطر (748) يساوي مجموع مربعات الأعداد غير الموجودة فيه.
6. مجموع مكعبات أعداد القطر (9,248) يساوي مجموع مكعبات الأعداد غير الموجودة فيه.
7. مجموع مربعات الأعداد في كل من القطرين يساوي مجموع مربعات الأعداد في الصفين الأول والثالث (أو العمودين الأول والثالث)، والتي تساوي مجموع مربعات الأعداد في الصفين الثاني والرابع (أو العمودين الثاني والرابع).
8. لاحظ ما يأتي:

$$2+8+9+15 = 3+5+12+14 = 34$$

$$2^2+8^2+9^2+15^2 = 3^2+5^2+12^2+14^2 = 374$$

$$2^3+8^3+9^3+15^3 = 3^3+5^3+12^3+14^3 = 4,624$$

9. إن مجموع كل زوج من الأعداد المتجاورة إلى أعلى أو إلى

أسفل، وبالاتجاهين الأفقي أو العمودي تنتج تناظراً يفر

الانتباه (انظر ما يأتي).

21	13	13	21
13	21	21	13
	15	19	
	19	15	
	19	15	
	15	19	

أفقياً:

تأمل الإنشاءات الابتدائية لمربعات سحرية بنسق 4×4 (ويعبر عنه في بعض الأحيان بنسق ثنائي-مزدوج). دع الطلبة ينشئون المربع أدناه وبالأقطار المؤشرة.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

شكل 3

في المربع B. لاحظ بأنه بالنسبة لقيمة $n=6$ (شكل 10). $m=10$ ، وعليه فإن كل من المربعين B، C سيظلان دون تغيير.

اترك الطلبة يطبقون هذه التقنية لإنشاء مربع سحري برتبة 10 ($m=2$ ، $n=10$). انظر إلى الشكلين 11 و 12.

شكل 10

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
11	18	25	2	9	61	68	75	52	95
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

شكل 11

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	27	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

شكل 12

التقييم اللاحق Podtassessment

كتقييم لاحق بصيغة نظامية، اطلب من الطلبة:

1. إنشاء مربع سحري برتبة: (أ) 12، (ب) 16.
2. إنشاء مربع سحري برتبة: (أ) 14، (ب) 18.
3. جد خاصاً إضافياً لمربعات سحرية بنسق: (أ) 8، (ب) 12

شكل 7

A	C
D	B

والآن. ينبغي أن تكلف الطلبة بإنشاء مربعات سحرية "برتبة فردية" بالتمسق: A, C, B, D. (ارجع إلى النموذج اللازم "إنشاء مربعات سحرية برتبة فردية"). أي إن المربع A سيكون مربعاً سحرياً بنسق فردي باستخدام الأعداد الطبيعية التي تبدأ بـ $\frac{n^2}{4}$ = المربع B. وسيكون مربعاً سحرياً بنسق فردي ويبدأ بالعدد $1 + \frac{n^2}{4}$ وينتهي بالعدد $\frac{n^2}{4}$ وسيكون المربع C مربعاً سحرياً بنسق فردي يبدأ بالعدد $1 + \frac{n^2}{4}$ ، وينتهي بالعدد $\frac{3n^2}{4}$ ، وأخيراً المربع D والذي سيكون، أيضاً، مربعاً سحرياً بنسق فردي، ويبدأ بالعدد $1 + \frac{3n^2}{4}$ وينتهي بالعدد n^2 . (يظهر شكل (8) الحالة التي تكون فيها قيمة $n=6$).

شكل 8

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

شكل 9

0+8	0+1	0+6	8+18	1+18	18+6
0+3	0+5	0+7	18+3	18+5	18+7
0+4	0+9	0+2	18+4	18+9	18+2
27+8	27+1	27+6	9+8	9+1	9+6
27+3	27+5	27+7	9+3	9+5	9+7
27+4	27+9	27+2	9+4	9+9	9+2

دع الطلبة يلاحظون العلاقة القائمة بين المربعات السحرية الأربعة في شكل (8) مع المربع السحري الأول الواقع في الأعلى اليسر. A. في شكل (9).

والآن تظهر الحاجة إلى إجراء تعديلات طفيفة لإكمال إنشاء المربعات السحرية. افرض $n = 2(2m+1)$ = تنطق الأعداد الأولى في مواقع m من كل صف في A (بإستثناء الصف الأوسط، حيث ستتجاوز الموقع الأول وتلتقط مواقع m التالية)، ثم استبدلهم بالأعداد المقابلة من المربع D. بعدها تناول الأعداد الموجودة في آخر مواقع m-1 بالمربع C واستبدلهم بالأعداد المقابلة

3

مقدمة إلى العد الحرفي

Introduction to Alphabetic

كما يأتي. من العمود 5، $12 = 7 + \underline{\quad} + 1$ ، إذن الرقم المفقود في العمود الخامس ينبغي أن يكون 3. في العمود الرابع، لدينا $1 = \underline{\quad} + 4 + 6 + 1$ ، أو $1 = \underline{\quad} + 11$ ، وعليه ينبغي أن يكون الرقم صفراً. في العمود الثالث، لدينا $8 = 9 + \underline{\quad} + 1$ ، وينبغي أن يكون الرقم المفقود 5. والآن، من العمود الثاني، لدينا $13 = \underline{\quad} + 3 + 2$ ، وهذا يدل ضمناً بأن الرقم ينبغي أن يكون 8، وعليه فإن الرقم على الجبهة اليسرى بالعمود الأول، والصف السفلي ينبغي أن يكون 1. وبهذا نكون قد أعدنا إنشاء المسألة. يجب أن يكون الطلبة قد أصبحوا قادرين على إيجاد الأرقام المفقودة في المسألة الثانية من التقييم السابق (إذا لم يكونوا قد نجحوا في حلها). إن الحل للتكامل هو:

$$5 \ 6 \ 7 \ (4)$$

$$\underline{7} \ \underline{8} \ \underline{(5)} \ \underline{9}$$

$$(1) \ (3) \ 3 \ 3$$

دع الطلبة يعدون مسائلهم الشخصية، ثم اتركهم يتبادلونها مع بقية زملائهم. لقد أخذنا بنظر الاعتبار المسائل التي تمتلك حلاً واحداً على وجه الدقة. إن المثال الآتي سوف يعرض لك مسألة تمتلك أكثر من حل واحد.

$$(1) \ (2) \ (3) \ (4)$$

$$\underline{\quad} \ 8 \ 7$$

$$\underline{\quad} \ 3 \ \underline{\quad} \ 1$$

$$\underline{\underline{5 \ 6 \ \underline{\quad}}}$$

$$\underline{\underline{3 \ \underline{\quad} \ 0}}$$

في العمود $10 = 7 + 1 + \underline{\quad}$ ، ينبغي أن يكون الرقم المفقود 2. في العمود الثالث، $6 = \underline{\quad} + 8 + 1$ أو $15 = \underline{\quad}$ ، ينبغي أن تجري فحصاً على العمود الثاني، بحيث يمكن اعتبار جميع الاحتمالات الممكنة. لدينا في العمود الثاني، $3 = 5 + 3 + \underline{\quad}$ ، وعليه إذا قمنا بتحديد الأرقام 5, 6, 7, 8, 9، بالنسبة لقيمة العدد المفقود في العمود الثالث، الصف الثاني، سنحصل على $20 = 15 + 5$ ، $21 = 15 + 6$ ، $22 = 15 + 7$ ، $23 = 15 + 8$ ، $24 = 15 + 9$. إن هذا الأمر

يمكن استخدام هذه الوحدة لتعزيز مفهوم الجمع (الإضافة).

هدف الأداء Performance Objective

عند إعطاء مسائل العد الحرفي، سيعمل الطلبة على حلها بطريقة نظامية Systematic.

التقييم السابق Pre Assessment

دع الطلبة يعملون على حل مسائل الجمع الآتية، أما بطريقة الجمع البسيط في (أ) أو بتمويض الأرقام المفقودة في (ب).

(أ)	562	(ب)	567 -
			<u>89</u>
	3943		3 - 33
	<u>8807</u>		

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ينبغي أن تكون المسائلتين السابقتين مودناً لتحفيز الطلبة بهذا الدرس. إن العد الحرفي هو عبارة عن ألغاز رياضية تظهر في أكثر من مظهر. فترتبط المسألة في بعض الأحيان مع استعادة أرقام في مسألة محسوبة Computational، بينما تكون في أوقات أخرى مرتبطة مع إزالة تشفير مسألة حسابية متكاملة حيث يتم وصف الحروف الهجائية بجميع الأرقام. بصورة أولية، فإن إنشاء هذا النوع من الألغاز ليس أمراً بالغ الصعوبة، لكن الحل يتطلب تحريماً دقيقاً لجميع العناصر. من أجل هذا ينبغي اختيار كل مقتاح من مفاتيح الألغاز بجميع حالات للمسألة، شريطة متابعتها بدقة وعناية. فعلى سبيل المثال، افترض بأننا نريد إزالة بعض الأرقام من المسألة السابقة (أ) ونجهز الحل ببعض الأرقام المفقودة، دعنا، كذلك، نفترض بأننا لا نعرف شيئاً عن ماهية هذه الأرقام، بعدها سنجد أنفسنا مع المسألة الهيكلية الآتية:

$$(1) \ (2) \ (3) \ (4) \ (5)$$

$$\underline{\quad} \ 6 \ 2$$

$$\underline{\quad} \ 3 \ 9 \ 4 \ \underline{\quad}$$

$$\underline{\underline{8 \ \underline{\quad} \ 7}}$$

$$\underline{\underline{- \ 3 \ 3 \ 12}}$$

اطلب من الطلبة تحليل المسألة وأرشدكم إلى إعادة الإنشاء

العمود الثاني؟. إن السبب الذي يمكن وراء نقل 2 من العمود الثالث هو أن 1 قد نقل، وسيكون كل من الحرفين I، N مساويا للصفر. لقد بقينا الآن مع الأعداد الآتية: 8، 7، 6، 5، 4، 3، 2 بدون تحديد.

$$\begin{array}{r} F \ 9 \ R \ T \ Y \\ T \ 5 \ O \\ \hline T \ 5 \ O \\ S \ 1 \ X \ T \ Y \end{array}$$

في عمود المئات، لدينا $2T + R + 1$ (تم نقل 1 من العمود الرابع)، والذي ينبغي أن يكون مجموعة مساويا أو أكبر من 22، والذي يدل ضمنا على أن R, T ينبغي أن تكونا أكبر من 5. وعليه، ستكون S، F أما 2، 3، أو 4. ولأن يبدو بأن X لا يمكن أن تساوي 3، ومن جهة أخرى لن يكون S، F رقمين متتابعين. إذن X يساوي 2 أو 4، وهو أمر مستحيل إذا كانت T تساوي أو أقل من 7. وعليه ستكون قيمة T تساوي 8، مع R تساوي 7، و X يساوي 4. إذن $S=3$ ، $F=2$ ، وتكون Y 6. وعليه فإن حل المسألة سيكون:

$$\begin{array}{r} 29 \ 7 \ 8 \ 6 \\ 8 \ 5 \ 0 \\ \hline 8 \ 5 \ 0 \\ 31 \ 4 \ 8 \ 6 \end{array}$$

التقييم اللاحق Postassessment

دع الطلبة يعملون على حل مسائل العد الحرفي، الآتية:

الجواب:

4603
99143
103746

1. 4 _ _ 3

$$\begin{array}{r} _ _ 1 \ 4 _ \\ _ _ 3 \ 7 \ 4 \ 6 \end{array}$$

الجواب:

5349
24588
64259
94196

2. 5 _ 4 _ 2

$$\begin{array}{r} _ \ 4 \ 5 _ \ 8 \\ 6 _ \ 2 \ 5 \ 9 \\ 9 \ 4 \ 1 \ 9 \ 6 \end{array}$$

الجواب:

17.465
57.496
74,961

3. T R I E D
D R I V E
R I V E T

سيجعل من الرقم في العمود الثاني مساويا لـ 3، نظرا لأن 2 قد تم نقلها. وعليه سيكون لدينا الحلول المحتملة الآتية:

$$\begin{array}{r} 387 \ 387 \ 387 \ 387 \ 387 \\ 351 \ 361 \ 371 \ 381 \ 391 \\ \hline 562 \text{ أو } 526 \text{ أو } 562 \text{ أو } 562 \text{ أو } 562 \\ 1300 \ 1310 \ 1320 \ 1330 \ 1340 \end{array}$$

من جهة أخرى، إذا قمنا بتحديد قيم الرقم المفقود في الصف الثاني. العمود الثالث، وكما يأتي 4، 3، 2، 1، 0، وسيصبح الرقم في الصف الأول، العمود الأول، 4، نظرا لأن 1 قد تم نقله. وعليه، هناك عشرة حلول مختلفة والتي ستنتج عن وجود رقمين مفقودين في نفس العمود. ينبغي أن يعد الطلبة مسألة مشابهة حيث يكون هناك أكثر من رقمين مفقودين بنفس العمود. لتري ما هي طبيعة الاستنتاج الذي سيتوصلون إليه.

في النوع الثاني من المسألة، حيث يعبر عن جميع الأرقام بحروف (وبذلك يصبح الاسم "العد الحرفي")، ستكون القضية مختلفة تماما عن سابقتها. هنا ستكون مفاتيح اللغز بحاجة إلى تحليل من جميع الجوانب الممكنة للقيم المحددة للحروف. بصورة عامة لا تتوفر قواعد عامة لحل مسائل العد الحرفي. وتظهر الحاجة إلى فهم جيد بمبادئ الحساب، والاستدلال المنطقي. مع توفر قدر كبير من الصبر والأناة.

إن أحد الأمثلة الأنيقة لهذا النوع من مسائل الجمع هي:

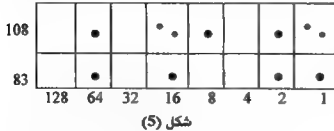
$$\begin{array}{r} (1)(2)(3)(4)(5) \\ F \ O \ R \ T \ Y \\ T \ E \ N \\ \hline T \ E \ N \\ S \ I \ X \ T \ Y \end{array}$$

نظرا لأن كل من الخططين الأول والرابع يحويان TY مكررة. فإن هذا يدل ضمنا على أن مجموع كل من حروف E وحروف N في العمودين الرابع، والخامس ينبغي أن يكون مساويا للصفر. إذا افترضنا $N=0$ ، إذن ستكون E مساوية 5، وينقل 1 إلى العمود الثالث. ويصبح لدينا الآن:

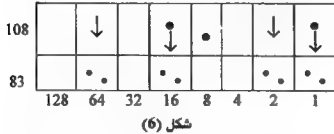
$$\begin{array}{r} F \ O \ R \ T \ Y \\ T \ 5 \ O \\ \hline T \ 5 \ O \\ S \ I \ X \ T \ Y \end{array}$$

ونظرا لوجود فراغين قبل كل TEN، فإن O في FORTY ينبغي أن يكون 9، وينقل 2 من مرتبة المئات (العمود الثالث) ويصبح I مساويا لـ 1. وينقل 1 إلى العمود الأول، فتصبح $F+1=S$. اطرح سؤالا على الطلبة: لماذا نقلت 2 وليس 1 إلى

الثاني لحيث يكون فوق كل قرص بالصف السفلي قرصين أعلى منه، ولا توجد خلية فارغة بالصف السفلي يوجد أعلاها أكثر من قرص عد واحد. يمكن تنفيذ ذلك عن طريق "المضاعفة التنازلية" Doubling Down على الصف الثاني، بإزالة قرص واستبدله بقرصين في الخلية التالية إلى اليمين (شكل 5).



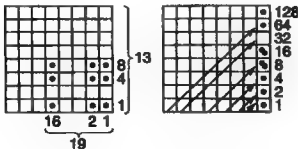
بعد هذا، حدد موقعاً ملكاً، King، لكل قرص في الصف السفلي عن طريق نقل القرص الموجود أعلاه من الخلية التي تقع فوقه مباشرة (شكل 6).



إن الصف العلوي يظهر الآن الفرق بين هذين العددين برموز ثنائية $11001_2 = 25_{10}$.

لا تخلو عملية الضرب من السهولة والبسر الذي لاحظناه آنفاً. كمثال استخدم $13 \times 247 = 3211$. دع الطلبة يؤشرون أحد الأعداد، ولنقل 19، عن طريق التأشير أسفل اللوحة وتحته الأعمدة الملائمة، والعدد الثاني، 13، عن طريق تأشير الصفوف المناسبة. ضع قرصاً على كل تقاطع بين العمود المؤشر والصف المؤشر (شكل A7).

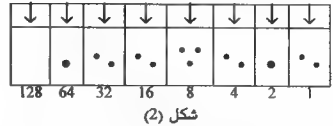
إن كل قرص لا يقع على العمود الأيمن- البعيد سيتم نقله، لاحقاً، بصورة قطرية إلى أعلى وإلى الجهة اليمنى كما هو الحال مع قطعة الفيل Bishop على لوحة الشطرنج (شكل B7).



شكل B 7

تم تحديد مواقع أقراص العد مبتدئين من اليسار، ووضع قرص عد على العمود بالعدد الأكبر، أقل من أو يساوي العدد الذي يعرضه الطالب. ضع أقراص العد التالية على العدد التالي- الأكبر الذي عند إضافته إلى العمود السابق سوف لن يزيد على مجموع المطلوب، وهكذا.

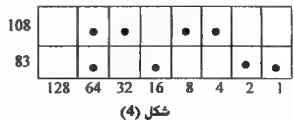
ولفرض الجمع، ادع الطلبة إلى تحريك جميع أقراص العد بصورة مستقيمة إلى أسفل (الشكل 2).



إن إضافة قيم أقراص العد هذه سوف يعطينا المجموع الصحيح، ولكن لفرض استخدام اللوحة في تدوين الرموز الثنائية. ينبغي أن نبدأ أولاً "بالقراءة" صف أقراص العد المتعددة الموجودة على خلية واحدة. دع الطلبة يبدؤون باليمين، ويأخذون كل خلية تباعاً. ارفع كل "زوج" من أقراص العد الموجودة على خلية واستبدلها بقرص عد واحد على الخلية التي تليها من جهة اليسار. حاول أن تطعن الطلبة بأن هذا التغيير لن يؤدي إلى تأثير على المجموع لأن كل قرصين يمتلكان القيمة $2n$. في مثالنا الحالي، ستكون النتيجة عبارة عن العدد الثنائي 11000100_2 (شكل 3).

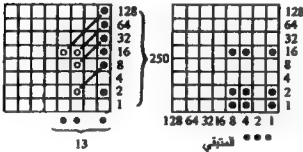


إن عملية الطرح ستكون بسيطة للغاية. افترض بأن الطلبة يرغبون بطرح 83 من 108. دعهم يعرضون الرقم الأكبر على الصف الثاني، والرقم الأصغر على الصف السفلي (شكل 4).



يستطيع الطلبة، الآن، إجراء عملية الطرح بالأسلوب التقليدي، مبتدئين بالجهة اليمنى، مقرضين من خلية إلى خلية، أو بدلاً من ذلك، يستطيع الطلبة تغيير جميع الصف

العمود الأيسر - البعيد. وإذا لم تتوفر فرصة أمام القرص باستمرار، فاطلب من طلبتك إعادته إلى الخلية الأصلية، ومضاعفته تنازلياً، وإعادة المحاولة ثانية. دعهم يستمرون بالعمل على هذه الطريقة، ويمثلون النمط تدريجياً حتى الوصول إلى الحل الوحيد للمسألة (شكل 8B).



شكل 8A

شكل 8B

بعد أن يستقر القرص الأخير في موضعه، ينبغي أن يشد انتباه الطلبة إلى وجود ثلاثة أقراص متبقية. إن هذا يمثل الباقي (3 أو 11_2). وإن قيمة الحافة اليمنى، الآن، هي 1001_2 أو 19_{10} مع بقاء $\frac{3}{13}$.

التقييم اللاحق Postassessment

دع الطلبة يعملون على حل المسائل الآتية باستخدام طريقة لوحة لعبة الداما:

- $27 \cdot 64 =$
- $194 - 63 =$
- $54 + 43 =$
- $361 \div 57 =$

إن إلغاء محتويات العمود بواسطة التنصيف إلى أعلى Halving Up، كما هو الحال في عملية الجمع، ويتم وصف نتيجة الضرب برموز ثنائية 11110111_2 أو 247_{10} ، والتي يستطيع الطلبة التأكد منها.

قد يرغب الطلبة بمعرفة كيفية عمل هذه الطريقة. إن الأقراص الموجودة على الصف الأول حافظت على قيمتها عندما تم تحريكها إلى جهة اليمين، بينما تضاعفت قيمة الأقراص في الصف الثاني، وقد تربععت Quaduple قيم الأقراص في الصف الثالث، وهكذا الأمر مع بقية الأقراص.

إن الطريقة الإجرائية المستخدمة يمكن أن تكون مكافئة للضرب بقوى للأس 2. فيوصف العدد 19 في مثالنا $2^0 + 2^1 + 2^2$ ويوصف العدد 13 بأنه $2^0 + 2^2 + 2^3$. إن ضرب الحدين ثلاثي الحدود Trinomial يعطينا

$$247 = 2^7 + 2^6 + 2 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

فيماثل تحريك أقراص العد بآليته عملية الضرب. ونحن، بالحقبة، "نضرب" القوى عن طريق إضافة "الأس".

وكمثال على عملية القسمة، استخدم $250 \div 13$. إن الطريقة الإجرائية، كما قد يتوقع الطلبة، ستكون معكوسة لعملية الضرب. إن المقسوم عليه، في هذه الحالة 13، تم تأشيرها عند قاعدة اللوحة. والمقسوم بواسطة الأقراص على العمود في أقصى اليمين (شكل 8A). سيتم الآن نقل أقراص المقسوم إلى الأسفل وإلى اليسار، ومرة ثانية مثل فيل الشطرنج، ولكن بالاتجاه المعاكس لاتجاه عملية الضرب. إن هذه الطريقة الإجرائية تنتج نمطاً يحوي على أقراص (واحداً للخلية فقط) في العمود المؤشر، كما أن كل عمود مؤشر ينتهي أن تكون أقراصه على نفس الصف. ويمكن أن ينشأ نمط واحد فحسب من هذا النوع.

ولعمل ذلك، من الضروري إجراء مضاعفة تنازلية على العمود الأيمن، أي قم بإزالة الأقراص الفردية، واستبدل كلا منها بزوج من أقراص العد على الخلية التالية - الأسفل. دع الطلبة يبدؤون مع القرص العلوي ويحركونه بصورة قطرية إلى

5

لعبة Nim

The Game of Nim

إن "سر" الطفر بالفوز هو أمر بسيط للغاية، لكن التمرين والممارسة يلعبان دوراً مهماً في الأداء الذهني الدقيق لفردات اللعبة الحاسوبية. وعليه، ربما يكون من الأسهل المباشرة بعدد قليل من العيدين. أن تقانة الفوز تركز على اختيار حركة معينة بحيث أن خصمك يضطر إلى السحب من "مجموعة زوجية". في البداية، سيكون من الضروري تعلم كيفية التمييز بين المجموعة الزوجية والمنفردة. افترض، على سبيل المثال، بأن عيدين الأسنان قد قسمت إلى ثلاثة ركائز تحوي (14)، (7) و (13) من العيدين.

دع الطلبة يعبرون عن هذه الأعداد برموز ثنائية، وأضاف الأرقام في كل عمود بنفس الأسلوب عند استخدام النظام العشري إذا كان، على الأقل، واحداً من المجاميع الفردية أو الأرقام عددياً فردياً Odd Number. فإن التوزيع يطلق عليه "مجموعة فردية". إن هذا المثال هو مجموعة فردية لأن أحد المجاميع هو عدد فردي.

$$1110 = \text{أربعة عشر}$$

$$111 = \text{سبعة}$$

$$1101 = \text{ثلاثة عشر}$$

$$2322 \text{ (مجموعة فردية)}$$

إذا تم تقسيم العيدين إلى ركائز ب (9)، (13)، و (4) عيدين، فإن كل مجموع على حدة هو عدد زوجي، لذا تعد المجموعة "مجموعة زوجية".

$$1001 = \text{تسعة}$$

$$1101 = \text{ثلاثة عشر}$$

$$100 = \text{أربعة}$$

$$2202 \text{ (مجموعة زوجية)}$$

إذا قام طالب بالسحب من مجموعة زوجية، فإنه ينتهي عليه أن يفاقر مجموعة فردية، لأن اعتماد وصف المجموعة في مقياس ثنائي، سوف يؤدي إلى أن كل سحب ستزيل واحداً على الأقل من أحد الأعداد، وأن مجموع العمود لن يبقى زوجياً بعد ذلك. من جهة أخرى، إذا سحب لاعب من مجموعة فردية، يستطيع أن يترك مجموعة فردية أو زوجية. ويوجد،

ستسهل هذه الوحدة في عرض تطبيق للنظام الثنائي Binary System من خلال ممارسة لعبة بسيطة تدعى Nim.

هدف الأداء Performance Objective

سيمارس الطلبة لعبة Nim باستخدام استراتيجية نظام ترميز ثنائي من أجل الفوز بها.

التقييم المسبق Pre Assessment

ادع الطلبة إلى التعبير عما يأتي برموز ثنائية:

(أ) 14 (ب) 7 (ج) 13

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

رغم أن لعبة Nim قد تمارس للحصول على نقود، يصعب تصنيفها كلعبة قمار، وذلك لأن اللاعب الذي يتقن "سر" اللعبة يستطيع أن يضمن، افتراضياً، فوزه على الدوام. يمكن أن تمارس لعبة Nim بالعيدين Sticks، أو الحصى. أو قطع العملات النقدية، أو أي شيء صغير الحجم. صف اللعبة للطلبة كما تمارس باستخدام عيدين الأسنان Tooth Picks.

ادع الطلبة إلى ترتيب عيدين الأسنان على شكل ثلاثة ركائز Piles (يمكن استخدام أعداد أخرى من الركائز، أيضاً) وبأي عدد من العيدين في كل ركيزة، واختار طالبين ليمارسا اللعبة، وليبدأ اللاعبان بأخذ دورهما في تحريك العيدين. تتألف الحركة الواحدة من سحب/ إبعاد عيدين الأسنان وفق قواعد محددة. إن هذه القواعد هي:

1 في كل حركة يستطيع الطالب أن يزيل عيدين الأسنان من ركيزة واحدة فقط.

2 يستطيع أن يختار، كل لاعب، أي عدد من عيدين الأسنان، شريطة أن يأخذ عود واحدة كحد أدنى، أو جميع عيدين الركيزة في نفس الوقت.

3 إن اللاعب الذي يزيل آخر عمود من عيدين الأسنان سيكون هو الفائز باللعبة.

الثاني، فإنه سيبقى مجبراً على ترك مجموعة زوجية. فمثلاً،
دعه يسحب ثلاثة عيدان من الركيعة الثانية.

$$\begin{array}{r} \text{////} \quad \text{///} \quad \text{///} \\ 101 = \text{خمس} \\ 11 = \text{ثلاثة} \\ \underline{11} = \text{ثلاثة} \\ 123 \quad (\text{مجموعة فردية}) \end{array}$$

في هذه النقطة ينبغي على الطالب الأول أن يسحب العيدان الخمسة، بإجمعهما، من الركيعة الأولى.

$$\begin{array}{r} \text{///} \quad \text{///} \\ 11 = \text{ثلاثة} \\ \underline{11} = \text{ثلاثة} \\ 22 \quad (\text{مجموعة زوجية}) \end{array}$$

والآن، وبغض النظر عما سيختاره الطالب الثاني فإن الطالب الأول سوف يفوز باللعبة!

يستطيع الطلبة، ممارسة اللعبة فيما بينهم، وسيؤدي هذا الأمر إلى تعميق فهمهم وزيادة قدراتهم على التعامل مع نظام التعداد الثنائي. وبعد أن يفتقروا اللعبة بجميع مهارتها المهنية التي تكونوا بعضها منها آنفاً، دهمهم يعكسوا الهدف (أي دع الخاسر يكون اللاعب الذي يجب أن يلتقط عود الأسنان الأخير).

التقييم اللاحق Postassessment

ابدأ لعبة Nim جديدة بين طالب قد احسن تعلم استراتيجياتها ومع طالب لا يحسن سوى قواعدها. استخدم أي من (أو جميع) الخيارات الآتية من ركانز عيدان الأسنان:

- (أ) (17)، (15)، (14)
(ب) (18)، (15)، (4)
(ج) (18)، (15)، (3).

إن الطالب الذي قد تلقّن استراتيجية اللعبة سيفوز على الدوام.

في الواقع، بعض الحركات التي يمكن إجراؤها وستثمر عن أحداث تغيير في المجموعة الفردية باتجاه المجموعة الزوجية. وعليه فإن السحب بطريقة عشوائية من مجموعة فردية سينتج عنه مجموعة فردية إلى حد كبير. حاول أن توضح للطلبة بأن الغاية من اللعبة هي محاولة إجبار الخصم على السحب من مجموعة زوجية، مما يترك لك فرصة نيل مجموعة فردية.

يوجد نوعان من توزيعات الرمح النهائية والتي تمتاز بكونها مجاميع زوجية:

(أ) ركانزتان تحوي كل منهما على عودي أسنان، ويمرّز لها (2)، (2).

(ب) أربعة ركانز تحوي كل منها على عود واحد، ويمرّز لها (1)، (1)، (1)، (1).

إذا استطاع الطالب أن يترك مجموعة زوجية، في كل مرة يمارس دوره باللعبة فسيكون قادراً على إجبار خصمه بالسحب من إحدى المجموعات الزوجية أعلاه، وسيضمن الفوز باللعبة. وإذا كانت بداية قد منحت للطالب مجموعة زوجية سابقة لدوره، فإن الإجراء الأفضل سيكون في سحب عود واحد من الركيعة الأكبر تاركا وراءه مجموعة فردية. وإذا لم يكن الخصم على دراية تامة بسر اللعبة، فإنه سيبدأ بالسحب تاركا وراءه مجموعة فردية وستكون آنذاك قادراً على ضمان الفوز بسهولة.

دع الطلبة يتابعون الحركات في عينة لعبة، وضع عيدان أسنان في ركانز تحوي كل منها (7)، و(6)، و(3) عيدان على التوالي

$$\begin{array}{r} \text{////////} \quad \text{////} \quad \text{///} \\ 111 = \text{سبعة} \\ 110 = \text{ستة} \\ \underline{11} = \text{ثلاثة} \\ 232 \quad (\text{مجموعة فردية}) \end{array}$$

ولتبقى مجموعة زوجية.
ينبغي على الطالب الأول أن يسحب عودين من أية ركيعة.
إن السحب من الركيعة الأولى سينتج عنه:

$$\begin{array}{r} \text{////} \quad \text{////////} \quad \text{///} \\ 101 = \text{خمس} \\ 110 = \text{ستة} \\ \underline{11} = \text{ثلاثة} \\ 222 \quad (\text{مجموعة زوجية}) \end{array}$$

ومهما كانت طبيعة الحركات التي سيقوم بها الطالب

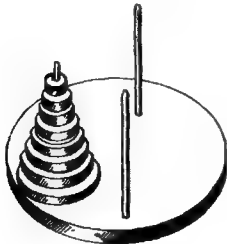
6 برج هانوي

The Tower of Hanoi

الثابتة لدى البراهما، والتي تتطلب من الكاهن المكلف بالخدمة أن لا يزيد على نقل قرص واحد فقط، لكل مرة، وأن يضع القرص على الإبرة بحيث لا يوجد تحته قرص أصغر منه. عندما يتم نقل الـ 64 قرصاً من الإبرة التي وضعها الله فيها عند بدء الخلق إلى الإبر الأخرى، فإن البرج، والمعبود، والبراهمة جميعاً سوف يتقوضون إلى تراب، ومع حصول صمق وعدي سوف يتلاشى العالم بأجمعه.

يمكن للطلبة أن يقوموا بتصنيع اللعبة التي تباع في المحلات التجارية، بسهولة بالغة. اصدر أمراً للطلبة بقطع ثمانية قطع دائرية من مادة الورق المقوى، وبأحجام مختلفة ثم دعمهم بعملون ثقباً ثلاثة في قطعة من الورق المقوى السميك بحيث تكون المسافة بين الثقوب أكبر من نصف القطر الخارجي لأكبر قرص من الأقراص الثمانية. ثم دعمهم يقوموا بلصق قلم رصاص أو وتد إلى أعلى في كل ثقب من الثقوب الثلاثة. وينبغي أن يعمدوا إلى قص ثقب دائري بمركز كل قرص بحيث يكون كافياً لدخول الوتد فيه.

والآن يستطيع الطلبة وضع الأقراص على أحد الأبر، ومرتبين حسب الحجم، بحيث يكون القرص الأكبر عند القاعدة. أن ترتيب الأقراص بهذه الصورة يطلق عليه "البرج Tower"



تزود هذه الوحدة الطلبة بفرصة مناسبة لإنشاء وحل لغز من العصور القديمة باستخدام نظام التعداد الثنائي. يعرف هذا اللغز ببرج هانوي، وقد اخترعه الرياضي الفرنسي ادوارد لوكاس Edward Lucas عام 1883.

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم كل طالب ببناء وحل لغز برج هانوي الخاص به، باستخدام النظام الثنائي، وباستخدام المعرفة اللازمة في هذا الدرس.

التقييم السابق Pre Assessment

قبل البدء بهذا الدرس، ينبغي أن يكون الطالب على معرفة تامة بتحويل الأعداد العشرية إلى أعداد ثنائية. قم بإدارة الامتحان السريع Quiz الآتي مرشداً الطلبة إلى مباشرة تحويل الأعداد التالية (أس 10) إلى الأساس الثنائي:

(أ) 4 (ب) 8 (ج) 60 (د) 125.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ الدرس برواية تاريخ اللغز على طلبة الصف:

روى راوس بول WW. Rouse Ball في كتابه الاستجمامات والاختبارات الرياضية *Mathematically Recreations and Essays* أسطورة ممتعة حول مصدر اللغز الذي يطلق عليه اسم "برج هانوي". ففي المعبد الكبير بمدينة بيناروس Benares، وتحت القبة التي تمثل مركز العالم، تستقر صفيحة من النحاس الأصفر Brass ثبت عليها ثلاثة أبر ماسية، ارتفاع كل منها حوالي ذراع، وسمكها بحجم جسم النحلة. وعندما بدأ الله بعملية الخلق وضع 64 قرصاً ذهبياً بأحجام تصغر تدريجياً على إحدى هذه الأبر الماسية، حيث يستقر أكبر قرص على القاعدة النحاسية. إن هذا البرج هو برج براهما Brahma.

ووفقاً لما ترويه الأسطورة، عمل الكهان ليل نهار على نقل الأقراص من إحدى الأبر الماسية إلى الأخرى وفقاً للقوانين

ادع الطلبة إلى اعتبار البراهمة مع أقراصهم الـ 64 الذهبية، فكم يتطلب منهم من حركات لإكمال المهمة؟ $2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615$ إذا استطاع الكهان إنجاز نقلة واحدة خلال الثانية الواحدة، وبساعة عمل قدرها 24 ساعة يوميا، ولدة 356 يوما بالسنة، فإنهم سيستغرقون أكثر من 580 مليار سنة لإنجاز المهمة الملقاة على عواتقهم الضعيفة؟، مع افتراض عدم اقترافهم لأية هفوة، أو خطأ أثناء عملية التنفيذ. بالمقابل فإن الفترة الزمنية التي يحتاجها الكهان لنقل نصف هذه الأقراص (32 قرصا) ستكون (136 سنة = 4,294,967,296 ثانية) والآن، ادع الطلبة إلى معالجة مسألة نقل ثمانية أقراص، برج هانوي.

اقترح على الطلبة ترقيم الأقراص من 1 إلى 8 في ضوء حجم كل منها، من الصغير إلى الكبير، كذلك دعهم يرقنون الحركات من 1 إلى 255 ($2^8 - 1 = 255$). وسواء كان النشاط مشروعاً صفياً أو مستقلاً، ينبغي عليهم تدوين رقم كل حركة بمقياس ثنائي. وتحديد القرص الذي ينبغي تحريكه في كل نقلة، وتحديد الوضع الذي سيستقر فيه. يمكنهم الرجوع إلى مقياس العد الثنائي الذي يقابل تلك الحركة.

ثم اطلب منهم حساب الأرقام من اليمين ليمين بلوغ الوحدة الرقمية الأولى. إن عدد الأرقام المحسوبة سوف تخبرنا بهوية القرص الذي يجب ن نعد إلى تحريكه. فعلى سبيل المثال، إذا كان أول 1 من الجهة المعنى هو الرقم الثالث، ينبغي أن ينقل القرص الثالث، والآن ينبغي تحديد موضعه. فإذا لم يكن هناك أي رقم على يسار أول 1، ينبغي وضع القرص على الودت الذي لا يوجد قرص عليه. أما إذا كانت هناك أرقام على يسار أول 1، يجب على الطلبة عد الأرقام من اليمين، ثانية، ليمين الوصول إلى ثاني 1. إن عدد الأرقام التي تم حصرها في هذه المرة سيميز القرص الكبير الذي تم نقله آنفاً. كما ينبغي أن يقرر الطلبة سواء كانوا سيمعدون إلى وضع القرص الذي سينقلونه فوق القرص الأكبر أم إلى ووت "فارغ".

لتحديد الاستراتيجية التي سيتمكنونها، ينبغي أن يبدؤوا يعد الأصفار الموجودة بين أول 1 من اليمين، وثاني 1 من اليمين، فإذا لم يكن هناك صفر بينهما، أو إذا كان عدد الأصفار بينهما زوجياً ينبغي أن يضعوا القرص الذي ينقلونه فوق القرص الذي يشير إليه ثاني 1. أما إذا كان عدد الأصفار الموجودة بينهما فردياً، فيجب أن يضعوا القرص على الودت الفارغ. إن الأعداد من 1 إلى 15 قد دونت بالمقياس الثنائي وعرضت هنا سوية مع الإرشادات بأول خمسة عشر نقلة.

إذا أردت أن لا تزج نفسك وتقلتها بمهمة قطع الأقراص، ولصق الإبر على اللوحة، يمكنك أن تصنع مجموعة أكثر بساطة بقطع ثمانية مربعات بأحجام مختلفة، وضعهم على ثلاثة قواعد من الصفيح بدلاً من استخدام الأوتاد وبأي حال من الأحوال كن متيقظاً إزاء القواعد المرعية في هذا اللغز.

في البداية توضع جميع الأقراص على عمود واحد مرتبة حسب حجمها ويكون القرص الأكبر في الأسفل. يتضمن اللغز نقل الأقراص، بمعدل قرص واحد لكل مرة، من هذا العمود إلى عمود آخر بشرط أن لا يستقر القرص على قرص أصغر منه، بأي حال من الأحوال. ينبغي أن يتم هذا الأمر بأقل عدد ممكن من نقلات الأقراص. حاول تذكير الطلبة بالقواعد الأساسية:

1. انقل قرصاً واحداً في كل مرة.
 2. لا تضع قرصاً فوق قرص أصغر منه بأي حال من الأحوال.
- ولكي يعتاد الطلبة على أسلوب ممارسة اللعبة، حاول أن تعرضها أولاً باستخدام ثلاثة أقراص فقط وسيكونون قادرين على نقل برج يتألف من ثلاثة أقراص بواسطة سبعة نقلات. والآن دعهم يجربون استخدام أربعة أقراص بدلاً من ثلاثة. ولعمل هذا سيحتاج الطلبة إلى سبعة حركات لنقل الأقراص الثلاثة العليا إلى الودتين الآخرين. إن هذا الأمر سيحرر القرص الرابع والذي يمكن أن ينقل إلى الودت الشاغر.
- سنحتاج الآن إلى سبعة حركات إضافية لنقل الثلاثة-العليا فوق القرص الرابع. وعليه، فإن مجموع الحركات المطلوبة سيكون 15 مرة.

عندما سيحاول الطلبة ممارسة اللعبة بخمسة أقراص، سيضطرون إلى نقل الأقراص الأربعة-العليا مرتين، الأولى لفرض تحرير القرص السفلي، والثانية لإعادة ترتيبهم على القرص السفلي، بعد نقله إلى موضعه الجديد. وعليه، فإن نقل 5 أقراص يتطلب 31 حركة، و 6 أقراص، 63 حركة. اطرح سؤالاً على الطلبة حول عدد الحركات المطلوبة لنقل 7 أقراص، أو 8 أقراص؟.

وعندما يبدأ الطلبة بتفهم جوانب التحدي التي تخص اللغز، ستظهر أمامهم مسألة رياضية ممتعة: ما هو الحد الأدنى من عدد النقلات المطلوبة لتحريك عدد محدد من الأقراص من عمود إلى آخر؟

لحل هذه المسألة، اقترح على الطلبة استخدام n لوصف عدد الأقراص، والحد الأدنى من عدد النقلات بالصيغة $1 - 2^n$. من أجل ذلك، إذا كان لدينا ثمانية أقراص، فإن الحد الأدنى من عدد لنقلات سيكون $2^8 - 1 = 255$.

- 1011 ضع قرص 1 على قرص 2
1100 ضع قرص 3 على قرص 4
1101 ضع قرص 1 على غير قرص 3
1110 ضع قرص 2 على قرص 3
1111 ضع قرص 1 على قرص 2

- 1 انقل قرص 1
10 انقل قرص 2
11 ضع قرص 1 على قرص 2
100 انقل قرص 3
101 ضع قرص 1 على قرص 3
110 ضع قرص 2 على قرص 3
111 ضع قرص 1 على قرص 2
1000 انقل قرص 4
1001 ضع قرص 1 على قرص 4
1010 ضع قرص 2 على قرص 4

التقييم اللاحق Postassessment

لتقييم تقدم الطلبة، اطلب منهم إكمال الجدول أعلاه، ثم دعهم يعملون على تنفيذ الـ 25 نقلة الأولى على الأنموذج الذي قاموا بإعداده لبرج هانوي.

7

أي يوم كان من الأسبوع ؟

What Day of the Week Was It?

استراتيجية التعليم Teaching Strategy

ابداً الدرس بشرح مختصر حول تاريخ التقويم عبر العصور. وستعمر نفوس الطلبة سعادة غامرة عند معرفة تفاصيل التطور التاريخي للتقويم الغريغوري Gregorian Date، وسيفتحون بمعرفة التغييرات التي مر بها من قبل فأمس بالصيغة التي نراها هذه الأيام.

حاول أن تناقش العلاقة الوثيقة بين التقاويم وعلم الفلك Astronomy، وكيف إن الزمن يمكن أن يقاس، فقط، بملاحظة حركة الأجسام التي تتحرك بدورات ثابتة لا تتغير. وإن الأجسام الوحيدة التي تمتاز بهذا النوع من الحركة هي الأجرام السماوية Celestial Bodies. من أجل هذا فإننا ندين إلى علم الفلك بكونه المورد الذي تؤسس عليه قواعد متينة لحسابات الزمن، بتحديد مدة اليوم، والشهر، والسنة. تعرف السنة بأنها عبارة عن فاصل زمني بين عمليتي مرور الأرض خلال نفس النقطة في مدارها بالنسبة للشمس. وتعرف هذه المدة بالسنة الشمسية Solar Year، والتي تبلغ حوالي 365.242216 يوم شمسي. إن مدة السنة لا تتناسب مع طول اليوم، وسيظل تاريخ التقاويم عبارة عن سجل تاريخي للمحاولات المستمرة لتعديل هذه الوحدات-غير المتكافئة، بطريقة ما، بحيث يمكن الحصول على نظام بسيط وعملي. يرجع التقويم في أصوله إلى رومولوس Romulus المؤسس

يمكن استخدام هذا الموضوع للإثراء بروح استجمامية، إضافة إلى كونه تطبيق مهم ونافع في مادة الرياضيات. وسيستمتع الطلبة، أيضاً، بمعاملة العلاقات بين الفلك والmod7. يضاف إلى ذلك، سيمسب الطلبة بهشة بالغة عندما سيعانون كثرة العوامل التي ينبغي اعتبارها في هذه المسألة والتي تبدو بسيطة جداً للوهلة الأولى!

أهداف الأداء Performance Objectives

1. عند إعطاء أي تاريخ، سيقوم الطلبة بتحديد اليوم الذي يوافق من أيام الأسبوع.
2. عند إعطاء أي سنة، سيقوم الطلبة بتحديد تاريخ عيد الفصح في تلك السنة.

التقييم السابق Pre Assessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة جيدة بنسق التقويم ومكوناته. قم بإعطاء تاريخ ما في هذه السنة للطلبة، واطلب منهم بيان اليوم الذي يوافق هذا التاريخ. وبعد أن يحاول الطلبة حل هذه المسألة، اطلب منهم إجراء حساباتهم لتحديد يوم ما في سنين سابقة. وسيكون الطلبة مثلهذين لتطوير طريقة سريعة وديقة لإنجاز مثل هذه المهام التقييمية.

والتي تم الحصول عليها من روزنامة Almanac ريتشارد ساوندرز Richard Saunders والتي تم طباعتها في لندن (شكل A).

1752 September 1st 22X Days this Year									
First Quarter, the 12th day at 3 o'clock Full Moon, the 19th day at 1 o'clock Last Quarter, the 27th day at 1 o'clock									
M	D	Days from 1st	Days from 1st	Days from 1st	Days from 1st	Days from 1st	Days from 1st	Days from 1st	Days from 1st
1	f	Day 1st	3 3	3 A	29 A	29 A	1	1	1
2	g	London bus.	4 26	9 11	5 38				
As taking in an act of Parliament passed in the 14th year of his Majesty's reign and in the year of our Lord 1752, the Old Style ceases here and the New takes its place; and consequently the next Day, which in the old account would have been the 1st of Nov. is now to be called the 1st, so that all the astronomical events day from the 1st to the 14th are omitted or rather numbered the 1st Year and the Month contains no more than 19 days, as the table at the head expresses.									
M	D	Days from 1st	Days from 1st	Days from 1st	Days from 1st	Days from 1st	Days from 1st	Days from 1st	Days from 1st
14	f	Clock 10. 5 m.	5 15	9 47	6 27				
15	g	Day 12 h 30 m	6 3	10 31	7 18				
16	g		6 57	11 23	8 16				
17	A	15 S. ART. TIDE.	7 17	12 19	9 7				
18	b		8 26	13 10	10 22				
19	c	Mid. V. Mary	9 12	1 22	11 21				
20	d	Emma WISE	10 29	2 24	12 20				
21	e	St MATTHEW	11 43	3 37	1 17				
22	f	Midnight	12 28	4 10	2 16				
23	g	EQUAL D. & N.	1 16	5 13	3 12				
24	A	16 S. ART. TIDE.	2 16	6 37	4 29				
25	b		3 5	7 39	5 14				
26	c	Day 11 h 52 m	4 57	8 39	6 48				
27	d	Emma WISE	5 56	9 18	7 53				
28	e	Lambert bp.	6 47	10 3	8 56				
29	f	St MICHAEL	7 44	10 59	9 55				
30	g		8 43	11 2	10 58				

شكل A

لقد اسهم الرياضيون في إيمان الفطر والتفكير بمعضلة التقويم، وحاولت اقتراح وتطوير طرائق لتحديد الأيام الخاصة بأي تاريخ أو عطلة. ولتطوير طريقة لاحتساب اليوم، ينبغي أن يدرك الطلبة بأن السنة التقويمية (باستثناء السنة الكبيسة) تتألف من 52 أسبوع ويوم واحد وإذا حل يوم سنة جديدة، في سنة من السنين، وبعد سنة كبيسة، وكان هذا اليوم هو يوم الأحد، فإن السنة القادمة سوف تبدئ يوم الاثنين، ثم ستبدئ السنة التي تليها بيوم الثلاثاء. أما السنة الكبيسة فسوف يكون يومها الأول هو يوم الأربعاء. ونظرا لأن السنة كبيسة تحوي على 366 يوما، فإن اليوم الأول من السنة التي تليها سيكون يوم الجمعة، ولن يوافق يوم الخميس كما يظن البعض، إن التعاقب التقليدي سوف يعاني من إعاقة كل أربعة سنوات (باستثناء السنين التي تقبل القسمة على 100 وغير قابلة للقسمة على 400).

في البداية، حاول أن تختبر طريقة لإيجاد أول يوم من أيام الأسبوع Weekday لتواريخ محددة في سنة بذاتها. افترض بأن 4 فبراير يوافق يوم الاثنين، ففي أي يوم من الأيام الأسبوع سيوافق يوم 15 سبتمبر؟ بافتراض إن السنة التقويمية، تلك، ليست سنة كبيسة، فإننا سنكون بحاجة، فقط، إلى:

الأسطوري لمدينة روما Roma، والذي اقترح عاما يتألف من 300 يوم تتوزع على 10 أشهر. وقد جاء بعده نوما Numa فأضاف شهرين إضافيين إلى السنة التي ابتدعها رومولوس. وقد استخدم هذا التقويم خلال ستة قرون ونصف تلت بدايات اختراعه، ولحين جاء يوليوس قيصر Julius Caesar فطرح على الملأ التقويم اليولياني Julian Calendar. إذا كانت السنة الواقعة عبارة عن 365.35 يوما، فإن إضافة يوم واحد، مرة واحدة، إلى 365 يوما كل أربع سنوات، سوف يحيل السنة الرابعة إلى سنة كبيسة Leap Year، ويؤدي إلى احتواء الاختلاف.

انتشر التقويم اليولياني مع بقية الخصائص الأخرى للحضارة الرومانية على رقعة واسعة من بلدان المعمورة وبقي سائد الاستخدام لحين عام 1582.

إن الصعوبة التي تعاني منها حسابات هذه الطريقة تكمن في الخلاف القائم بين القيمة المقترضة 365.25 وعدم مساواتها للقيمة الحقيقية 365.242216 ورغم أن هذا الاختلاف قد يعد قيمة غير معنوية، بيد أن مرور مئات السنين سينجم عنه تراكم ملحوظ للفروقات سوف تنعكس بعدد ملحوظ من الأيام. كانت السنة اليوليانية طويلة إلى حد كبير، ويحدث عند حلول عام 1582 بلغت الأخطاء التقويمية لهذه السنة 10 أيام.

حاول البابا جريجوري الثاني عشر Pope Gregory XII إيجاد طريقة لاحتواء الأخطاء الموجودة في التقويم. ونظرا لحصول الاعتدال الربيعي Vernal Equinox في 11 آذار عام 1582 فقد اصدر أمرا بطمس عشرة أيام من التقويم، في تلك السنة، بحيث يقع الاعتدال الربيعي في يوم 21 آذار وكما ينبغي له أن يكون. وعندما أعلن عن الإصلاحات والقديسات الجديدة على التقويم، هرع إلى صياغة القواعد التي تخص السنوات الكبيسة. يضم التقويم الجريجوري سنوات (تم احتسابها على أساس أنها تتألف من حوالي 365.245 يوما) قابلة للقسمة على 4 بالنسبة للسنوات الكبيسة، ما لم تكن قابلة للقسمة على 100 ودون 400. وعليه فإن السنوات: 1700، 1800، 1900، 2100، ... ليست سنوات كبيسة،

لكن سنة 2000 هي كبيسة في ضوء هذه القاعدة.

لم يعتمد تغيير التقويم من الأسلوب اليولياني إلى الأسلوب الجريجوري في بريطانيا ومستعمراتها لغاية عام 1752. وفي شهر سبتمبر من تلك السنة تم حذف 11 يوما من السنة، وأضحى يوم 2 سبتمبر يوم 14 سبتمبر. إن من الممتع القيام بإلقاء نظرة على نسخة من تقويم شهر سبتمبر لعام 1752

من السنة 1 ثم مباشرة إجراء تعديلات بالنسبة للسنوات الكبيسة.

يمكن تحديد اليوم الذي وافق يوم 1 يناير كانون الثاني من السنة 1 وفق ما يأتي.

بما أن يوم 1 يناير، عام 1952 كان يوافق يوم الأربعاء، وعلى أساس قيمة السنة الشمسية، فإن عدد الأيام منذ 1 يناير هي $712588.1175 = 365.2425 \times 1951$. ينقسم العدد على 7، نحصل على 101.798 مع المتبقي 2. إن العدد المتبقي يؤثر إلى ضرورة حساب يومين من يوم الأربعاء. ونظرا لكون الحسابات تعود إلى فترة ماضية، يجب أن تمارس عملية العد بأسلوب ارتجاعي Backward، وتشير إلى أن 1 يناير (في التقويم الجريجوري) يقع يوم الاثنين.

إن إحدى الطرف المستخدمة في تحديد يوم بأي سنة من السنين يقترح معالجة توارخ كل قرن بمفردها. إن معرفة أي يوم من أيام الأسبوع لأول يوم من تلك الفترة، نستطيع أن نحدد، بنفس الأسلوب المعتمد سابقا، الأيام الإضافية بعد ذلك اليوم من أيام الأسبوع (وعليه فإن اليوم من أيام الأسبوع سيقع في ذلك القرن). بالنسبة للسنوات 1900-1999، فإن المعلومات المطلوبة هي:

1. معاملات الأعداد للأشهر (راجع المناقشة السابقة).
2. يوم 1 يناير لعام 1900 وافق يوم الاثنين.
3. عدد سنوات (يعطاه عدد الأيام التي تزيد على دورة 52 أسبوعا) التي انقضت منذ أول يوم من أيام عام 1900.
4. عدد السنوات الكبيسة (بمعنى آخر، الأيام الإضافية) التي حصلت منذ بداية القرن. وبمعرفة ذلك نستطيع تحديد عدد الأيام في دورة أسبوع يوم الاثنين التي نريد احتسابها.

أمثلة Examples

1. يوم 9 مايو عام 1914. أضف 9 (أيام إلى الشهر) وأ (معامل العدد للشهر)، و 14 (عدد السنين منذ بداية القرن) وأخيرا 3 (عند السنوات الكبيسة في ذلك القرن لغاية تاريخه) $27 = 3 + 14 + 9$ ، يقسم الناتج على 7، ويتبقى 6 فيكون اليوم = السبت.
 2. يوم 16 أغسطس عام 1937. أضف $64 = 9 + 37 + 2$ نجد تقسيم الناتج على 7، سيبقى 1، أي يوم الاثنين.
- للفترة 1800-1899، يمكن اتباع نفس الطريقة باستثناء كون يوم 1 يناير الثاني لعام 1800 هو الأربعاء. ويمكن اعتماد نفس الطريقة للفترة الممتدة بين 14 سبتمبر 1752 ولغاية

(1) إيجاد عدد الأيام بين 4 شباط و 15 سبتمبر.
في البداية سنكتشف بأن 4 شباط هو اليوم الخامس والثلاثين من السنة وإن 15 سبتمبر هو اليوم الثامن والخمسون بعد المائتين من نفس السنة. (إن استخدام الجدول في شكل "B" سوف يجعل من عملية الحساب هذه سهلة للغاية). إن الفرق بين 258 و 35 يعطى عدد الأيام، والبالغة 223 يوما.
(2) نظرا لوجود سبعة أيام في الأسبوع، قم بقسم 223 على 7 $31 = 223/7 + \text{المتبقي} = 6$. (3) إن العدد 6 يظهر بأن اليوم الذي سيقابل يوم 15 سبتمبر يوم السادس بعد الاثنين أي يوم الأحد. وفي حالة السنة الكبيسة ينبغي أن يضاف يوم واحد بعد يوم 28 شباط لكي يصبح عدد أيام الشهر 29 يوما.
وستناقش في السطور القادمة طريقة مماثلة لتحديد أول يوم من أيام الأسبوع في سنة بذاتها. إن كون عدد أيام يناير 31 يوما، فإن نفس التاريخ في الشهر التالي سيكون بعد 3 أيام من ذاك اليوم في شهر يناير، كذلك فإن نفس التاريخ في مارس سيكون أيضا بعد 3 أيام من ذاك اليوم في شهر يناير، وفي إبريل سيكون بعد 6 أيام من أيام شهر يناير. نستطيع بعد هذا أن ننشئ جدولا لمعاملات الأعداد Index Number بالنسبة للأشهر والتي ستعدل جميع التواريخ إلى التاريخ المقابل في شهر يناير.

يناير	0	إبريل	6	يوليو	6	أكتوبر	0
فبراير	3	مايو	1	أغسطس	2	نوفمبر	3
مارس	3	يوليو	4	سبتمبر	5	ديسمبر	5

(إن معاملات الأعداد تزودك، في الحقيقة، بعدد الأيام بين الأشهر مقسومة على العدد 7 للحصول على الأيام المضافة بنفس الطريقة السابقة).

والآن لم تعد بحاجة إلا إلى إضافة اليوم إلى معامل العدد الخاص بالشهر، وستظهر عملية التقسيم على 7 والمتبقي عنها إلى يوم الأسبوع).

مثال: تأمل عام 1925، حيث وافق 1 يناير يوم الخميس. جد يوم 12 مارس.

لإنجاز هذه المهمة، أضف $15 = 3 + 12$ ، وقسم $15/7 = 2$ والباقي 1. وهذا يظهر بأن اليوم المذكور سيقابل يوم الخميس. في السنوات الكبيسة سيضاف 1 يوم إضافي للتواريخ بعد 29 فبراير.

سيرغب الطلبة، الآن، بإيجاد اليوم الذي يوافق تاريخا محددا في سنة من السنين. حاول أن تتب الطلبة بأنهم سيكونون بحاجة إلى معرفة ما هو اليوم الذي وافق يوم 1 يناير

إلى هذا العدد عدد الأيام التي انقضت منذ 1 يناير للسنة قيد الدراسة. إن هذا المجموع ينبغي أن يقسم على 7، وسيظهر المتبقي عدد الأيام التي ينبغي إحصاؤها لذلك الأسبوع، لذا فإن الصيغة ستكون، 1 (اللاتنين) + المتبقي من القسمة على 7 (عدد السنين التي انقضت سابقاً + عدد الأيام التي انقضت منذ 1 يناير للسنة المطلوبة + عدد السنوات الكبيسة التي مرت منذ السنة 1) = عدد أيام الأسبوع. ينبغي أن تأخذ حسابات السنوات التي تنتهي بصفرين، والتي لا تقبل القسمة على 400، وهي سنوات غير كبيسة. وعليه، يمكن طرح عدد محدد من السنوات الكبيسة من العدد الكلي لهذه السنوات.

1799 باستثناء إن اليوم الأول من تلك الفترة سيكون يوم الجمعة. والفترة التي تلحقها ويضمها 2 سبتمبر 1752، يمكن استخدام نفس الطريقة الإجرائية باستثناء إن السنة بكاملها سوف تضاف وأن عدد الأيام سوف يبتدئ بيوم الجمعة.

مثال Example

يوم 13 مايو عام 1240. أنصف: $13+1+1240+10=1264$. أنصف: 4، اليوم هو الاثنين. هناك طريقة أخرى لتحديد اليوم دون الحاجة إلى اعتبار فترات متفرقة. سنبتدئ، ثانية، بمعرفة يوم 1 يناير من السنة 1. وستقوم بعد الأيام الفعلية التي انقضت منذ 1 يناير، ولكن باحتساب عدد الأيام الزائدة على الأسابيع المنقضية، وأضيف

التاريخ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
يناير	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
فبراير	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
مارس	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
أبريل	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106
مايو	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136
يونيو	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167
يوليو	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197
أغسطس	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228
سبتمبر	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259
أكتوبر	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289
نوفمبر	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
ديسمبر	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350

جدول (B)

التاريخ	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
يناير	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
فبراير	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59			
مارس	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
أبريل	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	
مايو	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151
يونيو	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	
يوليو	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212
أغسطس	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243
سبتمبر	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	
أكتوبر	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304
نوفمبر	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	
ديسمبر	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365

تابع جدول (B)

	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212
يوليو	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243
أغسطس	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	
سبتمبر	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304
أكتوبر	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	
نوفمبر	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365
ديسمبر															

تابع جدول (B)

المناسب على المقياس المدرج الثالث. قم بتأشير نقطة

تقاطع هذا المستقيم مع المقياس المدرج الثاني.

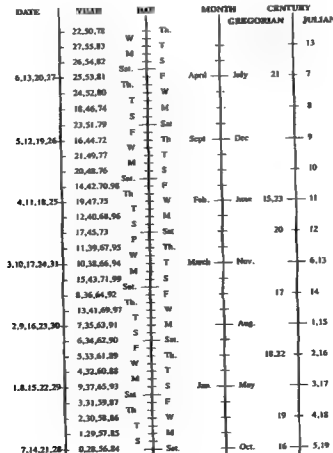
2. قم بوصول نقطة التقاطع على المقياس المدرج الثاني مع النقطة الواقعة على المقياس المدرج الرابع والتي تبين القرن الصحيح. قم بتأشير تقاطع هذا المستقيم مع المقياس المدرج الثالث.

3. قم بوصول هذه النقطة مع النقطة التي تبين السنة المناسبة على المقياس المدرج الأول. إن نقطة التقاطع مع المقياس المدرج الثاني سوف تظهر اليوم المطلوب من الأسبوع. (ملاحظة: بالنسبة لأشهر يناير وفبراير استخدم السنة مطروحا منها 1).

مثال Example

يوم 25 ديسمبر، عام 1954. $1953 + 488 = 1954$ (سنوات الكبيسة) - 15 (سنوات القرن كبيسة 4-19) + 358 (عدد الأيام بين 1 يناير 1954 و 25 ديسمبر 1954) = 2785. بتقسيم الناتج على 7 سيكون الباقي 6. وعليه سيقع يوم 25 ديسمبر عام 1954 في اليوم السادس من الأسبوع، السبت. لقد اقترحت كثير من الجداول والآليات لحل مسألة تحديد الأيام. ويظهر أدناه شكل رسومي اخترع لهذا الغرض. يتألف الأول (شكل C) من أربعة مقاييس مدرجة Scales ويمكن استخدامه كما يأتي:

1. باستخدام مسطرة عدلة، قم بوصول النقطة الواقعة على المقياس المدرج الأول والتي تبين التاريخ، مع الشهر

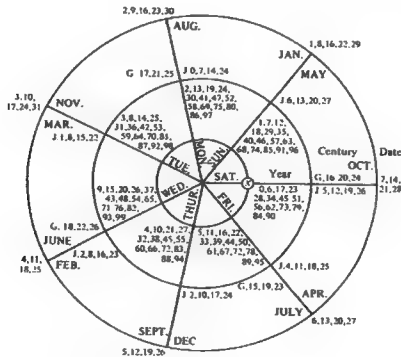


شكل C تقويم سردي

القطر باتجاه الحلقة الداخلية، ثم حدد السنة. (إذا كان الشهر يناير أو فبراير استخدم السنة السابقة). ارمس مستقيماً بين هاتين النقطتين اللتان تقعان على الحلقة الداخلية. (إذا تطابقت على يوم السبت، سيكون يوم الأحد هو يوم الأسبوع المطلوب). (4) والآن جد النقطة حيث يقطع نصف قطر يوم السبت الحلقة الداخلية، ومن نقطة السبت هذه ارمس خطاً موازياً للخط المرسوم آنفاً. سيلتقي المستقيم المرسوم مع الحلقة الداخلية في أحد تقاطعات نصف القطر مع الحلقة. أن يوم الأسبوع على نصف القطر الأخير يمثل يوم الأسبوع الخاص بالتاريخ الذي ابتدأنا حساباتنا معه.

يتألف الترتيب الثاني (انظر شكل D) من ثلاثة حلقات متحدة المركز Concentric يقطعها سبعة أشعة Radii. تتألف طريقة العمل من:

- (1) حدد التاريخ والشهر على الحلقة الخارجية، وإذا كانت نقطتان، ارمس خطاً مستقيماً بينهما، وإذا كانتا متطابقتان ارمس مماساً لهما.
- (2) حدد القرن على الحلقة الوسيطة. ارمس من هذه النقطة مستقيماً يوازي المستقيم الذي رسم في الخطوة السابقة، لحيث يقطع الحلقة الوسيطة في نقطة أخرى. إن النقطة التي سنحصل عليها هي نقطة تقاطع نصف القطر مع الحلقة.
- (3) من النقطة التي حددتها قبل قليل، اتهم مسار نصف



شكل (D) : تقويم سرودي، من نوع حلقة نصف قطرية

وقد ارتكزت إلى المنهج الذي اعتمدته كاوس:

1. جد المتبقي عندما تقسم السنة على 4، وليكن هذا الرقم مساوياً لـ a.
2. جد للمتبقّي عندما تقسم السنة على 7، وليكن هذا الرقم مساوياً لـ b.
3. جد المتبقّي عندما تقسم السنة على 19، واضرب قيمة المتبقّي بـ 19، وأضف 24، وقم بإيجاد المتبقّي ثانية عندما تقسم المجموع على 30. وليكن هذا الرقم مساوياً لـ c.
4. اجمع الحدود الآتية: $2a+4b+6c+3$ ثم اقسّم المجموع على 7 وأطلق على المتبقّي الرمز d.

إن مسألة التقويم الأبدي Perpetual Calendar قد استوعبت جل اهتمام مجموعة من علماء الرياضيات، وقد أولى هؤلاء العلماء اهتماماً خاصاً بحساب تاريخ عيد الفصح يوم الأحد. تقع أيام عيد معظم الكنائس في تاريخ محدد، وإن القاعدة الكنسية (الكليريكية) التي تخص عيد الفصح هي بالواقع بالغة التعقيد. فينبغي أن يقع عيد الفصح في يوم أحد بعد اكتمال القمر الذي يحصل بعد الاعتدال الربيعي. وعليه فإن يوم أحد الفصح هو عيد ديني متنقل والذي قد يقع مبكراً في 22 مارس أو يتأخر لغاية 25 إبريل. تستخدم الطريقة الآتية لتحديد أحد الفصح في أي سنة من السنين من 1900-1999

التقييم اللاحق Postassessment

1. ادع الطلبة إلى تحديد يوم الأسبوع الذي يوافق يوم ميلادهم.
 2. ادع الطلبة إلى العمل على مجموعة التواريخ الآتية:
12 أكتوبر 1492 30 مايو 1920 عيد الميلاد 1978
1 إبريل 1945 21 أكتوبر 1805 14 أغسطس 1898
4 تموز 1776
 3. ادع الطلبة إلى إيجاد تواريخ مجموعة من أيام أحد الفصح للسنوات: 1929، 1977، 1930، 1978، 1950، 1969، 1944.
- ولد جورج واشنطن في 11 فبراير عام 1732، لماذا نحتفل بيوم مولده في 22 فبراير؟

- إن حاصل جمع $d+c$ سوف يعطينا عدد الأيام بعد 22 مارس والتي سيقع فيها يوم أحد الفصح.
- مثال: عيد الفصح عام 1921
- (1). $21/4$ المتبقي 1.
 - (2). $21/7$ المتبقي صفر.
 - (3). $21/9$ المتبقي 2، $24/30$ المتبقي 2، $19/2$ المتبقي 2.
 - (4). $21/7$ المتبقي 3، $12/3$ المتبقي 0، $2/0$ المتبقي 2.
- $2+3=5$ بعد يوم 22 مارس = 27 مارس.
- إن الطريقة أعلاه تحدد التاريخ بدقة باستثناء السنتين 1954 و 1981. لأن هاتين السنتين تعطيان التاريخ متأخرا بمقدار 1 أسبوع بالضبط، ويكون عيد الفصح 18 و 19 إبريل على التوالي).

الأعداد المشكّبة

8

Palindromic Numbers

خصوصيتها Pecularity (يمكن قراءتها بالاتجاهين، إلى أمام، وإلى خلف). وضح للطلبة بأن مثل هذه العبارات يطلق عليها شكّبة Palindrome، وتشمل في حقل الرياضيات الأعداد التي تمتاز بنفس الخصائص، مثل، 343، 59695. ويطلق عليها الأعداد المشكّبة Palindromic Numbers. يمكن أن يكلف الطلبة بإعطاء أمثلة مختلفة عن هذه الأرقام مع أعداد قائمة قصيرة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد أن يكمل الطلبة إعداد قوائم الأعداد المشكّبة، يمكن مباشرة عملية تحليل لهذه العبارة. كما ويمكن أن تطرح هذه الأسئلة عليهم لإدارة حلقة النقاش: هل يحتوي العدد المشكّبة على عدد فردي أو مركب من الأرقام، أم كلاهما؟ هل سيكون مربع أو مكعب الأعداد المشكّبة مشكّبا أيضاً؟ إذا أعطيت عددا صحيحا موجبا هل يمكن أن تنشئ عددا مشكّبا نتيجة إجراء جملة عمليات على هذا العدد الصحيح؟

تهدف هذه الوحدة إلى تعريف الوحدات المشكّبة Palindromic Numbers وبيان جملة من خصائصها. تناسب دراسة هذه الأعداد أي صف من الصفوف الثانوية، كما أنها تزود جميع الطلبة بمنهج لتحليل الإعداد والعلاقات القائمة بينها. ويمكن اختيار مفردات محددة من هذا الموضوع للطلبة الذي يعانون من بطئ في الفهم (على سبيل المثال، خاصية الإضافة المعكوسة)، كما ويمكن تحري خصائصها المتقدمة بواسطة الطلبة النابهين والمتفوقين (على سبيل المثال، الشكّبة المدلة Modular Palindromic).

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيحاول الطلبة بيان وتحليل خصائص الأرقام المشكّبة.
2. سيقوم الطلبة بإنشاء مشكّبة جديدة من أي عدد صحيح.

التقييم السابق Pre Assessment

دع الطلبة يمارسون عملية تحليل العبارة "Madam I'm Adam" والكلمات "Rotator"، و "Reviver" مع بيان

3- بصورة عامة، فإن الأعداد التي تنتج مكعبات مشقلمية (بصورة أولية والبعض الآخر مركبة) هي أعداد مشقلمية بذاتها. الأعداد N التي تنتج مكعبات مشقلمية هي كما يأتي:

$$1- N=1, 7, 11 \quad (1^3=1, 7^3=343, 11^3=1331)$$

ب- $N=10^k+1$ تمتلك مكعباً مشقلمياً يتألف من $k-1$ من الأصفر، بين كل أزواج متعاقبة من 1، 3، 3، 1: مثال عندما $k=1$ ، $N=11$ ، $N^3=1331$ ، عندما $k=2$ ، $N=101$ و $N^3=1030301$ ، عندما $k=3$ ، $N=1001$ ، $N^3=1003003001$ ، الخ....

لاحظ بأنه عندما تكون $k=2m+1$ ، $m>0$ ، فإن N تقبل القسمة على 11 وبالتالي ستكون مركبة.

ج- تتألف N من مجموعات من 31 وأي عدد آخر (والذي ينبغي أن يكون زوجياً) من الأصفر تقبل القسمة على 3 وتمتلك مكعباً مشقلمياً: مثال: $(111)^3=1367631$ ، $(10101)^3=1030607060301$.

د- N = أي عدد مشقلم من الأصفر وأربعة وأحادات (four 1's) هي ليست عدداً أولياً وتمتلك مكعباً مشقلمياً، باستثناء عندما يظهر نفس العدد من الأصفر في ثلاثة فراغات بين الواحدات، مثال:

$$(11011)^3 = 1334996994331, (10100101)^3 = 10030330913909319033033001$$

في حين أن $(1010101)^3$ لا ينتج عدداً مشقلمياً.

إن العدد الوحيد بصيغة $N < 2.8 \times 10^{14}$ وهو عدد غير مشقلم، ورغم ذلك ينتج مكعباً مشقلمياً هو $2201^3 = 10662526601$.

4- إذا أعطيت أي عدد صحيح N تستطيع غالباً الوصول إلى أي عدد مشقلم بإضافته إلى مقلوبه (العدد الذي تحصل عليه بقلب جميع أرقامه) والاستمرار بعملية الإضافة لحين الحصول على المشقلم. على سبيل المثال، إذا كان $N=798$ ، إذن $798+7656=8454$ ، $8454+1695=10149$ ، $10149+5961=16110$ ، $16110+2421=18531$ ، $18531+2201=20732$ ، $20732+4646=25378$ (مشقلم).

في حين أن بعض الأعداد يمكن أن تصل إلى المشقلم بخطوتين فقط (مثال، 75، 48)، فهناك أعداد أخرى يمكن أن تصل إلى المشقلم بعد ستة خطوات مثل 97، وهناك أعداد لا يمكن أن تصل إلى المشقلم مثل (89، 98) إلا بعد 24 خطوة. وقد عثر على بعض الأعداد مثل 196 لا يمكن أن تصل إلى إنتاج عدد مشقلم رغم تطبيق أكثر من 1000 خطوة من خطوات هذه القاعدة، الأمر الذي يؤكد عدم إطلاق صحة هذه

سحاوول الطلبة الإجابة على هذه الأسئلة عبر تخصص صلاحية الإجابات على الأعداد الشاحصة في قوائمهم، أو عن طريق محاولة توليد أرقام مشقلمية جديدة. في هذه المرحلة سيصبح الطلبة مهيين لدراسة الخصائص المشقلمية الآتية:

1- تحتوي الأعداد المشقلمية على أعداد أولية، وأعداد مركبة (على سبيل المثال، 181 هو مشقلم أولي، بينما 575 هو مشقلم مركب). بصورة عامة ينبغي أن يكون العدد المشقلم الأولي من عدد فردي من الأرقام، باستثناء العدد 11.

البرهنة على الأخير: (بأسلوب التناقض Contradiction): دع P تمثل مشقلمياً أولياً يتألف من عدد زوجي من الأرقام. افترض r تساوي مجموع جميع الأرقام في المواقع الزوجية للعدد الأولي P ، و s تساوي مجموع جميع الأرقام في المواقع الفردية للعدد P . نظراً لأن P هو مشقلم يتألف من أعداد زوجية فإن المواقع الفردية ستكون ضعف الأرقام في المواقع الزوجية، وعليه $s-r=0$. لكن اختبار قابلية القسمة على 11 يؤثر بأن العدد يكون قابلاً للقسمة على 11 إذا كان الفرق بين مجموع الأرقام في المواقع الزوجية ومجموع الأرقام في المواقع الفردية يساوي صفراً، أو إحدى مضاعفات 11. وعليه، فإن P تمتلك 11 كعامل، ولا يمكن أن تكون عدداً أولياً وهو تناقض.

2- جميع الأعداد الصحيحة N التي ينتج عنها مربعات مشقلمية ليس من الضرورة أن تكون مشقلميات. بينما يوجد عدد لا نهائي من المشقلميات التي تنتج مربعات مشقلمية (على سبيل المثال، $484=22^2$ ، $44944=212^2$)، وتوجد بعض الأعداد الصحيحة غير المشقلمية التي تكون مربعاتها مشقلمية (على سبيل المثال، $676=26^2$ ، $698896=836^2$) بالإضافة إلى وجود بعض الأعداد الصحيحة - المشقلمية التي تنتج مربعات غير مشقلمية (على سبيل المثال، $17161=131^2$ ، $53824=232^2$).

إن الأعداد الواحدية Repunits، والتي تتألف بصورة كلية من العدد 1 (ويرمز له بالرمز R_k ، حيث تمثل k عدد الواحدات). تكون أعداد مشقلمية وتنتج مربعات مشقلمية عندما $R_2^2=121$ ، $R_3^2=12321$ ، $R_9^2=12...k...21$ ، حيث $k=9$.

من ناحية ثانية، عندما $k > 9$ فإن المحمول في الإضافة سوف يفقد حاصل الضرب المشقلم (مثال، $12...6790098...21$).

لقد وجد أن الأعداد المربعة غنية بشكل كبير في المشقلمية من الأعداد الصحيحة العشوائية.

15، 16، 17، أو 18 فإن العدد المقلب سوف ينتج بعد:
1، 2، 3، 4، 6، 24، 1 على التوالي. يمكن أن يكلف
الطلبة بإجراء تحليل لهذا النوع مع إدراج نتائجهم على
شكل جدول.

يمكن لموضوع الأعداد المقلبة أن ينال مزيداً من الدراسة
والاستقصاء بواسطة الطلبة النابهين. وستعالج التحريات
الإضافية مساحات أخرى تشمل: الأصناف المتعددة للأعداد
المقلبة مثل العناصر، الأعداد الأولية للمقلبات المتخصصة.
مثل الأعداد الأولية بأرقام أولية كعناصر، الأعداد المقلبة،
الأعداد المثلثة والأعداد الخمسة والتي هي أيضاً مشقولة.

التقييم اللاحق Post Assessment

1- هل تنتج الأعداد التالية مشقولات مكعبة :

أ- 1001001.

ب- 1001001001.

ج- 10100101.

د- 100101.

2- إذا كان لديك العدد الآتي والذي يتألف من رقمين، بين
عدد الخطوات المطلوبة من الإضافة العكسية للوصول إلى

عدد مشقلب:

أ- 56.

ب- 26.

ج- 91.

د- 96.

3- باشر تقانة الإضافة العكسية على الأعداد الصحيحة الآتية،
وجد أعداد صحيحة أخرى التي تنتج نفس المقلب الذي
ينتج عنها:

أ- 174.

ب- 8699.

القاعدة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة، ولكن على مجموعة
كبيرة منها لأن تكرار مثل الحالات السابقة يكاد يكون قليلاً
جداً. لقد تمت البرهنة على أن هذه القاعدة لا تصلح في الأساس
2: إن أصغر مثال مقارب Counter Example هو العدد
10110 والذي سيصل إلى المجموع 10110100 بعد أربعة
خطوات، وبعد ثمانية خطوات سيكون 1011101000، وبعد
12 خطوة سيكون 101111010000. في كل خطوة رابعة
يضاف رقم واحد لكل من المتابعين (التي تحتها خط) ويلاحظ
بأن هذه المجاميع الجديدة ليست أعداداً مشقولة. لقد عثر على
مجموعة عموميات في عملية الجمع المعكوس وهي :

(أ) عندما تطبق هذه التقانة على أعداد صحيحة متباينة تنتج
نفس العدد المقلب. على سبيل المثال، كل من الأعداد:
554، 752، 653 تنتج العدد المقلب 11011 بثلاث
خطوات.

بصورة عامة. فإن جميع الأعداد الصحيحة التي يكون فيها
أزواج الأرقام المتوافقة مشابهة للوسط وتمتلك نفس المجموع،
سوف تنتج نفس العدد المقلب بنفس العدد من الخطوات
التنفيذية (في هذه الحالة، فإن جميع أزواج الأرقام سوف
تضاف لغاية 9). وتوجد، في بعض الحالات، أعداد صحيحة
تنتج نفس العدد المقلب وبعده خطوات مختلف. على سبيل
المثال. يصل العدد 99 إلى 79497 في 6 خطوات بينما يصلها
العدد 7299 في خطوتين.

(ب) يمكن أن تصنف الأعداد المؤلفة من رقمين على أساس
مجموعهما لتحديد عدد الخطوات المطلوبة لإنتاج العدد
المقلب. ويبدو واضحاً بأنه إذا بلغ مجموع الرقمين 9،
فإننا نحتاج إلى خطوة واحدة، أما إذا كان المجموع 10
(مثل 64 أو 73) فإننا سنكون بحاجة إلى خطوتين. إن
تحليلاً مشابهاً سوف يؤدي بالطلبة إلى الاستنتاج الذي
ينص على أنه: إذا كان مجموع الأرقام 11، 12، 13، 14،

العدد الأسر تسعة

9

The Fascinating Number Nine

رغب الطلبة بتدقيق عملية الجمع $29+57+85+35+6=212$.
فإنهم سيعمدون، ببساطة، إلى تقسيم كل عدد ورد في عملية
الجمع على 9 وسيبقى المتبقي. لذا سيكون لديهم: 2. 3. 4.
و 6 وحاصل جمعها هو 23 (أنظر أدناه):

$$\begin{array}{r} 29 \rightarrow 2 \\ 57 \rightarrow 3 \\ 85 \rightarrow 4 \\ 35 \rightarrow 8 \\ +6 \rightarrow +6 \\ \hline 212 \rightarrow 23 \end{array}$$

إن المتبقي من $212 \div 9$ هو 5. فإذا كان المتبقي من 212
 $\div 9$ يساوي المتبقي من $23 \div 9$ ، فإن العدد 212 سيكون هو
الجواب الصحيح. في هذه الحالة، ولما كان العدد المتبقي هو 5
من عملية القسمة على 9، فإن الناتج 212 هو جواب صحيح.
لن يكون الطلبة واثقين، بصورة قاطعة من صحة الإجابة
عند استخدام طريقة التدقيق هذه، نظراً لأن إعادة ترتيب
الأرقام، مثلاً 221، سوف تؤدي إلى الحصول على نفس العدد
المتبقي عند تقسيمه على 9.

ولعل من الممتع ملاحظة عدم ضرورة إيجاد المتبقي عند
القسمة على العدد 9. وكل ما عليك أن تفعله هو جمع أرقام
العدد (الذي سيقسم على 9)، وإذا لم يكن ناتج القسمة يتألف
من عدد أحادي الرقم، تتولد عملية جمع الأرقام لحين
الحصول على رقم واحد. في المثال السابق كانت البواقي:

$$\begin{array}{l} 29 : 2 + 9 = 11, 1 + 1 = 2 \\ 57 : 5 + 7 = 12, 1 + 2 = 3 \\ 85 : 8 + 5 = 13, 1 + 3 = 4 \\ 35 : 3 + 5 = 8 \\ 6 : 6 \end{array}$$

وسيكون المجموع $2 + 3 + 4 + 8 + 6 = 23$ وسيكون المجموع $2 + 3 + 8 + 6 = 21$ وبالنسبة للعدد $212 = 2 + 1 + 2 = 5$.

يمكن للطلبة استخدام نفس طريقة العمل بالنسبة لعمليات
أخرى. فعلى سبيل المثال، للتأكد من عملية ضرب العددين
 $408 \times 239 = 208, 239$ سيجدون بأن البواقي (عند التقسيم

تهدف هذه الوحدة إلى تقديم عرض استجمامي للخصائص
المعددة – الممتعة التي يمتاز بها العدد 9. ومن ضمن الأهداف
التي تكمن وراء عرض الخصائص المسلية لهذا العدد تبرز عملية
تحفيز الطلبة على ممارسة تحريات إضافية والتبصر بخصائص
الأعداد المختلفة.

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1- سيقوم الطلبة بعرض ثلاثة خصائص، على الأقل، للعدد تسعة.
- 2- سيوفر الطلبة مثالا على الحسابات المختصرة التي تتضمن العدد تسعة.

التقييم السابق Pre Assessment

ينبغي أن يكون الطلبة على دراية كافية بمختلف حقول
المسلطات Postulates، ويمتصون بخبرة وسهارة معقولة بالتعامل مع
عمليات: الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة. إن معرفة كافية
بمادة الجبر ستوفر مساعدة إضافية للطلبة بيد أن توفرها ليس شرطاً
ضرورياً.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

يفضل عند عرض أفكار جديدة على الصف، بناء المعطيات
الجديدة على معارف سابقة لديهم. فعلى سبيل المثال، أنع
الطلبة إلى ضرب العددين 99×53 إن الطلبة الذين لا
يخامرهم شك في معلوماتهم سيقومون بإنتاج الحسابات
بالطريقة المألوفة. وبعد انتهاء الطلبة من تنفيذ هذه المهمة،
اقترح ما يأتي: نظراً لأن

$$\begin{array}{l} 99 = 100 - 1 \\ 53 \times 99 = 53(100 - 1) \\ = 53(100) - 53(1) \\ = 5300 - 53 \\ = 5247 \end{array}$$

والآن اجعلهم يستخدمون هذه التقنية لضرب العددين 99×42 .
إن عملية (إبعاد التسعات خارجاً Casting out Nines) هي
تقانة شائعة تعتمد في تدقيق الحسابات. على سبيل المثال، إذا

$$\begin{aligned}
 12345679 \times 9 &= 111, 111, 111 \\
 12345679 \times 18 &= 222, 222, 222 \\
 12345679 \times 27 &= 333, 333, 333 \\
 12345679 \times 36 &= 444, 444, 444 \\
 12345679 \times 45 &= 555, 555, 555 \\
 12345679 \times 54 &= 666, 666, 666 \\
 12345679 \times 63 &= 777, 777, 777 \\
 12345679 \times 74 &= 888, 888, 888 \\
 12345679 \times 91 &= 999, 999, 999
 \end{aligned}$$

دع الطلبة يدركون بأن في تعاقب الأعداد الطبيعية (التي يتألف منها العدد المضروب أعلاه) قد أقسى العدد 8. بعبارة أخرى، العدد الذي يقل عن الأساس 10 ب 2 كان مقفوداً. أدع الطلبة إلى التفكير بتوسيع هذا الأسلوب على أسس غير 10. والآن أطلب منهم عكس ترتيب الأرقام الطبيعية، مع العدد 8، وأضرب كل منها بمضاعفات العدد 9 التسعة الأولى. ستكون النتائج مذهلة:

$$\begin{aligned}
 987654321 \times 9 &= 8\ 888\ 888\ 889 \\
 987654321 \times 18 &= 17\ 777\ 777\ 778 \\
 987654321 \times 27 &= 26\ 666\ 666\ 667 \\
 987654321 \times 36 &= 35\ 555\ 555\ 556 \\
 987654321 \times 45 &= 44\ 444\ 444\ 445 \\
 987654321 \times 54 &= 53\ 333\ 333\ 334 \\
 987654321 \times 63 &= 62\ 222\ 222\ 223 \\
 987654321 \times 72 &= 71\ 111\ 111\ 112 \\
 987654321 \times 81 &= 80\ 000\ 000\ 001
 \end{aligned}$$

سوف نعرض الآن خصائص أخرى ممتعة للعدد 9. دع الطلبة يكتشفون هذه الخصائص عن طريق إرشادهم بعناية إلى النتائج المطلوبة. ينبغي تشجيع الطلبة الأذكياء والمتفوقين على استكشاف هذه العلاقات ومعرفة سبب حدوثها.

-1

$$\begin{aligned}
 9 \times 9 &= 81 \\
 99 \times 99 &= 9801 \\
 999 \times 999 &= 998001 \\
 9999 \times 9999 &= 99980001 \\
 99999 \times 99999 &= 9999800001 \\
 999999 \times 999999 &= 999998000001 \\
 9999999 \times 9999999 &= 9999998000001
 \end{aligned}$$

-2

$$\begin{aligned}
 999999 \times 2 &= 1999998 \\
 999999 \times 3 &= 2999997 \\
 999999 \times 4 &= 3999996 \\
 999999 \times 5 &= 4999995 \\
 999999 \times 6 &= 5999994 \\
 999999 \times 7 &= 6999993 \\
 999999 \times 8 &= 7999992 \\
 999999 \times 9 &= 8999991
 \end{aligned}$$

على 9 لكل من هذين العددين :

$$239: 2 + 3 + 9 = 14, 1 + 4 = 5 \cdot 239$$

$$872: 8 + 7 + 2 = 17, 1 + 7 = 8 \cdot 872$$

$$\text{بالنسبة لحاصل الضرب: } 5 \times 8 = 40, 4 + 0 = 4$$

$$\text{بالنسبة لنتائج عملية الضرب } 204, 208:$$

$$2+0+8+4+0+8=22; 2+2=4$$

حاول أن تؤكد لطلبة الصفوف بأن هذه الطريقة ليست تدقيقاً مضموناً Fool-Proof لصحة الحسابات، لكنها تصلح أن تكون مؤشراً على احتمال صحتها. وحاول أن تعرض هذا الموضوع بطريقة تجعلهم يبدون إعجابهم بالخصائص الممتعة للعدد 9.

إن الخاصية الفريدة - الأخرى التي يمتاز بها العدد 9 وتظهر عند ضربه بأي عدد يتألف من رقمين أو أكثر. تأمل المثال 65.437×9 . إن بديلاً للخوارزمية التقليدية سيكون كما يأتي:

1- أطرح وحدات رقم المضروب Multiplicand من 10

$$10 - 7 = 3$$

2- أطرح كلا من الأرقام المتبقية من العدد 9 ثم أضف الباقي إلى الرقم التالي من المضروب (على الجهة اليمنى). بالنسبة لأي رقمين فإن المجاميع تنقل رقم العشرات إلى المجموع كما يلي:

$$9 - 3 = 6 + 7 = 1$$

$$9 - 4 = 5 + 3 = 1$$

$$9 - 5 = 4 + 4 = 8$$

$$9 - 6 = 3 + 5 = 8$$

3- أطرح 1 من الرقم الموجود في أقصى الجهة اليسرى من المضروب :

$$6 - 1 = 5$$

4- والآن أدرج النتائج بترتيب معكوس للحصول على حاصل الضرب الصحيح!

$$588, 933$$

رغم أن هذه الطريقة تمتاز بكونها ثقيلة ومزعجة لحد ما، بيد أنها تصلح لأن تكون أساساً عملياً لجملة من التحريات الممتعة في ميدان نظرية العدد. ولكي تزيد من اهتمام طلبتك بالخصائص الأسيرة للعدد 9، أدعهم إلى محاولة ضرب العدد 12.345.679 بمضاعفات العدد 9 التسعة الأولى، وتدون النتائج:

من ثمانية أرقام بحيث لا يظهر أي رقم من الأرقام أكثر من مرة واحدة، والذي عندما يضرب بالعدد 9، ينتج عنهما عدد بتسعة أرقام لا يظهر بينهما رقم أكثر من مرة واحدة. إن جل محاولات الطلبة ستعني بالفشل. على سبيل المثال، 142، 871، 688، $9 \times 76541258 = 688$ والذي يتكرر فيه كل من 8، 1. وندرج أدناه أعداد تتطابق خصائصها مع متطلبات التحدي:

$$\begin{aligned} 81274365 \times 9 &= 731469285 \\ 72645831 \times 9 &= 653812479 \\ 58132764 \times 9 &= 523194876 \\ 76125483 \times 9 &= 685129347 \end{aligned}$$

التقييم اللاحق Postassessment

ادع الطلبة إلى:

- 1- عرض ثلاثة خصائص غير عادية للعدد 9.
- 2- اعرض اختصاراً لعملية ضرب العددين 99×547 .
- 3- وضح الآن دلالة (تدقيق) حسابات الضرب بأسلوب (إبعاد التسمات خارجاً).

$$\begin{aligned} 1 \times 9 + 2 &= 11 \\ 12 \times 9 + 3 &= 111 \\ 123 \times 9 + 4 &= 1111 \\ 1234 \times 9 + 5 &= 11111 \\ 12345 \times 9 + 6 &= 111111 \\ 123456 \times 9 + 7 &= 1111111 \\ 1234567 \times 9 + 8 &= 11111111 \\ 12345678 \times 9 + 9 &= 111111111 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \times 9 + 7 &= 88 \\ 98 \times 9 + 6 &= 888 \\ 987 \times 9 + 5 &= 8888 \\ 9876 \times 9 + 4 &= 88888 \\ 98765 \times 9 + 3 &= 888888 \\ 987654 \times 9 + 2 &= 8888888 \\ 9876543 \times 9 + 1 &= 88888888 \\ 98765432 \times 9 + 0 &= 888888888 \end{aligned}$$

إن إحدى الطرق الممتعة لاستنتاج هذا النموذج Model تكمن في تقديم تحدٍ لطلبتك وذلك بتكليفهم بإيجاد عدد يتألف

الخصائص الفريدة للعدد

10

Unusual Number Properties

الموجودة في الآلة الحاسبة. يمكن أن تقتصر الآلة الحاسبة المطلوبة لهذه الوحدة على العمليات الحسابية الأربعة فقط.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لاشك بأن أفضل الطرق لتحفيز إثارة حقيقية بمادة الرياضيات تكمن في عرض بعض الخصائص الرياضية المختصرة والبسيطة، والظاهرة الرياضية والتفصيلية. وفيما يأتي بضعة أمثلة ستزودكم بمادة مسهلة يمكنك استثمارها في تحفيز طلبتك باتجاه جملة من التحريات المستقلة.

مثال Example 1

عندما يضرب العدد 37 مع المضاعفات التسعة الأولى للعدد 3 صفوف تظهر النتائج الممتعة الآتية. دع الطلبة يتلمسون هذا

(ملاحظة المؤلف: ينبغي استخدام هذه الوحدة بعيد الوحدة التي عنوانها (إثراء، بآلة حاسبة يدوية)). تهدف هذه الوحدة إلى تقديم مورد جيد عن خصائص العدد الممتعة والتي من الأفضل عرضها على آلة حاسبة.

أهداف الأداء Performance Objectives

سيعمل الطلبة على استكشاف المسائل الرياضية بمساعدة آلة حاسبة يدوية ثم يستنتجوا الاستنتاجات المناسبة لكل منها.

التقييم السابق Pre Assessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالدوال الأساسية

أخبر الطلبة بملاحظة التماثل بين أول عمودين، وآخر عمودين من حاصل الضرب. يحوي كل عمود على أعداد صحيحة متعاقبة. حاول أن تشجع الطلبة بعدم الاقتصار على إنشاء وبيان هذه الحالة الفريدة، ولكن بذل الوسع في البناء عليها واستثمارها. ما هو الشيء الذي جعل من العدد 1089 فريداً إلى هذا الحد؟ ما هي عوامل العدد 1089؟ لماذا يكون 9×1089 عكس العدد $9=1086$ ؟ هل يمكن لهذا النظام أن يعمل على أعداد أخرى؟ إن هذه الأسئلة وأخرى غيرها ينبغي أن تبتدئ بتحديد الاتجاه العام للاستقصاءات والتنقيبات الإضافية.

ستكون آلات الطلبة - الحاسبة أداة لا غنى عنها في إنجاز المهام الملقاة على عاتقهم، وستتيح لهم فرصة مناسبة لمشاهدة الأنماط بصورة فورية ومباشرة بدلاً من الضباب في الخطوات الجانبية التي تنشأ عن الحسابات البرهنة.

مثال 4 Example 4

لقد أُنجزت أدناه مجموعة من أنماط الأعداد الممتعة التي سيشارون بالعمل عليها. كن واثقاً من تشجيع الطلبة على توسيع الأنماط المنتجة، ومحاولة اكتشاف وسر مبررات وجودها.

$$\begin{aligned} 1 \times 8 + 1 &= 9 \\ 12 \times 8 + 2 &= 98 \\ 123 \times 8 + 3 &= 987 \\ 1234 \times 8 + 4 &= 9876 \\ 12345 \times 8 + 5 &= 98765 \\ 123456 \times 8 + 6 &= 987654 \\ 1234567 \times 8 + 7 &= 9876543 \\ 12345678 \times 8 + 8 &= 98765432 \\ 123456789 \times 8 + 9 &= 987654321 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \times 11 &= 121 \\ 111 \times 111 &= 12,321 \\ 1,111 \times 1,111 &= 1,234,321 \\ 11,111 \times 11,111 &= 123,454,321 \\ 111,111 \times 111,111 &= 12,345,654,321 \\ 1,111,111 \times 1,111,111 &= 1,234,567,654,321 \\ 11,111,111 \times 11,111,111 &= 123,456,787,654,321 \\ 111,111,111 \times 111,111,111 &= 12,345,678,987,654,321 \end{aligned}$$

مثال 5 Example 5

ادع الطلبة إلى حسابات عمليات القسمة المبنية في كل من الكسور الآتية، على أن يدونوا النتائج التي سيحصلون عليها:

$$\frac{1}{7} = \frac{142857}{999999}$$

الأمر باستخدام آلتهم الحاسبة.

$$\begin{aligned} 37 \times 3 &= 111 \\ 37 \times 6 &= 222 \\ 37 \times 9 &= 333 \\ 37 \times 12 &= 444 \\ 37 \times 15 &= 555 \\ 37 \times 18 &= 666 \\ 37 \times 21 &= 777 \\ 37 \times 24 &= 888 \\ 37 \times 27 &= 999 \end{aligned}$$

مثال 2 Example 2

عندما يضرب العدد 142.857 بالأعداد 2,3,4,5,6 فإن جميع حواصل الضرب ستستخدم نفس الأرقام، بنفس الترتيب الموجود في الأعداد الأصلية، ولكن يبتدئ كل منها بموقع آخر:

$$\begin{aligned} 142,857 \times 2 &= 285,714 \\ 142,857 \times 3 &= 428,571 \\ 142,857 \times 4 &= 571,428 \\ 142,857 \times 5 &= 714,285 \\ 142,857 \times 6 &= 857,142 \end{aligned}$$

وعندما يضرب العدد 142,857 بالعدد 7، فإن حاصل الضرب هو 999,999. أما عندما يضرب 142.857 بالعدد 8، فإن الناتج سيكون 1.142.856. إذا استمعت مرتبة الملايين وأضيف إلى وحدات الأرقام ($142.856+1$) ستنتج العدد الأصلي !.

دع الطلبة يتحققوا حاصل ضرب 9×142.857 . ما هي الأنماط الأخرى التي ستعثر عليها والتي تتضمن حاصل ضرب 142.857 ؟ إن نمطا مماثلاً سيظهر مع حواصل ضرب الأعداد: 1,10,9,12,3,4, 76923؛ كذلك 2,5,7,11,6. ادع الطلبة إلى تفحص مجموع الأرقام لكل حاصل ضرب سيحصلون عليه. وسيكتشف الطلبة نتائج ممتعة بحق! أطلب منهم اكتشاف علاقات أخرى مشابهة.

مثال 3 Example 3

يمتاز العدد 1089 بمجموعة من الخصائص الممتعة والفريدة. دع الطلبة فرصة تأمل حاصل ضرب 1089 مع الأرقام الطبيعية التسعة الأولى.

$$\begin{aligned} 1089 \times 1 &= 1089 \\ 1089 \times 2 &= 2178 \\ 1089 \times 3 &= 3267 \\ 1089 \times 4 &= 4356 \\ 1089 \times 5 &= 5445 \\ 1089 \times 6 &= 6534 \\ 1089 \times 7 &= 7623 \\ 1089 \times 8 &= 8712 \\ 1089 \times 9 &= 9801 \end{aligned}$$

$$\frac{12}{13} = \frac{923076}{999999}$$

بعد إشباع الموضوع بالنقاشات، سرغب الطلبة في اعتبار الكسور الحقيقية المتبقية مع المقام 13، وسيكتشفون أنماطاً وعلاقات مشابهة.

إن التأثير الإيجابي للأمثلة السابقة سوف يفتقد قيمته إذا لم يتم إرشاد الطلبة فوراً إلى تعميق، وتوسيع الاكتشافات التي توصلوا إليها آنفاً. وبينما تسهم الآلات الحاسبة - اليدوية كأداة ناجعة للإرشاد وسير العلاقات الجديدة، فإن الحدوس المنطقية للطلبة سوف تنتج عن التنقيبات الرياضية العميقة في خصائص الأعداد.

التقييم اللاحق Postassessment

ليعمل الطلبة على إكمال التمارين الآتية:

1- أضرب واجمع كل أزواج الأعداد الآتية :

9, 9

24, 3

47, 2

497, 2

كيف تقارن مجاميع هذه الأزواج مع حاصل ضربها؟ (معكوساتها).

2- أنجز العمليات المبيّنة وبرز الأنماط الناتجة عنها، ثم اعد إلى توسيع النمط لتحديد مدى صلاحيتها.

$$12321 = \frac{333 \times 333}{1+2+1+2+1} = \frac{110889}{9} = 12321$$

$$1234321 = \frac{4444 \times 4444}{1+2+3+4+3+2+1} = \frac{19749136}{16} = 1234321$$

$$\frac{2}{7} = \frac{285714}{999999}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{428571}{999999}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{571428}{999999}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{714285}{999999}$$

$$\frac{6}{7} = \frac{857142}{999999}$$

سيلاحظ الطلبة وجود ترتيب متشابه في الأجزاء المتكررة يرافق نقاط الضروب المختلفة. حاول أن تبين للطلبة بأن حاصل ضرب $999999 \times 142857 = 142857 \times 7$ (والذي "يقارب" $1 = \frac{1}{7} \times 7$). ذكر الطلبة بأن هذا الأمر لا يشابه 7×142857 .

قد يرغب بعض الطلبة في تفحص حاصل الضرب هذا بصيغة غير عشرية :

$$\begin{aligned} 7 \times 142,857 &= 999,999 \\ &= 999,000 + 999 \\ &= 1000(142+857) + (142+857) \\ &= (142+857)(1000+1) \\ &= 1001(142+857) \\ &= 142,142+857,857 \end{aligned}$$

إن استيعاباً أفضل بالتنقيب الذي استهدف هذه الكسور سوف يبرز بعد أن يستكمل الطلبة حساب خارج قسمة ما يأتي:

$$\begin{aligned} \frac{1}{13} &= \frac{076923}{999999} \\ \frac{2}{13} &= \frac{230769}{999999} \\ \frac{3}{13} &= \frac{307692}{999999} \\ \frac{4}{13} &= \frac{307692}{999999} \\ \frac{9}{13} &= \frac{692307}{999999} \\ \frac{10}{13} &= \frac{769230}{999999} \end{aligned}$$

إثراء بواسطة آلة حاسبة يدوية

11

Enrichment with a hand-held Calculator

حل المسائل من معضلة مزدوجة. فهم من جهة غير قادرين على تفسير المسألة المطروحة وتحويلها إلى نسق قابل للحل، كما أنهم لا يحسنون إجراء الحسابات المطلوبة للحصول على الإجابة النهائية من جهة أخرى. بصورة اعتيادية، لا يستطيع هؤلاء الطلبة التركيز على موضوع حل المسألة ما لم يحسنوا إجراء الحسابات المطلوبة. ولكن باستخدام الآلة الحاسبة، يستطيعون تجنب، بصورة مؤقتة، مأزق الحسابات وبالتالي التركيز على مفتاح الحل الناجح للمسائل، ألا وهو التفسير الدقيق لمفردات المسألة. وعندما يتم تعلم هذا الجانب، يستطيع الطالب أن يركز جزءاً كبيراً في جهوده على إتقان آلة الحسابات بوصفها مقوماً أساسياً وضرورياً في ميدان حل المسائل.

أهداف الأداء Performance Objectives

سيقوم الطلبة بالعمل على مسائل رياضية بمساعدة آلة حاسبة يدوية ثم يتوصلوا إلى استنتاجات مناسبة.

التقييم السابق Pre Assessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالدوال الرئيسة للآلة الحاسبة. ينبغي أن تحتوي الآلة المطلوبة لهذه الوحدة على العمليات الأساسية، زائداً مفاتيح الذاكرة والجذر التربيعي. لاستيعاب كل من محوري الممارسة التطبيقية، والتصلية دع الطلبة يطبقون ما يلي في آلاتهم الحاسبة - الهدوية.

1- أحسب:

$60 \pm 243 - (12) (2400)$ [لتجد مقدار ما ينبغي على المرء أن يسدده، حاول أن تقرأ إجابتك من أسفل إلى أعلى.

2- أحسب:

$4590.5864 + (568.3) (-0.007)$ - 1379.26 ثم أقلب ألتك الحاسبة من أعلى إلى أسفل، وبعد قراءة الجواب، أنظر داخل حذاك!

ينبغي أن تجهز البداية المناسبة لنشاط المجموعة الصغيرة والتي تناسب جميع المستويات، بحيث يحسن الطلبة بالراحة عند التعامل مع: زملائهم، ومع العلم، ومع المجموعة الجديدة، أو مع جميع طلبة الصف عند إجراء استعراض سريع لذاكرة الآلة الحاسبة Calculator's Memory، ومفاتيح الجذر التربيعي Sqaure Root.

يمكن أن يتبع هذا النشاط (بمسابقة) السرعة والدقة والتي تتضمن عمليات حسابية مختلفة.

جوزت معظم الآلات الحاسبة بمفاتيح الذاكرة، والتي تتيج المجال أمام أنشطة تنافسية مختلفة. وتسهم هذه المفاتيح بتوفير طريقة فعالة لحزن النتائج الوسيطة، كما تمكّن القدرة على الاحتفاظ بالعدد الذي تظهر الحاجة إلى استخدامه باستمرار أثناء ممارسة حل التمرين.

إن المفتاح [+M] يقوم بإضافة العدد المعروض إلى محتويات الذاكرة مع تخزين حاصل الجمع في الذاكرة. كما أن الرقم المعروض لا يتغير.

ويقوم المفتاح [-M] بطرح العدد المعروض من محتويات الذاكرة مع تخزين الفرق في الذاكرة. كما أن الرقم المعروض لا يتغير.

يستدعي المفتاح [MR] محتويات الذاكرة، والتي تحل محل محتويات لوحة العرض.

مثال EXAMPLE: جد قيمة

$$5 \times 12 + 3 \times 16$$

الحل SOLUTION: اضغط

$$5 \times 12 = [M+] 13 \times 16 = + [MR] =$$

ستقرأ لوحة العرض 268.

إن الاستخدام الأكثر فعالية، ويمديات واسعة للآلة الحاسبة يكمن في استخدامها كوسيلة مسهلة لحل المسائل. بصورة عامة يعاني الطلبة الذين سيجدون صعوبة كبيرة في

يخلصهم من حسابات ثقيلة ومرهقة، ويتيح لهم فرصة تركيز جل انتباههم على المفاهيم الرياضية التي تم اكتشافها.

بالنسبة للبحث في العدد التالي، ادع طلبتك إلى اختيار أي عدد يتألف من ثلاثة أرقام، لنقل 538. ثم اطلب منهم إدخاله مرتين في آلاتهم الحاسبة دون الضغط على أي مفتاح من مفاتيح العمليات. ستظهر لوحات العرض لديهم العدد 538538. الآن دعهم يقسمون على العدد 7، ثم على العدد 11، وأخيرا على العدد 13.

وسما سيثير دهشتهم واستقرابهم هو ظهور الرقم الأصلي أمامهم، الأمر الذي سيؤدي إلى زيادة الفضول وحسب الاستطلاع لديهم. أطرح عليهم سؤالا حول ماهية العملية المنفردة التي يمكن استخدامها لاستبدال عمليات القسمة الثلاث. ينبغي عليهم إدراك بأن القسمة المنفردة على $1001 = 13 \times 11 \times 7$ قد تم إنجازها بالفعل. ونظرا لكون $538538 = 1001 \times 538$ ، فإن اللغز تم حله بالضرورة، وفي هذا الوقت سيرغب الطلبة بتجربة هذا النظام على آلاتهم الحاسبة باستخدام أرقام أخرى. إن هذا الأمر سيؤدي إلى تمييز وتعميق معرفتهم بالأرقام، وخصوصا العدد 1001، وهو رقم يمتلك أهمية خاصة.

ينبغي أن يحفز الطلبة الآن على تجربة عمليات الضرب الآتية بحيث يستطيعون البدء بإدراك (التنبؤ) بأنماط العدد

إدراكا كافيا وتمييزها:

$$33 = 11 \times 3 \quad \text{أ-}$$

$$333 = 111 \times 3$$

$$3333 = 1111 \times 3$$

$$33333 = 11111 \times 3$$

$$404 = 101 \times 4 \quad \text{ب-}$$

$$40404 = 10101 \times 4$$

$$4040404 = 1010101 \times 4$$

$$404040404 = 101010101 \times 4$$

$$5005 = 1001 \times 5 \quad \text{ج-}$$

$$550055 = 110011 \times 5$$

$$55500555 = 11100111 \times 5$$

$$6565 = 101 \times 65 \quad \text{د-}$$

$$656565 = 10101 \times 65$$

$$65656565 = 1010101 \times 65$$

$$65065 = 1001 \times 65 \quad \text{هـ-}$$

$$650065 = 10001 \times 65$$

$$6500065 = 100001 \times 65$$

$$65065065 = 1001001 \times 65$$

إن هذين التمرينين سوف يوفران لطلبك إحساسا مريحا حول العمل بالآلات الحاسبة. ولأن اعمد إلى تحدي طلبك باستخدام مفاتيح الذاكرة عند إيجاد الأخطاء في تمارين تشابه ما يأتي:

$$15 \times 13 + 18 \times 32 - 3$$

$$4 - 81 - 266 + 13 \times 15$$

$$5 - (23) + (253/11)$$

$$6 - (37 - 81) \times (355 - 281)$$

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ الدرس بحدث غريب يتمم بالبساطة. دع الطلبة يتأملون تقويم شهر مايو لعام 1977 وأطلب منهم عمل مربع حول أي تسعة أيام يشاؤون اختصارها، إن أحد الطرق المستخدمة لذلك تظهر في الشكل الآتي:

مايو 1977						
S	M	T	W	T	F	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

بعدها، ينبغي أن يضيف الطلبة 8 إلى العدد الأصغر في المربع ثم يضرب بالعدد 9. في المثال أعلاه، لدينا $171 = 9 \times (8+11)$. بعد ذلك يمكن للطلبة استخدام آلاتهم الحاسبة لضرب مجموع الأعداد في الصف الأوسط (أو العمود) بالعدد 3 وسيحصلون على نفس النتيجة 171. مع طلبك يحاولون هذا الأمر ثانية مع خيارات أخرى لتسعة أعداد. ينبغي عليك أن تجعل الطلبة يدركون بأن حاصل جمع الصف أو العمود الأوسط مضروبا بالعدد 3 يساوي مجموع الأعداد التسعة داخل المربع. يستطيع الطلبة التأكد من صحة هذا الأمر، بسهولة، عن طريق استخدام آلاتهم الحاسبة.

من هذه النقطة، ستكون لديك فرصة ممتازة لبحث خصائص المتوسط الحسابي Arithmetic Mean، حيث تسهم هذه الدراسة بإلقاء مزيد من الضوء على هذا الموضوع الجذاب (خدعة التقويم Calendar Trick).

ينبغي على الطلبة أن يدركوا بأن العدد المتوسط في المربع الذي يضم الأعداد التسعة هو بالحقيقة المتوسط الحسابي للأعداد التي تم اختيارها. إن استخدام الآلة الحاسبة سوف

مهما كانت قيمة العدد - ذي الرقمين - الذي تم اختياره فإننا سنحصل على عدد مشقلب بعد اتباع الطريقة المشار إليها سابقاً. وباستخدام الآلة الحاسبة سيلاحظ الطالب هن كثب ظهور مجموعة من الأنماط والتي ستؤدي بهم إلى اكتشاف أسباب ومميزات هذه الظاهرة الرياضية.

حاول أن تشجع طلبتك على الاعناء بإصدار حدس أو تخمين حول العلاقات الأخرى الممكنة للأعداد ثم محاولة التأكد من صحة ذلك باستخدام الآلات الحاسبة التي بين أيديهم.

التقييم اللاحق Postassessment

أخبر الطلبة بضرورة البدء في استخدام الآتهم الحاسبة للتأكد من صحة الظاهرة الآتية ولسته أعداد مختلفة. ثم بعد ذلك ينبغي عليهم محاولة البرهنة عليها:

1- اختر أي عدد بثلاثة أرقام بحيث لا يساوي رقم مرتبة الآحاد مرتبة المئات. ثم اكتب العدد الذي تكون أرقامه بترتيب معاكس للعدد المختار، والآن أخرج العدد الأصغر من العدد الأكبر خذ الفرق، أعكس أرقامه، وأضف العدد الجديد إلى الفرق الأصلي، ما هو العدد الذي تحصل عليه في النهاية؟ ولماذا ؟

2- أحسب $\frac{17.6 \times 23.4}{8 \times 50}$ مقرباً إلى أقرب مرتبة عشرية أو عدد زوجي.

3- أحسب $\frac{2}{2-1}$ مقرباً إلى أقرب مرتبة مئاة.

$$\begin{aligned} 77 &= 11 \times 7 \\ 7777 &= 101 \times 11 \times 7 \\ 777777 &= 10101 \times 11 \times 7 \\ 7777777 &= 1001 \times 111 \times 7 \end{aligned}$$

والآن دع الطلبة يكتشفون طرقاً أخرى لتوليد أعداد بواسطة الضرب مثل: 7777777، 77777777، 777777777. عند هذه النقطة سنشأ لدى الطلبة اهتمام كاف بتوليد أنماط عددية أخرى من حاصل ضربها. سيكون معظم طلبتك، في هذا الوقت، على استعداد كاف لتأمل مسائل أكثر تعقيداً.

يعرف المشقلب بأنه عبارة عن كلمة أو عبارة يمكن قراءتها بالاتجاهين الأمامي أو الخلفي. على سبيل المثال (Madam)، أو (I'm Adam). أما في الرياضيات فإن العدد المشقلب فيمكن قراءته بأي اتجاه دون تغيير في قيمته.

على سبيل المثال، دع طلبتك يختارون أي عدد يتألف من رقمين ثم يضاف إليه العدد الذي تكون أرقامه بترتيب معاكس للعدد الأول. والآن نأخذوا المجموع ويضيفوا إليه العدد الذي تكون أرقامه بترتيب معاكس للمجموع. سوف يستمر الطلبة بهذه العملية لحين الحصول على عدد مشقلب. على سبيل المثال :

$$\begin{aligned} 132 &= 75 + 57 \\ 363 &= 132 + 231 \text{ عدد مشقلب} \\ 176 &= 79 + 97 \\ 847 &= 176 + 671 \\ 1595 &= 847 + 748 \\ 7546 &= 1595 + 5951 \\ 14003 &= 7546 + 6457 \\ 44044 &= 14003 + 30041 \text{ عدد مشقلب} \end{aligned}$$

المثال الآتي :

$$\begin{array}{r}
 8888 \\
 \times 3333 \\
 \hline
 8 \\
 888 \\
 88888 \\
 8888888 \\
 9874568 \\
 \times 3 \\
 \hline
 29623704
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3333 \\
 \times 8888 \\
 \hline
 3 \\
 333 \\
 33333 \\
 3333333 \\
 3702963 \\
 \times 8 \\
 \hline
 29623704
 \end{array}$$

لاحظ بأن عدد الخطوط في القالب المثلثي يساوي عدد الأرقام في كل عدد تم ضربه. أما بقية القاعدة فيمكن أن نحصل عليها بسهولة من الطلبة. إن التمثيل الآخر، الوحيد، في عملية ضرب أعداد تتألف من أعداد متكررة سيظهر عندما لا يكون عدد الأرقام متساوياً في كلا العددين. افترض أن عدداً يتألف من n من الأرقام قد ضرب بعدد آخر يتألف من m من الأرقام. قم بتنظيم القالب المثلثي كما لو أن العددين يمتلكان n من الأرقام (كما تم إنجازهما سابقاً). ثم ارسم مستقيماً قطرياً إلى يمين الصف الهيمي m^{th} row ثم بادء بإلغاء جميع الأرقام التي تقع أسفل القطر. إن مجموع ما تبقى من أرقام يساوي حاصل الضرب المطلوب. إن المثال الآتي يوضح طريقة العمل هذه.

$$\begin{array}{r}
 44444 \\
 \times 666 \\
 \hline
 24 \\
 2424 \\
 242424 \\
 24242424 \\
 2424242424 \\
 24242424 \\
 2424 \\
 \hline
 29599704
 \end{array}$$

سيرغب الطلبة بملاحظة أن تقنية المضاعفة هذه يمكن أن توسع دائرة استخدامها في إيجاد حاصل ضرب عددين مختلفين يتألفان من أرقام متكررة. أي، إذا كنا نرغب بالحصول على حاصل ضرب العددين $v, uuuu, \dots, vvvv$ ، يمكن أعداد قالب معين من st ، حيث $uv=10st+t$ ، على سبيل المثال فإن حاصل ضرب العددين $8888 \times 3333 = 29623704$ أو

$$\begin{array}{r}
 8888 \\
 \times 3333 \\
 \hline
 24 \\
 2424 \\
 242424 \\
 24242424 \\
 2424 \\
 \hline
 29623704
 \end{array}$$

عندما سيتقن الطلبة استخدام القالب المعيني في ضرب الأعداد التي تتألف من أرقام متكررة، قد نرغب في أن نريهم قالباً آخر لضرب الأعداد متكررة الأرقام. يظهر أدناه القالب المثلثي *Triangular form* المستخدم في عملية الضرب. انتبه إلى ضرورة قيام الطلبة بضرب حاصل جمع الصفوفة المثلثية بالعدد 6.

$$\begin{array}{r}
 66666 \\
 \times 66666 \\
 \hline
 6 \\
 666 \\
 66666 \\
 6666666 \\
 666666666 \\
 740725926 \\
 \times 6 \\
 \hline
 4444355556
 \end{array}$$

بصورة عامة، لثربيع عدد بأرقام ذات تكرار نووي n digit repeated، اجمع أعمدة الصفوفة المثلثية ذات الأرقام المكررة (حيث تحوي على n من الصفوف التي تبدأ برقم واحد ثم تبدأ بالزيادة بمقدار رقمين في الصف الذي يلي سابقه)، ثم اضرب هذا المجموع بالرقم المكرر. يمكن أن توسع دائرة استخدام هذا النوع من تقانة الضرب ليشمل إيجاد حاصل ضرب عددين يتألفان من أرقام متكررة. دع الطلبة يصيغوا قاعدتهم الخاصة بعملية الضرب بعد اعتبار

التقييم اللاحق Postassessment

اعمد إلى تكليف الطلبة باحتساب كل مما يأتي باستخدام

قالب الضرب المعيني:

$$\text{أ- } 22222 \times 77777$$

$$\text{ب- } 9999 \times 9999$$

$$\text{ج- } 444 \times 333$$

وعاود تكليف الطلبة باحتساب كل مما يأتي باستخدام

الضرب المثلثي:

$$\text{أ- } 55555 \times 55555$$

$$\text{ب- } 7777 \times 4444$$

والآن ادع الطلبة إلى ضرب العددين 444×66666 . ينبغي أن يحصلوا على نفس مصفوفة الأعداد التي يجب جمعها بالأسلوب السابق. وهذا يدل على أن $66666 \times 444 = 44444 \times 666$. بعد إجراء عملية التحليل العاملي، ينبغي أن لا يجد الطلبة أي مشكلة في تبرير هذه المساواة. وينبغي أن يشجع الطلبة على التوضيح بعبارة رياضية عن سبب سريان قوالب الضرب المختلفة وصلاحتها في الحالات المتعددة السابقة.

التغييرات على موضوع الضرب**Variation on a Theme Multiplication**

13

التقليدية. حيث يمكن ملاحظة ما يأتي بوضوح:

$$\begin{aligned} 43 \times 92 &= (40 + 3) \times 92 \\ &= 40 \times 92 + 3 \times 92 \\ &= 3680 + 276 \\ &= 3956 \end{aligned}$$

الأمر الذي يتطابق تماما مع ما تم تنفيذه قبل قليل، يرسم أن الآلية ميكانيكية.

طريقة المضاعفة The Doubling Method

لضرب العدد 43 بالعدد 92 أنشئ أعمدة الأرقام الآتية، مبتدئا بـ 1 و 92، ثم ابدأ بمضاعفة كل منهما.

- 1 92
- 2 184
- 4 368
- 8 736
- 16 1472
- 32 2944

لقد توقعنا عند العدد 32 لأن ضعف هذا العدد هو 64 والذي يزيد على العدد 43. وبدأنا بالعدد الأخير في العمود الأول وقمنا بإضافة الأعداد المناسبة بحيث يكون المجموع 43. من ثم، سنختار (32، 8، 2، 1). والآن سنضيف الأعداد المقابلة في العمود التالي.

ستعرض هذه الوحدة طرائق غير تقليدية لاحتساب حاصل ضرب عددين صحيحين.

هدف الأداء Performance Objectives

سيمطى عددان صحيحين مع طريقة لضربهما، وسيباهر الطلبة باحتساب حاصل ضربهما.

التقييم السابق Preassessment

دع الطلبة يختصون حاصل ضرب 43 و 92 باعتماد أكثر من طريقة واحدة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ستسهم المسألة الآتية في توفير مناخ تنافسي في هذه الوحدة. ومن المؤكد بأن معظم الطلبة سينجحون في ضرب هذين العددين باستخدام الطريقة التقليدية لعملية الضرب، وكما يبين أدناه:

$$\begin{array}{r} 92 \\ \times 43 \\ \hline 276 \\ 368 \\ \hline 3956 \end{array}$$

قبل مناقشة استخدام طرق أخرى في عملية الضرب، ينبغي أن يمرض المعلم بوضوح سبب صلاحية خوارزمية الطريقة

$$\left[\frac{1}{4}a \cdot 4b\right] - \left[\frac{1}{2} \cdot 4b\right] = y$$

وبما أن $\frac{1}{4}a \cdot 4b = c$ ، إذن $c - 2b = y$

وعليه فإن حاصل الضرب الجديد، y ، سيكون أقل من الجواب الصحيح c بمقدار $2b$ (وهي عبارة عن العدد الأول المطلوب إضافته نظراً لاختلافه بعدد فردى، $\frac{1}{2}a$).

وعندما تستمر العملية، فإن (حاصل الضرب الجديد) سيبقى كما هو إذا كانت ka عبارة عن مدخل في العمود الأول زوجية. وإذا كانت ka فردية، وكان $ka \cdot mb = w$ ، فإن حاصل الضرب التالي سوف ينقص بمقدار mb (العدد الذي يتطابق مع العدد الفردى). على سبيل المثال،

$$\left(\frac{1}{2}ka - \frac{1}{2}\right) \cdot 2mb = \left(\frac{1}{2}ka \cdot 2mb\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 2mb\right) = w - mb$$

في النهاية، عندما يظهر 1 في العمود الأول. $1 \cdot pb = Z$ ، $pb = Z$ ، $Z = C$ - جميع المقطعات (الأعداد التي تشير إلى تلك التي تتطابق مع ka الفردية).

c (النتيجة المطلوبة) $+ z =$ جمع المقطعات.

إن الاعتبار الإضافي للطريقة القروية - الروسية في عملية الضرب يبدو واضحاً للعيان من العرض الآتي:

$$\begin{aligned} 43 \cdot 92 &= (21 \cdot 2 + 1) (92) = 21 \cdot 184 + 92 = 3956 \\ 21 \cdot 184 &= (10 \cdot 2 + 1) (184) = 10 \cdot 368 + 184 = 3864 \\ 10 \cdot 368 &= (5 \cdot 2 + 0) (368) = 5 \cdot 736 + 0 = 3680 \\ 5 \cdot 736 &= (2 \cdot 2 + 1) (736) = 2 \cdot 1472 + 736 = 3680 \\ 2 \cdot 1472 &= (1 \cdot 2 + 0) (1472) = 1 \cdot 2944 + 0 = 2944 \\ 1 \cdot 2944 &= (0 \cdot 2 + 1) (2944) = 0 + 2944 = 2944 \\ &3956 \end{aligned}$$

لاحظ بأن جمع الأعداد في العمود التالي والتي تقابلها مدخلات فردية في العمود الأول، يمكن تسهّلها بواسطة العرض السابق. قد يرغب المعلم في إلقاء مزيد من الضوء على هذا الفضول الرياضي عن طريق عرض الطبيعة الثنائية لعملية الضرب هذه.

$$\begin{aligned} (43) (92) &= (1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0) (92) \\ &= 2^0 \cdot 92 + 2^1 \cdot 92 + 2^3 \cdot 92 + 2^5 \cdot 92 \\ &= 92 + 184 + 736 + 2944 \\ &= 3956 \end{aligned}$$

ينبغي أن تشجع التحريات الرياضية الأخرى التي يحاول الطلبة العمل عليها.

$$\begin{array}{r} 92 \\ 184 \\ 736 \\ \hline 2944 \\ 3956 \end{array}$$

وعليه فإن حاصل ضرب $92 \times 43 = 3956$. إن سبب عمل هذه الطريقة قد تم توضيحه فيما يأتي:

$$\begin{aligned} 43 \times 92 &= (32 + 8 + 2 + 1) \times 92 \\ &= (32 \times 92) + (8 \times 92) + (2 \times 92) + (1 \times 92) \\ &= 2944 + 736 + 184 + 92 \\ &= 3956 \end{aligned}$$

الطريقة القروية-الروسية

Russian, Peasant Method

افترض، ثانية، بأننا نرغب في ضرب العددين 43 و 92. قم بأعداد أعمدة الأرقام الآتية، مبدئين بالعددين 43 و 92. في الصفوف المتعاقبة، قم بتنصيب المدخلات في العمود الأول، مستبعداً المتبقي من 1 عندما يظهر نتيجة الحصايات. في العمود الثاني، قم بضاعفة كل مدخل متعاقب. تستمر هذه العملية لحين ظهور العدد 1 في العمود الأول.

$$\begin{array}{r} * 43 \quad 92 \\ * 21 \quad 184 \\ 10 \quad 368 \\ * 5 \quad 736 \\ 2 \quad 1472 \\ * 1 \quad 2944 \end{array}$$

اختر الأعداد الموجودة في العمود الثاني والتي تقابل (الأعداد الفردية) بالعمود الثاني (الأعداد التي تم تأشيرها بنجمة). أضف هذه الأعداد المقابلة للعمود الثاني، وستكون النتيجة هي حاصل ضرب 92×43 . أي أن، $3956 = 92 + 184 + 736 + 2944$ = صحة الطريقة القروية - الروسية على الدوام، هو كما يأتي: افترض a زوجية: $a \cdot b = c$ حيث c هي النتيجة المطلوبة.

افترض $\frac{1}{2}a$ فردية:

$$\frac{1}{2}a - 2b = c$$

إن الخطوة التالية في الطريقة هي:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right) - \frac{1}{2}\right] \cdot 4b = y$$

بعدما نستخدم الخاصية التوزيعية Distributive property:

نظام تراكتنبرج Trachtenberg System

نظام تراكتنبرج عبارة عن طريقة سريعة لإجراء الضرب والقسمة والجمع والطرح وإيجاد الجذر التربيعي. وهناك العديد من القواعد لهذه العمليات. وسنركز هنا فقط على ضرب عددين من مرتبتين.

مرة أخرى، نفرض أن المطلوب هو حاصل ضرب 43 و 92

الخطوة 1: اضرب وحدتي الآحاد

$$[3 \cdot 2 = 6] \quad 43$$

$$\times \frac{92}{6}$$

الخطوة 2: اضرب تقاطعياً واجمع ذهنياً

$$[(9 \cdot 3) + (2 \cdot 4) = 27 + 8 = 35]$$

ضع العدد 5 وفق الطريقة المبينة ثم احمل العدد 3 (كمضاف إلى الخطوة التالية).

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 92 \\ \hline 86 \end{array}$$

الخطوة 3: اضرب رقمي المرتبة العشرية، ثم أضف أي

عدد محمول من الخطوة السابقة.

$$[9 \cdot 4 = 36 \rightarrow 36 + 3 = 39]$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 92 \\ \hline 3956 \end{array}$$

إن التبهرير الجبري لهذه الطريقة قد أدرج أدناه:

تأمل العددين اللذين يتألفان من رقمين mn و ab (مكتوبة بصيغة مكانية حرفية).

$$\begin{aligned} & (10a+b) \cdot (10m+n) \\ &= 10a \cdot 10m + 10a \cdot n + 10b \cdot m + bn \\ &= 100am + 10an + 10bm + bn \end{aligned}$$

خطوة 1 خطوة 2 خطوة 3

طريقة أخرى Another Method

إن مضاعفة العشرة (مربعة) هي طريقة سهلة للحساب الذهني. وتتضمن طريقة الحساب هذه توظيف هذه الفكرة. دع

الطلبة يتأملون حاصل ضرب $M \cdot N$ ثم ليختاروا X بحيث

$$N - X = b, \quad X - M = a \quad \text{مع} \quad M < X < N, \quad X = 10p$$

$$M \cdot N = (X-a)(X+b) = X^2 - aX + bX - ab$$

تأمل عملية ضرب العددين $92 \cdot 43$.

دع $X = 60$ ، إذن:

$$\begin{aligned} 43 \cdot 92 &= (60 - 17)(60 + 32) \\ &= 3600 + (-17 \cdot 60 + 60 \cdot 32) + (-17 \cdot 32) \end{aligned}$$

الضرب الشبكي Lattice Multiplication

تأمل ثانية عملية ضرب العددين $92 \cdot 43$. لتنفيذ هذه الطريقة ستكون بحاجة إلى إنشاء مصفوفة 2×2 مع رسم الأقطار كما يظهر أدناه.

	4	3	
	2	7	9
			2

في البداية، اضرب $9 \cdot 3 = 27$ ، يوضع العدد 2 فوق العدد 7 كما يظهر في الشكل الآتي:

	3	
2	7	9

ستشمل الخطوة التالية ضرب $9 \cdot 4 = 36$ ، وللمرة الثانية سيوضع العدد 3 فوق العدد 6 في الصندوق المناسب.

	4	3	
3	2	7	9
6			2
0	8	6	

تستمر هذه العملية، وتنبأ ببقية الصندوق. لاحظ أن $3 \cdot 2 = 6$ تسجل على أنها 0/6.

والآن فإن هناك مدخلًا في كل الخلايا. أضف الأعداد في الاتجاهات القطرية الموضحة، مبتدئًا من اليمين الأسفل. وتوضع دارة حول المجموع.

	4	3	
3	2	7	9
6			2
0	8	6	
5	6		

لاحظ أن الجمع الثاني $8+0+7=15$ ، سجلت الخمسة وحُمل الواحد إلى الجمع القطري اللاحق. إن الجواب الصحيح (حاصل ضرب $92 \cdot 43$) يقرأ فقط من الأعداد المحاطة بالدوائر، أي أن الجواب هو 3.956.

1	16*
2	32
4	64*
8	128

باستخدام $16 + 64 = 80$ ، فإن المصريين سيكتفون بمقتدري
3. ونظرا لكون $16 \times 16 = 1$ ، فقد وجدوا بأنهم في حاجة إلى
كسور لإكمال هذه المسألة.

في نظام الأعداد المصري، يلاحظ بأن كل كسر، باستثناء
 $\frac{2}{3}$ يتم وصفه كمجموع (وحدة كسور Unit Fraction). كسور
يكون البسط فيها 1. وبهذه الطريقة، تجنب المصريون بعض
العقبات الحسابية التي تعترض المرء عندما يعمل على الكسور.
ونظرا لارتكاز علم الحساب لديهم على مبدأ الضاعفة
Doubling، فإن العقبة الوحيدة التي كانت تشخص أمامهم
هي كيفية تغيير كسر بصيغة $\frac{2}{n}$ إلى كسر بصيغة: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots$
لقد تعاملوا مع هذه المسألة بواسطة جدول (يوجد الجدول في
ورق بردي يعود إلى عام 1650 ق.م)، والذي يعرض تحليلات
جميع الكسور ذات الصيغة $\frac{2}{n}$ لجميع قيم n الفردية من 5 إلى
101. (ينبغي أن يكون طلبة صفك قادرين على فهم لماذا اعتبر
المصريون القيم الفردية لـ n فقط).

إن كسرا مثل $\frac{2}{37}$ قد كتب بصيغة $\frac{1}{19} + \frac{1}{307}$ أو
باستخدام الترميز الشائع لوحدة الكسور، $19 + 7.3$. (إن هذا
الأسلوب في الترميز قد ظهر منذ زمن المصريين الذين عمدوا إلى
كتابة الكسور مثل $\frac{1}{4}$ بصيغة $\overline{\text{||||}}$ ، والكسر $\frac{1}{14}$ بصيغة $\overline{\text{|||||}}$ ،
في المدونات الهيروغليفية). يمتلك الكسر $\frac{2}{3}$ رمزا $\overline{\text{|||||}}$ يختص
به ويظهر الكسر $\frac{1}{2}$ في بعض الأحيان بصيغة $\overline{\text{|||||}}$.

إن الحاجة تبرز الآن للأخذ بنظر الاعتبار قاعدة يمكن
استخدامها لتحليل كسر بصيغة $\frac{2}{pq}$ (حيث p أو q قد
تساوي 1). دع الطلبة يتأملون ما يأتي:

$$\frac{2}{pq} = \frac{1}{p(p+q)} + \frac{1}{q(p+q)}$$

يستطيع الطلبة إضافة كسور على الجانب الأيمن، سوية،
للرهنة على صحة ذلك. كذلك ينبغي أن ينتبه الطلبة إلى أنه
نظرا لكون pq فرديا (بما أننا بحاجة إلى قاعدة لتحليل
 $\frac{2}{n}$ حيث n عدد فردي) فإن كل من p و q سيكونان فرديا

(دع الطلبة ينتبهون إلى أن المصريين كانوا يكتبون الأرقام
من اليمين إلى اليسار). وقد تجنب المصريون عمليات الضرب
والقسمة التي تتسم بالصعوبة أو التعقيد عن طريق اعتماد طريقة
أكثر سهولة (رغم استنفادها لكثير من الوقت). ولكي يقوموا
بضرب العدد 14 بالعدد 27، سيكون لزاما عليهم تطبيق ما
يأتي:

1	27
*2	54
*4	108
*8	216
16	432

للتقدم من سطر إلى آخر، كل ما ينبغي على المصريين فعله هو
مضاعفة العدد فحسب. بعدها، يحصلون إلى التقاط الأعداد الموجودة
في العمود الأيسر التي تضاف لغاية 14 (الأعداد التي توجد
عليها علامة *). وعن طريق إضافة الأعداد المقابلة في العمود
الأيمن توصل المصريون إلى الإجابة: $54 + 108 + 216 = 378$. إن
هذا الأمر هو تطبيق للخاصية التوزيعية لعملية الضرب على
عملية الجمع. لأن ما فعله المصريون يكافئ ما يأتي:

$$27(14) = 27(2+4+8) = 54 + 108 + 216 = 378.$$

إن التبرير الإضافي للطريقة يكمن في حقيقة أن كل عدد
يمكن أن يوصف كمجموع لأسس العدد 2. حاول أن تبحث
هذه العملية مع طلبك إلى الحد الذي تراه مناسباً.

مارس المصريون عملية القسمة بطريقة مشابهة. لقد نظروا
إلى المسألة $114 \div 6$ بوصفها 6 مضروبة في أي عدد بحيث
يكون حاصل الضرب مساويا للعدد 114.

1	6*
2	12*
4	24
8	48
16	96*

والآن، نظرا إلى أن $114 = 6 + 12 + 96$ ، فقد وجد
المصريون بأن $114 = 6(1+2+16)$ أو $19 \times 6 = 114$. الجواب
هو 19.

وبينما لا تظهر أية عقبة في الطريقة المصرية لعملية
الضرب، فإن عقبة سهلة تظهر أمام الطريقة المعتمدة لديهم في
عملية القسمة. ولكي تسترعي الانتباه إلى هذه المسألة، ادع طلبة
الصف إلى استخدام الطريقة السابقة لحل المسألة $83 \div 16$.

باختصار مجموع 8.3 من العمود الأيمن، سيتوصلون إلى
الحل الآتي: $1 + 4 + 8 + 16 = 5 + 8 + 16 = 5 \frac{3}{16}$. ينبغي
أن يكون الطلبة قادرين على حل مسائلهم الحسابية باستخدام
طرق اخترعها المصريون القدماء.

التقييم اللاحق Postassessment

أ. دع الطلبة يكتبون الأعداد التالية بالخط الهيروغليفي.

$$5.280 \quad (1)$$

$$25.057 \quad (2)$$

$$\frac{2}{25} \quad (3)$$

$$\frac{2}{35} \quad (4)$$

ب. دع الطلبة يغيرون كلا من الكسور الآتية إلى تحليلين
مختلفين لوحدة الكسر.

$$\frac{2}{27} \quad (1)$$

$$\frac{2}{45} \quad (2)$$

$$\frac{2}{35} \quad (3)$$

ج. دع الطلبة يحلون المسائل الآتية باستخدام الطرق المصرية.

$$30 \times 41 \quad (1)$$

$$137 \times 25 \quad (2)$$

$$11 \div 132 \quad (3)$$

$$101 \div 16 \quad (4)$$

وعليه فإن $p+q$ سيكون زوجيا، وسيكون الحد $\frac{p+q}{2}$ عبارة
عن عدد صحيح.

يستطيع الطلبة تحليل $\frac{2}{15}$ على الأقل بطريقتين. إذا
حددت قيمة $p=3$ ، $q=5$ ، سيكون لديهم

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{3(8)}{2} + \frac{5(8)}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$$

أما إذا افترضوا بأن $p=1$ و $q=15$ سيكون لديهم

$$\frac{1}{15} = \frac{1(16)}{2} + \frac{15(16)}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$$

أو $\frac{1}{120} + \frac{1}{8}$.

يبدو بأنه كان لدى المصريين طرق أخرى لتحليل الكسور
بحيث يجعل المقام الجديد أقل تعقيدا. مثلا، نستطيع أن نعد

$$\frac{2}{15} \text{ مثل } \frac{4}{30} \text{ بعد ذلك، سيكون لدينا}$$

$$\frac{4}{30} = \frac{3}{30} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

دع الطلبة يتأكدون من صحة هذه التحويلات.

والآن ادع الطلبة إلى إعادة اعتبار مسألة القسمة السابقة
 $83 \div 16$.

1	16*
2	32
4	64*
8	128
$\frac{1}{2}$	8
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{8}$	2*
$\frac{1}{16}$	1*

15 قضبان نابيير

Napier Rods

Index	5	2	3
1	05	02	03
2	10	04	06
3	15	06	09
4	20	08	12
5	25	10	15
6	30	12	18
7	35	14	21
8	40	16	24
9	45	18	27

شكل (2)

ينبغي أن يختار الطلبة، فيما بعد، الصفوف المناسبة من الدليل المقابل للأرقام الموجودة في المضروب فيه. يتم إجراء عملية جمع لكل صف باتجاه قطري (انظر شكل 2) وعليه فإن الأعداد التي سنحصل عليها:

$$2092 = 4 \times 523$$

$$3138 = 6 \times 523$$

$$3661 = 7 \times 523$$

قد أضيفت بعد اختيار مكان القيم المناسبة للأرقام حيث تم توليدها.

$$467 = 400 + 60 + 7$$

$$(467)(523) = (400)(523) + (60)(523) + (7)(523)$$

$$(467)(523) = 209200$$

$$31380$$

$$3661$$

$$244241$$

إن مناقشة متأنية للخطوة الأخيرة ستسهم في ضمان تكوين معرفة عملية لدى طلبتك باستخدام هذه الآلة، إضافة إلى تزويدهم بفهم شامل لبررات عمل هذه التقانة وفعاليتها.

$$561 \times 49 - 1$$

$$308 \times 275 - 2$$

$$4932 \times 7655 - 3$$

التقييم اللاحق Postassessment

دع الطلبة يستخدمون مجموعة من قضبان نابيير (والتي قاموا بأعدادها) لضرب ما يأتي:

$$361 \cdot 49$$

$$308 \cdot 275$$

$$4932 \cdot 7566$$

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1 سيقوم الطلبة بأعداد مجموعة قضبان نابيير من الورق المقوى.
- 2 سينجز الطلبة، أمثلة عن الضرب، بنجاح، باستخدام قضبان نابيير.

التقييم السابق Preassessment

إن المهارة الضرورية الوحيدة لهذا النشاط هي القدرة على ممارسة عملية الضرب.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابداً عرضك التقديمي بنبذة تاريخية موجزة عن قضبان نابيير. إن آلة الضرب هذه قد اخترعها العالم الرياضي الاسكتلندي جون نابيير (1550-1617)، John Napier، والذي كان مسؤولاً بالدرجة الأولى عن تطوير اللوغاريتمات. تتألف الآلة التي اخترعها من عصي خشبية مسطحة، مع مضاعفات متعاقبة للأعداد 1-9. (انظر الشكل (1)).

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	01	02	03	04	05	06	07	08	09
2	02	04	06	08	10	12	14	16	18
3	03	06	09	12	15	18	21	24	27
4	04	08	12	16	20	24	28	32	36
5	05	10	15	20	25	30	35	40	45
6	06	12	18	24	30	36	42	48	54
7	07	14	21	28	35	42	49	56	63
8	08	16	24	32	40	48	56	64	72
9	09	18	27	36	45	54	63	72	81

شكل (1)

ينبغي أن تعطي فرصة مناسبة لكل طالب لأعداد مجموعة قضبان نابيير الخاصة به. ربما تكون أفضل طريقة لبيان طريقة استخدام قضبان نابيير في توضيح مثال باستخدام هذه الآلة. تأمل عملية ضرب العددين 523×467 ، واطلب من الطلبة اختيار القضبان لكل من 5، 2، 3 ثم صف الأعمدة بجوار قضيب الدليل Index Rod. (انظر شكل 2).

وحدة تسعير

16

Unit Pricing

اضرب باتجاههما، واكتب نتيجة الضرب تحت رأس السهم.
 إن تفحصاً بسيطاً لحاصل الضرب تظهر بوضوح أن 810
 أكبر من التالي، وعليه فإن الكسر الذي يقبع أعلى العدد 810
 (يعني $\frac{30}{32}$) هو الأكبر بين هذين الكسرين. وعليه فإن وحدة
 سعر الجرة زنة 27 أونس هي أقل، وهي الأفضل لكي
 نشترها.

قبل إعطاء الطلبة مسائل تتضمن مقارنة وحدة الأسعار،
 حاول أن تعرض لهم مجموعة من المسائل العقلية التي تتضمن
 مقارنة الكسور فقط.

التقييم اللاحق Postassessment

اختر أيهما أكبر من زوج الكسور الآتية :

$$1- \frac{7}{8}, \frac{5}{6}$$

$$2- \frac{19}{25}, \frac{13}{17}$$

$$3- \frac{17}{23}, \frac{8}{11}$$

$$4- \frac{5}{9}, \frac{11}{9}$$

$$5- \frac{4}{5}, \frac{7}{9}$$

$$6- \frac{18}{31}, \frac{7}{12}$$

7- أي كمية تمتلك وحدة سعر أقل : جرة زنة 7 oz من اللبن
 بكلفة 11c أم جرة زنة 9 oz من اللبن بكلفة 13c؟

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1- سيقوم الطلبة بتحديد أي من الكسرين المحددين هو الأكبر باستخدام التقانة الموضحة على هذه البطاقة.
- 2- سيقوم الطلبة بتحديد أي من الكميتين اللتان حاصل ضربهما متساوي هي الأفضل بالموازنة السعريّة، بعد تحديد كمية وثمان تلك الكمية

التقييم السابق Preassessment

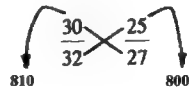
إن المهارة الضرورية الوحيدة لهذا النشاط هي قدرة الطالب على ممارسة عملية ضرب أعداد تامة (Whole numbers).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

أسأل طلبتك إذا كانوا يفضلون شراء جرة صلصة تفاح Applesauce زنة 32 oz بكلفة c30 أو جرة زنة 27 oz بكلفة c25. إن المفكر المنظم قد يلجأ إلى ترجمة المسألة إلى مسألة أخرى تطلب تحديد أيهما أكبر $\frac{30}{32}$ أو $\frac{25}{27}$. ينبغي أن يدرك الطلبة بأن هاتين النسبتين قد أتتا من (ثمان كل أونصة). إن الكلمة (لكل Per) تشير إلى عملية قسمة بحيث يمكن الوصول إلى نسبة (الثمان / أونصات) .

هناك طرق متعددة يمكن من خلالها المقارنة بين كسرين : تقسيم البسط على المقام ومقارنة الناتج العشري، أو تغيير كل من الكسرين إلى كسرين متساويين بالمقام، وهكذا.

سنحاول الآن أن نأخذ بعين الاعتبار طريقة أخرى، والتي تعد أكثر الطرق كفاءة وبساطة. ارسم سهمين كما يظهر أدناه، ثم



حسومات وزيادات متعاقبة

17

Successive Discounts and Increase

رخص الثمن قدم حسما قدره 20٪ من السعر الأصلي، بينما كان الحسم الثاني والبالغ 10٪ من السعر الأدنى المحصوم أصلا. وعليه فإن "آرني" ستحصل على أعلى حسم وقدره 30٪.

في هذه النقطة سيبدأ طلبك بالتساؤل عن مقدار الفرق الحقيقي بين الحسم الذي قدمه كل من هذين المخزنين. قد تستنبط، فيما بعد، بأن مقارنة هاتين الكميتين تتطلب إيجاد حسم مكافئ واحد "للحسمين المتعاقبين" 20٪ و 10٪.

قد يقترح بعض الطلبة إيجاد الحسومات المطلوبة عن طريق البدء بالسعر المثلث مثل \$10.00. إن هذا العدد سيعمل بصورة جيدة في الحسابات لأن 100 هي أساس النسب. أي، إن حسما مقداره 20٪ من \$10.00 ينتج سعر مقداره \$8.00، ثم أن حسما مقداره 10٪ من \$8.00 ينتج عنه سعر جديد مقداره \$7.20. ونظرا لأن السعر \$7.20 يمكن الحصول عليه مباشرة عن طريق حسم واحد مقداره 28٪ من السعر الأصلي المثلث والبالغ \$10.00، نتيجة "حسومات متعاقبة" مقدارها 10٪ و 10٪. فيكون الحسم المكافئ لهاتين النسبتين هو 28٪. إذ سيكون أمر مقارنة هذه النسبة مع الحسم البالغ 30٪ من السعر الأصلي بالغ السهولة.

ينبغي أن يأخذ الطلبة بعين الاعتبار طريقة عامة لتحويل أي عدد من الحسومات المتعاقبة إلى حسم مكافئ واحد. بادر إلى توضيح الموضوع بنمطي حسم متعاقبتين هما d_1 ، d_2 تسلمان على سعر مقداره p .

استخدم نفس الطريقة المستخدمة سابقا :

$$p - \frac{pd_1}{100} = p(1 - \frac{d_1}{100})$$

يمثل السعر بعد احتساب نسبة الحسم الأول، ويمثل

الحد:

تزد هذه الوحدة الطلبة بتقانة بسيطة لوصف جملة من الحسومات أو / و الزيادات المتعاقبة بوصفها حسما مكافئا واحدا، أو زيادة واحدة. قد يفتن الطلبة، إلى حد ما بسهولة الحل الذي تحمله معها هذه الطريقة للمسائل التي تتصف بصعوبة ملحوظة بالنسبة لموقف المستهلك.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتحويل حسمين متتابعين أو أكثر إلى حسم مكافئ واحد.
2. سيقوم الطلبة بتحويل حسمين متتابعين أو أكثر، أو زيادات ماثلة إلى حسم أو زيادة مكافئة.

التقييم السابق Preassessment

استخدام المسألة الآتية لأغراض تشخيصية إضافة إلى استخدامها في تحفيز المناقشة داخل الصف.

قررت "آرني" أن تشتري قميص لها. وقد قدم مخزن "باري" صفقة تجارية لبيع القميص بحسم 30٪ من السعر المدرج، أما مخزن شارلي رخص الثمن فيعرض غالبا حسما قدره 20٪ للنفس القميص من نفس السعر المدرج وعلى كل حال. فإن مخزن "شارلي" يعرض القميص حسما قدره 10٪ من السعر المحصوم أصلا 20٪. من أي مخزن ستحصل "آرني" على الحسم الأكبر في سعر القميص هذا اليوم؟

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

قد لا يترك الطلبة، بصورة مباشرة، الفرق القائم بين الحسومات التي عرضها المخزنان في المسألة أعلاه. وقد يشعر بعض الطلبة بأن هذين المخزنين يعرضان نفس مقدار الحسم. وبمساعذك سيتمطيع الطلبة البدء بملاحظة في حين أن الصفقة التجارية لمخزن "باري" قد عرضت حسما مقداره 30٪ من السعر الأصلي، فإن مخزن "شارلي"

بالحقيقة، على تحويل أي عدد من الحسمومات المتعاقبة عندما نريد تحويلها إلى حسم مكافئ منفرد.

إن السؤال الطبيعي الذي يفرض نفسه في هذه النقطة سوف يمتحن بدقة طبيعة "الزيادات المتعاقبة"، أو "النقصان المتعاقب" و "الزيادة". نظراً لأن الزيادة تحتاج إلى زيادة نسبة من السعر إلى السعر الأصلي، بينما يتطلب الحسم طرح نسبة من السعر من السعر الأصلي، فيتوقع من الطالب أن يحزر/يخمن بأن تقانة تحويل الزيادات المتعاقبة، أو مجموعة من الزيادات المتعاقبة والحسمومات المتعاقبة إلى زيادة أو حسم منفرد سيكون مشابهاً لتقانة التحويل المستخدمة في الحسمومات المتعاقبة. اقترح عليهم العمل على تطبيق هذه التقانة.

إن زيادة مساحة تطبيق تقانة التحويل هذه بحيث تتضمن الزيادات إضافة إلى الحسمومات ستتيح للطلبة فرصة اعتبار مسائل مثل ما يأتي:

عندما يتم تقليل أسعار الدخول إلى لعبة كرة السلة بنسبة 25٪ فإن حضور المباراة قد ازداد بنسبة 35٪. ما هو مقدار تأثير هذه التغييرات على العائد اليومي؟

في حل هذه المسألة ينبغي أن يكون عمل الطالب مشابهاً لما يأتي :

$$\begin{aligned} 1- 25\% &= 0.25 & 35\% &= 0.35 \\ 2- 1.00-0.25 &= 0.75 & 1.00+0.35 &= 1.35 \\ 3- (0.75)(1.35) &= 1.0125 \\ 4- 1.0125 - 1.0000 &= 0.0125 \\ 5- 0.0125 &= 1.25\% \text{ زيادة} \end{aligned}$$

قد ترغب بسؤال طلبتك عن شعورهم بصدد تحديد مقدار صافي التأثير لحسم مقداره 10٪ متتابع مع زيادة مقدارها 10٪. بصورة عامة فإن ظن الطلبة سوف يتجه صوب فكرة أن هاتين الدفعتين سوف تعادل إحداها الأخرى، مع إبقاء السعر الأصلي دون تغيير. ومع ذلك، ينبغي تشجيعهم على تطبيق تقانة التحويل. إن صافي تأثير هذين التغييرين (الحسم والزيادة) هو بالحقيقة 1٪ وليس كما كان ظن الطلبة.

إن الجدول الآتي الذي يحوي على حسمومات وزيادات متعاقبة بنفس النسبة المئوية سوف يرشد الطلبة إلى إنشاء حدس ذكي حول نقطة "التغيير المتعادل" Break Even Poin.

$$[p(1 - \frac{d_1}{100})] - [p(1 - \frac{d_1}{100})](\frac{d_2}{100})$$

السعر بعد احتساب نسبة الحسم الثانية، وعليه سيكون السعر الجديد بعد احتساب مقدار الحسم الثاني:

$$1 - (1 - \frac{d_1}{100})(1 - \frac{d_2}{100})$$

من السعر المثبت الأصلي.
وعليه فإن

$$1 - (1 - \frac{d_1}{100})(1 - \frac{d_2}{100})$$

تعرض الحسم المقتطع من السعر الأصلي لفرض الحصول على السعر الجديد.

وعليه، فإن حسمين متعاقبين مقدارهما $d_1\%$ و $d_2\%$ يكافئان حسماً منفرداً مقداره:

$$1 - \left(1 - \frac{d_2}{100}\right) \left(1 - \frac{d_1}{100}\right)$$

عبر ترجمة هذه الصيغة الجبرية إلى صيغة لفظية سيكون الطلبة قادرين على إنشاء التقانة البسيطة الآتية لتحويل الحسمين المتعاقبين إلى حسم مكافئ واحد.

1- حول كل من الحسمين المتعاقبين إلى حسم عشري.
2- إطرح كل من هذين الحسمين العشريين من المقدار الكلي (أي 1.00).

3- اضرب نتائج الخطوة 2.

4- اطرح نتائج الخطوة 3 من المقدار الكلي (أي 1.0).

5- حول نتائج الخطوة 4 إلى نسبة مئوية.

إن تطبيق هذه القواعد على الحسمين المتعاقبين 20٪ و 10٪، ينبغي أن يظهر للطلبة ما يأتي :

$$\begin{aligned} 1- 20\% &= 0.20, & 10\% &= 0.10 \\ 2- 1.0-0.20 &= 0.80, & 1.0-0.1 &= 0.9 \\ 3- (0.8)(0.9) &= 0.72 \\ 4- 1.00-0.72 &= 0.28 \\ 5- 0.28 &= 28\% \text{ (الحسم المكافئ)}. \end{aligned}$$

سيلاحظ الطلبة بأن القواعد المذكورة أعلاه لا تحدد عدد الحسمومات المتعاقبة التي ستأخذها بعين الاعتبار. وسيشجعهم هذا الأمر على دراسة الحالة التي يوجد فيها أكثر من حسمين متعاقبين بحاجة أن يحولوا إلى حسم مكافئ واحد. وينبغي أن يستمر الطلبة بأسلوب مشابه للأسلوب الذي استخدمناه سابقاً مع الحسمين المتعاقبين، وسيجدوا بأن نفس القواعد تنطبق،

التقييم اللاحق Postassessment

- دع الطلبة يحاولون حل بضعة مسائل تشابه ما يأتي :
- 1- أرادت "أليس" شراء فستان بسعر قدره \$20. إن أحد المعارض الذي يعمد غالباً إلى حسم أسعار فساتينه بنسبة $12\frac{1}{2}\%$ قد عرض حسمًا إضافيًا مقداره 20% على السعر المحسوم أصلاً. وفي معرض قريب وجدت أليس بأنه قد عرض نفس الفستان بحسم منفرد مقداره 32% . أي من الخزينين يعرض السعر الأقل للفستان؟
 - 2- عندما نقص سعر المجلة بنسبة 15% ازدادت المبيعات بنسبة 20% كيف تأثرت المبالغ المستلمة بهذه التغييرات؟

مراجع References

- Posamentier, Alfred S., Student! Get ready for the SAT: Problem Solving Strategies and Practical Tests, Thousand Oaks, CA: Growin Press, 1996.
- Posamentier, Alfred S., and S. Krulik, Teachers! Prepare Your Student for the Mathematics for SAT I: Methods and Problem Solving Strategies, Thousand Oaks, CA: Growin Press, 1996.
- Posamentier, Alfred S., and Charles T. Salkind, Challenging Problem in Algebra, New York: Dover, 1996.

تغييرات متعاقبة						
1.0	0.5	1	5	10	15	20
1.0	0.5	1	5	10	15	20
0.0001	0.0025	0.01	0.25	1	2.25	4
الحسم % زيادة % تغيير الحسم الكافئ						

قد يكون مقنناً للطلبة اكتشاف أي مجموع من الحسومات والزيادات المتعاقبة التي ستبقي المبلغ الأصلي كما هو دون تغيير. إن إحدى الطرق المناسبة ستكون بتوظيف تقانة التحويل لحسم متعاقب مقداره $d\%$ وزيادة متعاقبة مقدارها $i\%$:

$$1 - (1-d/100)(1+i/100) = 0;$$

$$1 - (1-d/100) + i/100 - di/100^2 = 0;$$

$$100d - 100i + di = 0; d = \frac{100i}{100 + i} \quad \text{أو}$$

$$i = \frac{100d}{100 - d}$$

إن الجدول التالي يظهر القيم المحتملة لكل من d (الحسم) و i (الزيادة).

25	10	75	50	20	16.666	9.0909	0	d
33.333	11.111	300	100	25	20	10	0	i

منذ الآن سيكون لدى الطالب معرفة لا بأس بها في موضوع النسب المئوية المتعاقبة. إن تقانة التحويل التي عرضت في هذا النموذج Model تمتاز بكونها سهلة التذكر مثل الخطوات الأساسية التي تدعو إلى: الطرح (و/أو الجمع)، الضرب، والطرح (و/أو الجمع).

العوامل الأولية والمركبة للعدد الصحيح

Prime and Composite factors of a whole number

18

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيحدد الطلبة العدد الكلي للعوامل، الأولية والمركبة لعدد صحيح مركب.
2. سيحدد الطلبة كل عنصر من عناصر مجموعة العوامل الأولية والمركبة لهذا العدد.

تعرض هذه الوحدة أساليب مختلفة لعملية التحليل العملي لعدد ما، وتتيح للطلبة فرصة الحصول على مجموعة متكاملة من جميع العوامل المختلفة لعدد مركب صحيح. وفي نفس الوقت، تساعد هذه الوحدة الطلبة على فهم أكثر عمقا لعملية التحليل العاملي.

3 سجد الطلبة مجموع جميع عناصر هذه المجموعة.

التقييم السابق Pre Assessment

ينبغي أن يكون الطلبة على دراية كافية بالقواعد الأساسية التي تخص قابلية القسمة، وقادرين على إيجاد العوامل الأولية لأي عدد.

ينبغي أن تستمر بنفس العملية لحين استنفاد جميع الصفوف. في حالة مثالنا هذا، 3960، سنحصل بالنهاية على:

$1 \times 1 \times 1$	$1 \times 1 \times 2$	$1 \times 1 \times 2^2$	$1 \times 1 \times 2^3$
$1 \times 1 \times 3$	$1 \times 2 \times 3$	$1 \times 2^2 \times 3$	$1 \times 2^3 \times 3$
$1 \times 1 \times 3^2$	$1 \times 2 \times 3^2$	$1 \times 2^2 \times 3^2$	$1 \times 2^3 \times 3^2$
$1 \times 1 \times 5$	$1 \times 2 \times 5$	$1 \times 2^2 \times 5$	$1 \times 2^3 \times 5$
$1 \times 3 \times 5$	$2 \times 3 \times 5$	$2^2 \times 3 \times 5$	$2^3 \times 3 \times 5$
$1 \times 3^2 \times 5$	$2 \times 3^2 \times 5$	$2^2 \times 3^2 \times 5$	$2^3 \times 3^2 \times 5$

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لإيجاد مجموعة العوامل الأولية والمركبة لعدد محدد، ينبغي أن تجد أولاً العوامل الأولية للعدد، ثم تحتسب جميع حواصل الضرب المحتملة لهذه العوامل. ولإيجاد العوامل الأولية للعدد، يمكن استخدام تقانة القشارة (Peeling)، فعلى سبيل المثال، لإيجاد العوامل الأولية للعدد 3960، ينبغي أن تتبع ما يلي:

- 2) $\frac{3960}{2} = 1980$
- 2) $\frac{1980}{2} = 990$
- 2) $\frac{990}{2} = 495$
- 2) $\frac{495}{3} = 165$
- 3) $\frac{165}{3} = 55$
- 5) $\frac{55}{5} = 11$

إن العوامل الأولية للعدد 3960 هي:

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 11$$

يمكن احتساب عدد العوامل لعدد ما بحاصل ضرب الأسس

(يضاف لكل منها 1) لاختلاف العوامل في عملية تحليل العوامل الأولية للعدد موصوفة بصيغة أسية Exponential.

وعليه، فإن العدد الكلي للعوامل الخاصة بالعدد 3960 سوف نحصل عليها من حاصل الضرب:

$$(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

ولإيجاد كل من العوامل الـ 48، اصنع الجدول الذي يفسر

نفسه - بنفسه self-explanatory الآتي:

1	2	2 ²	2 ³
1	3	3 ²	
1	5		
1	11		

والآن دع الطلبة يقومون بضرب كل عدد في الصف الأول

بالعدد في الصف الثاني:

1×1	1×2	1×2^2	1×2^3
1×3	2×3	$2^2 \times 3$	$2^3 \times 3$
1×3^2	3×3^2	$2^2 \times 3^2$	$2^3 \times 3^2$

إن كل حاصل ضرب سيتم ضربه بكل رقم في الصف

الثالث:

يمكن للطلبة أن يحصلوا على نفس النتائج بطريقة أكثر سرعة وسهولة: جد القواسم لكل من العوامل في أعداد العوامل الأولية عندما تكتب بصيغة أسية. وستكون في مثالنا:

$$2^1 = 2 \quad 2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \quad 3^1 = 3 \quad 3^2 = 9 \quad 5^1 = 5 \quad 11^1 = 11$$

دع الطلبة يعطون جدولاً يتألف الصف الأول من العدد a (أنظر أدناه). وليقم الطلبة برسم خط وضرب لكل هو الأعداد في الموجود فوق هذا الخط سيقوم الطلبة برسم خط بعدد b بجميع الأعداد الموجودة فوق الخط c جديد وضرب العناصر في الثاني. ستستمر العملية لحين ضرب جميع القواسم لكل عامل في أعداد العوامل الأولية.

1	2	4	8	I
3	6	18	24	II
9	18	36	72	
5	10	20	40	
15	30	60	120	III
45	90	180	360	
11	22	44	88	
33	66	132	264	
99	198	396	792	IV
55	110	220	440	
165	330	660	1320	
495	990	1980	3960	

: $\theta=i$ ، $p=1$ ، $\beta=2$ ، $\alpha=3$ ، $d=11$

$$s = \frac{2^4-1}{2-1} \cdot \frac{3^3-1}{3-1} \cdot \frac{5^2-1}{5-1} \cdot \frac{11^2-1}{11-1}$$

$$= \frac{15}{1} \cdot \frac{26}{2} \cdot \frac{24}{4} \cdot \frac{120}{10}$$

$$= 15 \times 13 \times 6 \times 12$$

$$= 14,040$$

التقييم اللاحق Postassessment

أرج الطلبة إلى حساب العدد الكلي للعوامل ثم إيجاد كل من هذه العوامل (سواء أكان أوليا أو مركبا) لكل مما يأتي:

أ- 3600

ب- 540

ج- 1680

د- 25725

جد مجموع جميع العوامل في كل من الحالات أعلاه.

إن الجدول الذي يحوي الـ 48 عاملا التي نبحث عنها، تبتدئ بالعدد 1 وتنتهي بالعدد المحدد لدينا 3960.

إن القسم I تتألف من العدد I والعوامل في a. ويتألف القسم II من حاصل ضرب كل عدد في b مع كل عدد في I.

ونشأ القسم III من حاصل ضرب كل عدد في c مع الأعداد في I و II. وأخيرا جاء القسم IV والذي نتج عن ضرب كل عدد في d مع كل عدد في كل من I و II و III. ضم الجدول $12 \times 4 = 48$ عاملا، حيث تظهر فيه جميع عوامل العدد 3960: الأولية والمركبة.

لإيجاد مجموع العوامل للعدد N، دعنا نصف العوامل الأولية له بواسطة: $a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdot d^{\delta}$ ، بحيث $N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdot d^{\delta}$.

إن مجموع جميع عوامل N سوف تحدد الصيغة الآتية:

$$s = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \cdot \frac{d^{\delta+1}-1}{d-1}$$

وفي مثالنا السابق، $c=5$ ، $b=3$ ، $a=2$ ، $N=3960$

نظام العد الأولي

19

Prime Numeration system

إلى عوامله الأولية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لجعل الطلبة أكثر دراية بنظام العد الأولي، دعمهم يتأملون المسائل الآتية:

(أ) $5 \cdot 4 = 9$

(ب) $12 \cdot 24 = 36$

(ج) $8 \div 2 = 6$

في البداية سيصاب الطلبة بحيرة وإرباك، وبعد إجراء تفحص إضافي لما هو مألوف مع الأسس سيبدأون بالتفكير من خلال التخوم الجديدة.

لا يزال هذا النظام مختلفا تماما عن أي نظام عد تمت دراسته سابقا.

في نظام العد الأولي، ولا يوجد ثمة أساس Base وتكون

ستعرض هذه الوحدة طريقة غير مألوفة للتعبير عن الأعداد. سيسهم أخذ نظام العد (الغريب) بمن الاعتبار في تعميق فهم الطلبة بنظام قيمة المرتبة Place Value System، بالإضافة إلى تكوين إدراك كامل عن التحليل إلى العوامل الأولية.

أهداف الأداء Performance Objective

1. سيقوم الطلبة بتحويل الأعداد من نظام العد الأولي إلى نظام العد العشري.
2. سيقوم الطلبة بتحويل الأعداد من نظام العد العشري إلى نظام العد الأولي.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون لدى الطلبة معرفة كافية بماهيمية العد الأولي، وأن يكونوا قادرين على التحليل العائلي لعدد عشري

العدد الحالي، حاول أن تتحداهم بضرب $5_p = 4_p$ والذي يمكن كتابته بصيغة $2^5 = 2^4 = 2^3 = 512$. وعليه فإن $9_p = 5_p \cdot 4_p$. والآن دعهم يعتبرون $29_p = 2^9 = 3^2 \cdot 2^4 \cdot 2^5 = 3^2 \cdot 4_p = 25_p$ (أو 4608). يمكن عرض أمثلة أخرى ذات صلة بالموضوع (مثال: $8_p = 2_p$).

ينبغي أن يوضح للطلبة بأن عمليات الجمع والطرح قد تحتاج التحويل إلى نظام العد العشري قبل الإضافة، أو الطرح فعلياً. إن هذه المسائل ستوفر للطلبة فرصة التمرن بالعمل مع الأسس بطريقة جديدة وغير مألوفة. كما يمكن أن يجر نظام العد الأولي لاستعراض القاسم المشترك الأعظم، والمضاعف المشترك الأصغر لعددين من الأعداد.

افترض بأن الطلبة يحتاجون إلى إيجاد القاسم المشترك الأعظم للعددين 18,720 و 3,150. في هذه الحالة ينبغي عليهم أن يفهموا هذه العددين العشريين إلى نظام العد الأولي للحصول على: 100125_p و 12221_p . وبإدراج "أصغر قيمة لكل مرتبة" لإنشاء عدد جديد، سوف يحصلون على 121_p ، وهو القاسم المشترك الأعظم للعددين.

والآن افترض بأن الطلبة قد اعترضتهم مسألة إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 18,720 و 3,150. إن قيامهم بتغيير هذين العددين العشريين إلى نظام العد الأولي للحصول على 100125_p و 122_p ، ينبغي عليهم إدراج "أعلى قيمة لكل مرتبة" للحصول على 101225_p ، وهو المضاعف المشترك الأصغر للعددين.

سوستمتع الطلبة بتطبيق طرق نظام العد الأولي على مسائل أخرى، والتي تتطلب إيجاد القاسم المشترك الأعظم أو المضاعف المشترك الأصغر لأعداد محددة (يمكن اعتبار أكثر من عددين في نفس الوقت). إن القيمة العددية الحقيقية لهذه الطرق تستند إلى توزيع هذه الطرق تستند إلى تسويق هذه الطرق وتبنيها. كما ينبغي أن يعمد المعلمون إلى عرض هذه المبررات حالما يتقن الطلبة استخدام تقاناتها.

والآن دع الطلبة يقومون بتحويل O_p إلى 29_p إلى أعداد عشرية مع تدوين إجاباتهم. سيبدأ الطلبة بملاحظة إنشاء الأعداد العشرية بطريقة غير مألوفة.

حاول أن تستخرج من الطلبة تطبيقات محتملة أخرى لنظام العد الأولي.

قيمة كل مكان هي عبارة عن عدد أولي. إن المكان الأول (ابتداء من اليمين) هو العامل الأول، 2، والمكان الثاني (إلى اليسار) هو العامل الثاني، 3. ويستمر هذا الأمر مع الأعداد الأولية المتعاقبة مع كل مكان يعقبها (بالتحرك نحو اليسار) لتقابل العدد الأولي الذي يليه. يمكن أن يعرض هذا باستخدام شريطة Dash لكل مكان، وعرض قيمته تحت الشريطة.

2 3 5 7 11 13 16 19 23 29
وكما هو الحال في نظامنا العشري، فإن نظامنا الأولي، هذا سوف يستمر نحو اليسار بصورة غير محدودة.

ولنفرض إيجاد قيمة عدد في النظام العشري، فإن الأرقام التي تحتل أي مكان سوف تضرب بقيمة المكان ثم يصار إلى إضافتها. ومن ناحية ثانية في نظام العد الأولي الحالي، يتم الحصول على قيمة العدد عن طريقة اخذ قيمة كل مكان إلى قوة العدد الذي يتبوأ تلك المرتبة ثم "الضرب". على سبيل المثال، العدد 145_p (الرمز السفلي p سوف يستخدم للإشارة إلى أن العدد يقع ضمن نظام العد الأولي) يساوي $5^1 \cdot 3^4 \cdot 2^5 = 5 \cdot 82 \cdot 32 = 12960$. لاحظ بأن أسس الأعداد الأولية 5، 3، 2 هي 4، 5 على التوالي.

دع الطلبة يمارسون التحويل من نظام العد الأولي إلى نظام العد العشري، وعندما يبدأون بالشعور بنوع من الراحة مع هذا العمل، دعهم يأخذون بنظر الاعتبار عرض 0، 1. دع الطلبة يعبرون عن 0 و 10_p بوصفها أعداد عشرية.

حاول أن تبين للطلبة بأنه في ضوء التعريف $2^0 = 1$ ، وحاول أن تستنبط بواسطة الطلبة بأن تمثيل الصفر سيكون مستحيلاً في نظام العد الأولي. ولنفرض تحويل عدد من النظام العشري إلى نظام العد الأولي، تصبح عملية مراجعة تحليل العدد إلى عوامله الأولية أمراً ضرورياً للغاية.

حاول أن توضح للطلبة بأن أي عدد صحيح أكبر من واحد يمكن وضعه كحاصل ضرب عوامل أولية بطريقة دقيقة. (النظرية الأساسية للحساب). على سبيل المثال، العدد 420 يمكن تحليل عوامله كما يأتي: $7^1 \cdot 5^1 \cdot 3^1 \cdot 2^2$. وعليه فإن $420 = 1112_p$. دع الطلبة يحللون إلى العوامل الأولية: (أ) 144، (ب) 600، (ج) 1960، مع وصف ما يكافئها من نظام العد الأولي. حاول أن تؤكد بأن أسس العوامل الأولية هي عبارة عن أرقام الأعداد الأولية. وعندما يتقن الطلبة التعامل مع نظام

التقييم اللاحق Postassessment

ينتهي على الطلبة :

1. وصف كل من الأعداد الآتية وفق نظام العد العشري :

(أ) 50_p (ب) 24_p (ج) 15_p (د) 22_p (هـ) 1234_p

2. عبّر عن كل من الأعداد العشرية الآتية كحاصل ضرب

أعداد أولية ، ثم من خلال نظام العد الأولي :

(أ) 50

(ب) 100

(ج) 125

(د) 400

(هـ) 1000

(و) 260

(ز) 350

3. حل المسائل الآتية :

(أ) $3_p \cdot 6_p$

(ب) $12_p \cdot 13_p$

(ج) $6_p \div 3_p$

نظام أول	نظام عشري
0_p	$2^0 = 1$
1_p	$2^1 = 2$
2_p	$2^2 = 4$
3_p	$2^3 = 8$
4_p	$2^4 = 16$
5_p	$2^5 = 32$
6_p	$2^6 = 64$
7_p	$2^7 = 128$
8_p	$2^8 = 256$
9_p	$2^9 = 512$
10_p	$3^1 \cdot 2^0 = 3$
11_p	$3^1 \cdot 2^1 = 6$
12_p	$3^1 \cdot 2^2 = 12$
13_p	$3^1 \cdot 2^3 = 24$
14_p	$3^1 \cdot 2^4 = 48$
15_p	$3^1 \cdot 2^5 = 96$
16_p	$3^1 \cdot 2^6 = 192$
17_p	$3^1 \cdot 2^7 = 384$
18_p	$3^1 \cdot 2^8 = 768$
19_p	$3^1 \cdot 2^9 = 1536$
20_p	$3^2 \cdot 2^0 = 9$
21_p	$3^2 \cdot 2^1 = 18$
22_p	$3^2 \cdot 2^2 = 36$
23_p	$3^2 \cdot 2^3 = 72$
24_p	$3^2 \cdot 2^4 = 144$
25_p	$3^2 \cdot 2^5 = 288$
26_p	$3^2 \cdot 2^6 = 576$
27_p	$3^2 \cdot 2^7 = 1152$
28_p	$3^2 \cdot 2^8 = 2304$
29_p	$3^2 \cdot 2^9 = 4608$

20

امتدادات المراتب العشرية المتكررة

Repeating Decimal Expansion

لاحظ أيضاً بأن المراتب العشرية المنتهية يمكن أن تعد مراتب عشرية متكررة في ضوء التكرار اللامتناهي من الأصفار.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابتدئ بجعل الطلبة يعملون على كسور بصيغة $\frac{1}{n}$ ، والتي سوف تجربهم على تركيز اهتمامهم (وعلمهم التخميني) على المقام. وإذا وجد الطلبة صعوبة في التمثيل الرقمي للمراتب العشرية المتكررة دون الإنجاز الفعلي لعملية التمثيل Expansion، اقترح قيامهم بتحليل كل من عوامل المقامات للوقوف على إمكانية وجود أية أنماط واضحة. وسيرون بسرعة بأن المراتب العشرية تنتهي، فقط، وإذا كانت فقط العوامل الأولية للمقام 2 أو 5. ويستطيع الطلبة أن يبرروا، بسهولة، بأنه حين يكون للبسط فائزة عشرية ومجموعة من الأصفار، يصبح من مضاعفات العشرة (لأغراض عملية القسمة فقط)، نظراً لأن العوامل الأولية للعشرة هي 2 و 5، وستثمر عملية القسمة على هذين العددين فقط عن إنهاء المراتب العشرية المتكررة وتحديد نقطة نهاية لعملية القسمة.

حاول أن تتحدى الطلبة حول تحديد عدد المراتب العشرية التي يواصلون العمل باتجاهها قبل أن يصبح نمطها جلياً. في بعض الحالات، كما هو في الكسر $\frac{1}{3}$ ، نحتاج إلى مرتبتين عشريتين قبل أن يصبح النمط جلياً. وفي حالات أخرى، لن تكون العملية بهذه البساطة والوضوح. ادع الطلبة إلى إيجاد النمط المتكرر للكسر $\frac{1}{17}$. أن تعديد هذا الكسر العشري يحتوي على 16 مرتبة قبل وضوح أي نمط ظاهر.

$$1/17 = .0588235294 117647 0588235294 117647$$

قد يرغب بعض الطلبة بتعميم وافترض إن الكسر $\frac{1}{n}$ يمتلك (n-1) من المراتب العشرية المتكررة. ولكن الكسر $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ يحتوي على مرتبة عشرية متكررة واحدة والذي يحض نظريتهم. من ناحية ثانية، فإن امتحان أنواع مختلفة من

إن الاصطلاحين "غير قابل على الانتهاء Ending Never" و "اللامتناهي Infinite" يؤيدان إلى إرباك فهم الطلبة في كثير من الأحيان. أن أولى الأماكن التي يواجه الطلبة فيها هذين المفهومين في المدرسة الثانوية الدنيا حيث يشخص أمامهم امتدادات الفائزة العشرية - غير المتقطعة Non termination Decimal Expansion.

يدرك الطلبة تماماً طبيعة الحاجة القائمة لرموز وتسميات محددة عندما يجابهون المراتب العشرية المتكررة، والتي تنشأ عن بعض الصيغ الكسرية. وسيكتشف الطلبة في هذه الوحدة الأنماط، والطرق الإجرائية الحسابية التي تبدو متناقضة ظاهرياً والتي يكثر وجودها مع المراتب العشرية المتكررة.

أهداف الأداء Performance Objective

1. سيكون الطلبة قادرين على تحديد أي من الأعداد القياسية التي ستنتج امتدادات الفائزة العشرية، والتي تقبل انقطاعاً (توقف).
2. سيحدد الطلبة أقصر امتداد للدورة المتكررة Repeating Cycle.
3. سيصبح الطلبة قادرين على استخدام المكافئات العشرية لإيجاد مراتب عشرية متكررة أخرى.
4. سيقوم الطلبة باختبار طريقة بديلة لتحديد الامتدادات العشرية.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بكييفية التقييم من الصيغة الكسرية $\frac{a}{b}$ (Functional Form) للمدد القياسي، إلى مكافئه العشري، كذلك يجب أن تكون لديهم معرفة جيدة بالتحليل إلى العوامل الأولية.

حاول أن تجعل الطلبة يخمنون أي من الكسور الآتية سوف تصبح مراتب عشرية متكررة: $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{6}$. ودعمهم يعملون على تحويل الكسور إلى كسور عشرية للتأكد من دقة تخميناتهم.

الدنيا. بالمقابل فإن البرهان الآتي، والذي يستطيعون أن ينجزوه بأنفسهم، سوف يلقي الضوء على المسألة ويشرحها وضوحاً.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \overline{.3} \\ + \frac{2}{3} &= \overline{.6} \\ 1 &= \overline{.9}\end{aligned}$$

وبالمثل: بما أن

$$\begin{aligned}\frac{1}{9} \times 9 &= \overline{.1} \times 9 \\ \frac{9}{9} &= \overline{.9} \\ 1 &= \overline{.9}\end{aligned}$$

غالباً ما يركز الطلبة، ويبدلون المزيد من الجهد لفرض الفهم عندما يحسون بأنهم يتعلمون شيئاً جديداً. إن الطريقة الآتية، والتي تبرز الخطوط العامة لعملية القسمة، والمستخدم في التحويل من الصيغة الكسرية إلى الصيغة العشرية، سوف تمنح للطلبة أداة جديدة لإيجاد المرتبة العشرية المكررة.

لإيجاد التعميد العشري للكسر $\frac{3}{7}$ ، افترض $r_n = \frac{3}{7}$ واضربه بالعدد 10

$$1) \quad \frac{3}{7} \times 10 = \frac{30}{7} = 4 \frac{2}{7}$$

والآن دع 4 تتبوأ مرتبة العشرات بالكسر العشري واستخدم $\frac{2}{7}$ بوصفه المتبقي الجديد 12. عاود العملية ثانية، باستخدام الكسر بوصفه المتبقي الجديد واحتفظ بالجمع كرقم عشري للمرتبة التالية:

$$2) \quad \frac{2}{7} \times 10 = \frac{20}{7} = 2 \frac{6}{7} \quad r_2 = \frac{6}{7} \quad \text{مرتبة المئات} = 2$$

$$3) \quad \frac{6}{7} \times 10 = \frac{60}{7} = 8 \frac{4}{7} \quad r_3 = \frac{4}{7} \quad \text{مرتبة الآلاف} = 8$$

$$4) \quad \frac{4}{7} \times 10 = \frac{40}{7} = 5 \frac{5}{7} \quad r_4 = \frac{5}{7} \quad \text{مرتبة عشرات الآلاف} = 5$$

$$5) \quad \frac{5}{7} \times 10 = \frac{50}{7} = 7 \frac{1}{7} \quad r_5 = \frac{1}{7} \quad \text{مرتبة مئات الآلاف} = 7$$

التعميدات لكسر بصيغة $\frac{1}{n}$ ، ستظهر للطلبة بجملاً، بأن كل من التعميدات تمتلك كحد أعلى $(n-1)$ من الأعداد المتكررة.

كما ينبغي أن يدرك الطلبة تماماً بأن كل من المراتب العشرية للتعميد تأتي من المتبقي بعد عملية القسمة للخطوة السابقة. ولكل من البواقي هناك فقط $(n-1)$ من الاختيارات (لا يمكن أن يساوي المتبقي صفراً لأن العملية سوف تنتهي بعد ذلك. ولا يمكن أن يساوي n لأنه سيقبل القسمة مرة ثانية). وإذا كان المتبقي مساوياً لأي عدد متبقي في خطوات سابقة، سيجد الطلبة المراتب العشرية المتكررة، أما إذا لم يصلوا إلى هذه الحالة، فينبغي الاستمرار بعملية القسمة لحين الوصول إلى مرحلة تكرار المتبقي. إن هذا الأمر سوف يحصل في، ويحدوده القصوى، ويحدد $(n-1)$ من الخطوات. وعليه فإن $\frac{1}{n}$ ، إذا كان متكرراً، سيكون لديه، كحد أعلى، $(n-1)$ من المراتب العشرية.

وسيجد الطلبة متعة في ملاحظة إن التعميد التكرار لعدد مثل $\frac{1}{7}$ سوف ينتج تعميدات لكل من $\frac{6}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$. ويمكن إعادة كتابة الكسر $\frac{2}{7}$ بدلالة الكسر $\frac{1}{7}$ ، وعليه:

$$\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 2 \times \overline{.142857} = \overline{.285714}$$

بإضافة مراتب عشرية - متعددة مختلفة، سيصبح الطلبة قادرين على إيجاد مراتب عشرية - متعددة مختلفة، كما سيصبح الطلبة قادرين على إيجاد مراتب عشرية متكررة جديدة. على سبيل المثال:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \overline{.333333} \\ + \frac{1}{7} &= \overline{.142857} \\ \hline \frac{10}{21} &= \overline{.476190}\end{aligned}$$

لإيجاد المراتب العشرية المتكررة العامة للكسر $\frac{1}{n}$ عندما تكون $n = 21$. دع الطلبة يقومون بتقسيم $\frac{1}{21}$ على المقام، 10، للحصول على $\overline{.047619}$.

إن العمل مع المراتب العشرية، وخلال إجراء العمليات الحسابية المختلفة سيوصل الطلبة إلى الحقيقة التي مفادها أن $\overline{.1} = \overline{.9}$. يصعب إدراك هذا البَدْء بواسطة طلبة المدارس الثانوية

2. حدد العدد الأقصى من المراتب العشرية في الدورة المتكررة لكل من: $\frac{3}{7}$ ، $\frac{4}{9}$ ، $\frac{1}{37}$.
3. إذا علمت أن $\frac{1}{14} = .0714285$ ، جد التعميد العشري للكسر $\frac{3}{14}$ دون استخدام التقسيم.
4. برهن على أن $\frac{49}{5} = .5$ (ملاحظة: حاول أن تتأمل الكسور $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{3}$).
5. باستخدام الطريقة البديلة (التي نوقشت خلال هذه الوحدة) احسب الكسر $\frac{2}{9}$ بوصفه كسر عشري متعدد.

$$6) \quad \frac{6}{7} \times 10 = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7} \quad r_6 = \frac{3}{7}$$

مرتبة الملايين = 1

اخبر الطلبة بضرورة تكرار العملية لحين يكون المتبقي مساويا للقيمة التي ابتدأوا عندها. وفي هذه الحالة $r_6 = r_n = \frac{3}{7}$ وأن التعميد العشري سيكون: $.428571\overline{428571}$.

إن العرض الإيضاحي المناسب لهذه الطريقة هو أداة ممتازة لمساعدة الطلبة على فهم أكثر عمقا لما تتضمنه عملية القسمة، ولماذا تكون قيمة المتبقي عاملا حاسما في تحديد طول التكرار.

التقييم اللاحق Postassessment

ادع الطلبة إلى العمل على ما يأتي:

1. حدد أي من الكسور الآتية يعد منتهيا دون إيجاد التعميدات العشرية فعليا: $\frac{2}{9}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{3}{13}$ ، $\frac{19}{20}$.

مزايا المراتب العشرية المتكررة التامة

Peculiarities Of Perfect Repeating Decimals

21

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية ببعض مكافئات الكسور التي يكون المتبقي فيها صفرا، بينما تمتلك كسور أخرى فترات متكررة بأطوال مختلفة. يجب أن يبتدئ الطلبة العمل على تحويل الكسر $\frac{1}{7}$ إلى كسر عشري.

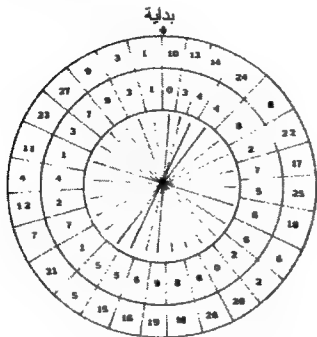
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

من الضروري الانتباه إلى أن تحويل A/P إلى كسر عشري، فإن المكرر يمتلك مراتبا لا تزيد على P-1، لأنه ينقسم A بواسطة P فهناك كحد أعلى P-1 من البواقي المختلفة، وحالما يظهر الباقي للمرة الثانية، فإن نفس التعاقب سوف يتكرر. إن المكررات التامة، بالإضافة إلى تعاقب البواقي P-1 التي تصاحب كلا منها، تمتاز بجملة من الخصائص الفريدة. وسوف نناقش في هذه الوحدة أكثر الخصائص بساطة وعمومية، ولكنك ستجد قائمة أكثر تفصيلا لأهم مبادئ المراتب العشرية المتكررة في كتاب

يمكن استخدام هذه الوحدة كمصدر متعمق يسلط ضوءا جانبيا على موضوع الكسور الاعتيادية والكسور العشرية، وذلك عن طريق بيان الخصائص "السحرية" لمرتبة محددة من الأعداد. إن الأعداد هي عبارة عن مقلوبات أعداد أولية، والتي تتكرر مكافئاتها العشرية بعد أقل من P-1 من المراتب، حيث تمثل P العدد الأولي. يطلق على مثل هذه الأعداد "مكررات تامة Perfect Reperends". وفي أي مرتبة عشرية متكررة، يطلق على التعاقب الذي يتكرر "مكرر Repetends". ينصح باستخدام هذه الوحدة بعد الوحدة السابقة.

أهداف الأداء Performance Objectives

- سيقوم الطلبة باختيار أمثلة متعددة عن المكررات التامة للتحقق من مبادئ محددة.
- سيكتشف الطلبة ويتعمق فهمهم بأفكار وآراء جديدة حول: القسمة، والبواقي، والمكافئات العشرية للكسور.



إن الدائرة الداخلية تمثل مكرر $\frac{1}{29}$ ، وأما الدائرة الخارجية فتعتمد تناقبات البواقى التي تظهر بعد كل عدد من أعداد الدائرة الداخلية. إن هذا الشكل الرسومي يمتلك الخصائص الآتية (شأن معظم الأشكال بجميع المكررات التامة).

1. إن أي اثنين من القتران المتقابلة قطرياً للمكرر تضيف لغاية 9.
2. إن أي اثنين من البواقى المتقابلة تضيف لغاية 29.
3. لضرب المكرر بالتغير a ($1 < a < 29$)، جد قيمة a في دائرة البواقى ثم ابدأ بالمكرر الجديد بصيغة عشرية منتبهاً العدد الذي يترافق مع a (باتجاه عقرب الساعة Clockwise).

قد لا يمتلك بعض الطلبة صبراً كافياً لاختبار هذه العموميات على الشكل السابق، ولكن يمكن إعداد شكل توضيحي آخر لأبي من المكررات التامة، ويستطيع الطلبة إعداد أشكالهم الخاصة المرتكزين في بداية عملهم إلى المعلومة التي تنص أن $\frac{1}{17}$ هو واحد من هذه الأعداد.

وفي هذا الموضع هناك خيار واحد لكي نشق طريقنا قدام مع القسمة عندما نقوم بتوليد مكرر: يمد تقسيم 19 إلى 1 إلى خمسة مراتب عشرية، سوف نحصل على متبقي مقداره 3.

$$(*) \quad \frac{1}{19} = 0.05263 \frac{3}{19} \quad \text{غير أننا نستطيع أن نلتصم من هذا}$$

$$(*) \quad \frac{1}{19} = 0.05263 + \frac{3}{19} \times 10^{-5} \quad \text{بمثل الرتبة العشرية}$$

الماسة.

Philosophy of Arithmetic, by Edward Brooks, (Norwood Editions), PP. 460-485.

إن إحدى أكثر الخصائص بساطة، والتي تعتمد إلى توضيحها هي أن مضاعفات $1 \leq P-1$ هي متغيرات دورية لمكرر $P/1$. وبعد أن يجد الطلبة قيمة $\frac{1}{7} = 0.142857$ ،

يمكن أن يقوموا بضرب الكسر العشري بالأعداد 2، 3، 4، 5، أو 6 فيحصلوا على الأجابة: 0.285714 ، 0.428571 ، 0.571428 ، 0.714285 ، 0.857142 ، وهي أيضاً عبارة

عن مكافئات عشرية للكسور $\frac{2}{7}$ ، $\frac{3}{7}$ ، $\frac{4}{7}$ ، $\frac{5}{7}$ ، $\frac{6}{7}$ ، على التوالي. بعد أن يتم فهم هذا الأمر وينجلي الغموض عنه، فإن

الطريقة المبسطة لإيجاد مضاعفات $\frac{1}{7}$ ستكون بإيجاد آخر مرتبة أولاً. على سبيل المثال، 4×0.142857 تنتهي بـ 8، لذا يجب

أن تكون القيمة 0.571428 . وعندما تكون الفترة أطول، أو عندما يظهر أي رقم أكثر من مرة واحدة في المكرر، فإن من

الضروري إيجاد آخر اثنين أو ثلاثة أرقام أولاً. أن تفسير هذا التغير الدوري يرتبط بحقيقة أن تقسيم P إلى 1، في النقطة التي

يكون عندها المتبقي A ، فإن نفس التناقبات سوف يبدأ وكما هو الحال عليه عند قسمة P إلى A . ونذكر أيضاً بأن كل A ممكنة ($1 < AP$) تظهر كمكتبي.

في بعض الحالات العارضة، وعندما يكون مكرر $1/P$ مضروباً بـ P فإن النتيجة تكون 0.999999. إن بعض المكررات التالية هي:

$$\frac{1}{17} = 0.0588235294117647$$

$$\frac{1}{19} = 0.052631578947368421$$

$$\frac{1}{23} = 0.043478260869562173913$$

إن المكررات الوحيدة، الأخرى، بحيث أن $P > 100$ هي $\frac{1}{97}$ ، $\frac{1}{61}$ ، $\frac{1}{59}$ ، $\frac{1}{47}$ ، $\frac{1}{29}$ =

إن صفة غريبة أخرى لافتة للنظر لهذه الأعداد تكمن في إمكانية تقسيم المكرر إلى قسمين متساويين، ويتعاقب اقصر، وأن مجموعهما هو 0.999999. إن عرضاً رسمياً توضيحياً لهذه الحالة يظهر في أدناه.

(د)	x	y	D
	0	3	
	1	5	2
	2	7	2
	3	9	2
	4	11	2
	5	13	2
	$y=2x+3$		

(ج)	x	y	D
	0	1	
	1	5	4
	2	9	4
	3	13	4
	4	17	4
	5	21	4
	$y=4x+1$		

(ب)	x	y	D
	0	1	
	1	3	2
	2	5	2
	3	7	2
	4	9	2
	5	11	2
	$Y=2x+1$		

(أ)	x	y	D
	0	1	
	1	4	3
	2	7	3
	3	10	3
	4	13	3
	5	16	3
	$y=3x+1$		

D ₂	D ₁	Y العدد الكلي للمستطيلات	X عدد المستطيلات الصغيرة
		0	0
	1	1	1
	2	3	2
1	3	6	3
1	4	10	4
1	5	15	5
1	6	21	6

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

ليمارس الطلبة نفس الأسلوب مع النمط الآتي: ما هو أكبر عدد للقطع التي يمكنك عملها بـ X من القصاصات؟



قطع — قطع — قطع — قطع —
قصاصات — قصاصات — قصاصات — قصاصات —

دع الطلبة يعملون ما يأتي:

D ₂	D ₁	Y عدد القطع	X عدد القصاصات
		1	0
	1	2	1
	2	4	2
1	3	7	3
1	4	11	4
1	5	16	5

لاحظ الفارق الأول، والذي يمتاز بكونه غير ثابت، بينما يبدو الفارق الثاني ثابتاً. لاشك أن أحد الطلبة سيفتح بالوصول إلى استكمال الصيغة الآتية:

دع الطلبة يلاحظون قيم الثوابت في كل حالة من الحالات السابقة. هل لاحظوا أي نمط؟ بالطبع سيلاحظون بأن الثابت هو قيمة y عندما تكون قيمة x صفراً. حاول أن تشد انتباه الطلبة إلى الفروق بين قيم y المتتالية. هل لاحظ الطلبة شيئاً؟ نعم، إن الفروق بين قيم y تساوي قيمة معامل x . ليعمل الطلبة على مجموعة من الأنماط المماثلة لحين امتلاكهم القدرة على إيجاد الأنماط بسرعة، مع الصيغ التي تخص كلا من هذه الأنماط.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

اطرح التمرين الآتي على طليتك، وليقوموا بإيجاد النمط والصيغة التي تصفه إذا توفرت لديهم القدرة على إنجاز ذلك. كم هو عدد المستطيلات جميعاً؟ اكمل الجدول.

y العدد الكلي للمستطيلات	x عدد المستطيلات الصغيرة	
	0	<input type="text"/>
	1	<input type="text"/>
	2	<input type="text"/>
	3	<input type="text"/>
	4	<input type="text"/>
	5	<input type="text"/>
	6	<input type="text"/>

من خلال ملاحظة المستطيلات، سيفتح الكثير من الطلبة في العُمر على النمط، وملء الفراغات السائدة في الجدول. دع الطلبة يدونون الفارق الأول، وسيظهر لهم بأن الفرق ليس ثابتاً، ثم ليدونوا الفارق الثاني، وسيجدون ثابتاً. دعهم يلخصون الحقائق التي عثروا عليها في جدول، وقد ينجح بعضهم في إيجاد الصيغة التي تخص النمط السائد في هذه المسألة، أيضاً.

الأول $(a+b)$. وإذا قمنا بإعادة اختبار النمط الأول، فإننا سننجح في اشتقاق الصيغة.

إن الثابت هو قيمة y عندما تكون قيمة x صفراً، وعليه فإن الثابت يساوي 1. D_2 يساوي $2a$ ، ولما كان D_2 يساوي 1 فإن قيمة a ستساوي $\frac{1}{2}$. D_1 يساوي $(a+b)$ ، ونظراً لكون D_1 يساوي 1، وقيمة a هي $\frac{1}{2}$ ، فإن قيمة b ستساوي $\frac{1}{2}$. وعليه ستكون الصيغة كما يأتي:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

التقييم اللاحق Post Assessment

أكمل الجداول الآتية واستنتج الصيغ المناسبة للأنماط الآتية عن طريق إيجاد الفارق الأول، والفارق الثاني.

y	x	y	x	y	x	y	x
2	0	0	0	0	0	3	0
3	1	13	1	5	1	6	1
6	2	34	2	14	2	13	2
11	3	63	3	27	3	24	3
	4		4		4		4
	5		5		5		5

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$$

هل هناك ثمة نمط سائد بين قيم الثوابت والمعاملات في المسألين السابقين؟ نعم، الثابت يمثل قيمة y عندما تكون قيمة x صفراً

دعنا نختبر الصيغة $y = ax^2 + bx + c$ ونجد قيم y لمجموعة من قيم x .

D_2	D_1	Y	X
		c	0
	a+b	a+b+c	1
2a	3a+b	4a+2b+c	2
2a	5a+b	9a+3b+c	3
2a	7a+b	16a+3b+c	4

دعنا نختبر النمط. كما وجدنا في الصيغ السابقة فإن y هو الثابت عندما تكون قيمة x صفراً. إن الفارق الأول هو $a+b$ ، وهو مجموع معاملات كل من x^2 و x . والفارق الثاني $2a$ يمثل ضعف قيمة معامل x^2 . إن قيمة الفارق الأول عندما يكون $x=1$ هو $a+b$. ونظراً لأننا على علم بقيمة المتغير a (يساوي نصف الفارق الثاني)، نستطيع إيجاد قيمة b عن طريق طرح a من الفارق

الأعداد الكبيرة جداً "جوجل" و "جوجلبيكس"

Googol and Googolplex

23

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حل المسائل الآتية:

- احسب حواصل الضرب الآتية: جد الحل دون استخدام القلم:
(أ) 63×10 (ب) 0.05×100 (ج) 951×1000
- احسب خوارج القسمة الآتية:
(أ) $10 \div 470$ (ب) $1000 \div 4862$ (ج) $1000 \div 46000$
- ما هو أكبر عدد تستطيع أن تفكر فيه؟

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

قد ترغب برواية القصة القديمة عن الصبيين اللذين دخلوا في

تعرض هذه الوحدة مناقشة الأعداد الكبيرة، وتقدم للطلاب آفاقاً رحبة بمضمار العالم المتناه للأعداد الكبيرة، مع بيان سهولة وصف هذه الأعداد باستخدام الرموز العلمية Scientific Notation.

أهداف الأداء Performance Objectives

- ستطعي أمثلة للطلبة حول الرموز العلمية والتي تستخدم في ميادين العلوم والرياضيات.
- بتحديد أي عدد، سيقيم الطلبة بتحويله إلى الرمز العلمي المكافئ له.

آلاف، حوالي 3,500 (أي $10^3 \times 3.5$ وفق الرمز العلمي). إن مائة قطعة من الصحائف تصنع حزمة يصل سمكها إلى 5 مليمترا أو 5/1 بوصة (كل 25.4 مليمتراً تكافئ بوصة واحدة). إن مليون قطعة من الصحائف ستؤلف برجاً يصل طوله إلى 55 ياردة، أو ما يعادل بصورة تقريبية بناية ذات 12 دور. افترض بأنك تقود سيارة بسرعة 65 ميل/ساعة، كم تستغرق من الوقت لكي تسافر بهذه السرعة مسافة مقدارها مليون من الأميال؟ (1/4 سنة).

كم هو مقدار كبر المليار؟ إن الميزانية الفيدرالية لعام 1981 قد طالبت بزيادة الضريبة بمقدار من الدولارات تزيد على عدد الثوان المضمرة منذ ولادة المسيح (عليه السلام). (ملاحظة: وفقاً لقابلية الصف المحدد، والوقت المتاح ينبغي على الطلبة القيام بتحويل جميع الأعداد الكبيرة إلى الرموز العلمية). ويجب أن يرشد الطلبة إلى حقيقة أن من المستحيل افتراضياً Virtually على العقل البشري إدراك ضخامة المليار. تذكر مقدار ارتفاع عمود يتألف من مليون صحيفة — إذا كانت مائة قطعة منها تصنع رزمة سمكها 5 مليمترا (حوالي 5/1 بوصة). إن مليار صحيفة من الورق سوف ينتج عنها برج ارتفاعه 31 ميلاً!

إن سيارة تسافر، بدون توقف، بسرعة قدرها 100 ميل/ساعة سوف تستغرق 1,140 سنة في سفرها لكي تقطع مليار ميلاً. إذا كنت تتقاضى 100 دولار أسبوعياً، فملياً أن تعمل لمدة 192307 عاماً لكي تحصل على مليار دولار. (إن بعض هذه الأمثلة يمكن أن تحتسب في آلة حاسبة إلكترونية).

ينبغي أن تطرح المسألة الآتية "صنع لي جون" معروفاً في اليوم السابق وقد استقرت منه عن طبيعة الكفاة التي يريد. كان جون حكيماً جداً، وقال لي: امتحني 1 Penny باليوم الأول، وبنسبتين في اليوم التالي، وأربعة بنسات في اليوم الثالث، واستمر على هذا النوال لمدة 64 يوماً بمضاعفة عدد البنسات في كل يوم جديد. "ما هو مقدار المبلغ الذي يتوجب علي دفعه إلى جون؟".

إن عمل جدول للمساءلة سوفور للطلبة فرصة جيدة لرؤية الأعداد وهي تنمو بسرعة، والمقدار الذي تصل إليه.

عدد البنسات Pennies	عدد الأيام
1	1
2	2
4	3
8	4
16	5
الخ	الخ
9.223.372.036.854.775.808	64

مناقشة عنيفة بالشارع. وقد نشأت المناظرة عندما حول كل صبي أن يذكر عدداً أكبر من عدد صاحبه، وبعد فترة، أدرك الصبيان بأن كلا منهما يستطيع ذكر عدد أكبر من العدد الذي ذكره صاحبه! تعد الأعداد من الأمور التي تجلب متعة عند اللعب بها. ويمكن إجراء عدة أمور مثوقة بواسطتها. ورغم ذلك، يفيد عن بالنا في أحيان كثيرة أن نطرح على أنفسنا سؤالاً هو: ما هي حقيقة العدد؟ ينبغي أن يسأل الطالب، كم هو مقدار المليون؟ وهل تستطيع أن تتخيل مجموع المليار الأول من الأعداد الطبيعية؟ لماذا نهتم بالأعداد ذات الفئات الكبيرة والتي لا نستخدمها؟ أو قد نستخدماً؟

في هذه النقطة سيكون لزاماً على المعلم أن يوضح لطلبته بأن العلماء الذين يستخدمون الأعداد الكبيرة جداً، أو الأعداد الصغيرة جداً غالباً ما يجازون إلى وصف هذه الأعداد بـرموز علمية.

ولتعليم كيفية استخدام هذا النظام العددي، سنحاول استدعاء بعض الأنماط السائدة في الرياضيات. وسترك الأمر للمعلم، في هذه النقطة بالذات، بعرض الرموز العلمية، وقد ترغب بالرجوع إلى أي من الكتب المنهجية المعيارية لضمان تحقيق التطوير المناسب:

1 عندما يوصف العدد بوصفه حاصل ضرب الأس عشرة وعدد يقل عن عشرة لكنه يزيد عن أو يساوي واحد ($1 < n \leq 10$)، فإن العدد المذكور يقال عنه: صالح للكتابة بأسلوب الرموز العلمية.

2 قد يكون معلم العلوم قادراً على اقتراح أعداد كبيرة جداً، أو صغيرة جداً والتي قد يستخدمها الطلبة أو يحاولون قراءتها في دروس مادة العلوم. ويمكن لهذه الأعداد أن تحول إلى صيغة الرموز العلمية. إن مناقشة عامة قد تدور حول تحديد متى تستخدم الأعداد الكبيرة (على سبيل المثال، حيات الرمل المنتشرة على الشاطئ، أو النجوم في السماء، أو في الاقتصاد، والعلوم، ... الخ). تدخر الجرائد ومقالات الصحف الحالية بإشارات متعددة إلى الملايين والمليارات، الخ كم من الناس رأى بأمر عينيه مليوناً من مادة ما؟ إن معظم الناس لا يمتلكون فكرة واضحة عن الحجم الحقيقي للمليون!.

لكي تحصل على مليون دولار، ما هي طول المدة التي ينبغي أن تعمل بها إذا كان مدخولك الأسبوعي 100 دولاراً (حوالي 200 عام!). كم من النجوم تستطيع أن تبصرها عينك المجردة في ليلة صافية؟ بالحقيقة، لن تستطيع أن ترى ملايين بل بضعة

كبيرة جداً يهدف إلى تنبيه الطلبة على حقيقة بأنه مهما كان كبير المجموعة فيمكن إحصاء عناصرها.

والآن قد يسأل الطلبة "ما هو أكبر عدد يمتلك اسماً؟". أما اصطلاح جوجول Googol قد صيغ لوصف الرقم 1 وباليه مائة صفر. إن اصطلاحاً آخر هو جوجولبلكس سينتج عنه عدد يتألف من الرقم 1 يتبعه جوجول صفرًا لذا فإن "جوجول" مشروباً في "جوجول" ينتج عنه عدد يتألف من الرقم 1 يتبعه 200 صفرًا. إن الطلبة الذين سيحاولون كتابة جوجولبلكس على السبورة أو على صفحة الورق سيصل إلى فكرة مقدار هذا العدد العملاق المتناهي (لا توجد مساحة كافية للكتابة إذا سافرت باتجاه اقرب نجم مرئي، مستمرا بكتابة الأصفار في مسار رحلتك!).

لقد وجد الفلكيون بأن السنة - الضوئية Light - year تمثل وحدة ذات طول مناسب في قياس المسافات الفلكية الشاسعة جداً. إن النجم الشمالي يبعد عن كرتنا أرضية بـ 47 سنة ضوئية. ماذا يعني هذا العدد؟ ينتقل الضوء بسرعة 186,000 ميل/ثانية. في سنة ضوئية يقطع الضوء مسافة 6,000,000,000,000 (6×10^{12}) ميلاً. إن هذه المسافة الهائلة يطلق عليها السنة الضوئية. إن اقرب نجم يبعد عنا 4.4 سنة ضوئية. وأبعد نجم معروف لدينا يبعد عنا 1.4×10^9 سنة ضوئية. دع الطلبة يتأملون الآتي: يستغرق الضوء 47 سنة ضوئية لكي يسافر من الأرض إلى نجم الشمال. ماذا سيروى الشخص الذي يقف على النجم مصوباً نظره إلى الأرض في هذا اليوم؟ (الحوادث التي جرت في عام 1934)

التقييم اللاحق Postassessment

ليتم الطلبة بإكمال ما يأتي:

1. يبعد الكوكب بلوتو بحوالي 4,700,000,000,000 ميلاً عن كرتنا أرضية اعرض هذا الجواب بالرمز العلمي (4.7×10^{12}).
2. يبلغ محيط الأرض عند خط الاستواء حوالي 25,000 ميلاً، اعرض هذه القيمة بالرمز العلمي (2.5×10^4).

والآن فإن مجموع جميع الأعداد في العمود الثاني تمثل عدد البنسات المطلوب دفعها إلى جون وبالبالفة:

18.446.744.073.709.551.615

يقرأ هذا العدد: ثمانية عشر كوينتليون Quintillion، وأربعمائة وستة وأربعين كوارديليون Quardillion، وسبعمائة وأربعة وأربعون تريليون Trillion، وثلاثة وسبعون مليار Billion. وسبعمائة وتسعة ملايين، وخمسمائة وإحدى وخمسون ألفاً، وستمائة وخمسة عشر.

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على ملاحظة بأنه مهما كان مقدار هذا العدد إلا أنه لا زال محدوداً ولا يمكن أن يعد لامتناهياً Infinite. حاول أن تجعلهم يعبرون عن هذا العدد باستخدام الرمز العلمي.

إن السؤال الآخر الذي يفرض نفسه عند هذه النقطة يتعلق بأكبر عدد يمكن وصفه بواسطة ثلاثة أرقام. باعتماد الوصف التقليدي فإن العدد الأكبر هو 999، والسؤال ماذا يصعد 999؟ (إن مراجعة الأس تظهر حقيقة بأن هذا يعني أن 99 قد ضرب بنفسها 8 مرات). ولكن في حالة السماح بالأسس، فإن الجواب عن السؤال سيكون 9^9 ، والتي تعني، بأن 9 بالأس 9، أو ببساطة 9 بالأس 489، 420، 387. (حاصل ضرب 387.420.489 من التسعات) إذا أردنا طباعة هذا العدد بمعدل 16 رقم في البوصة، فقد تم تقدير ما يحتاجه هذا العدد الهائل جداً سيملاً 33 جزءاً يتألف كل منها من 800 صفحة، وبمعدل طباعة 14.000 رقماً في كل صفحة. لقد وجد (حسابياً) بأن هذا العدد يزيد بأربعة ملايين مرة من عدد الإلكترونات الموجودة في الكون. ولكنه يبقى معدوداً ضمن الأعداد "المتناهية/المحدودة".

(ادع الطلبة إلى إيجاد أكبر عدد يتألف من ثلاثة أرقام يمكن كتابته بواسطة العدد 4).

نقل بأن عدد حبات الرمل في جزيرة كوني Coney Island يصل حوالي 10^{20} حبة. يمكن أن تسأل الطلبة باقتراح طريقة للقيام بهذا التقدير. إن عدد الإلكترونات التي تمر خلال سلك الصباح الزجاجي التقليدي خلال دقيقة واحدة يعادل عدد قطرات الماء التي جرت في مساقط مياه نياجرا خلال مائة عام. إن سبب إيراد مثل هذه الأمثلة على أعداد

رياضيات التأمين على الحياة

Mathematics of life Insurance

24

مجموعة من المجاميع. وتقوم الشركات بإنجاز ذلك عبر جمع بيانات حول عدد الأشخاص المتوفين خلال الفترات الماضية ولكل فئة عمرية. ونظرا لأن البيانات يتم جمعها من عدد كبير من الحوادث فإن قانون الأعداد الكبيرة ينطبق على هذه الحالة. إن هذا القانون ينص بأنه "مع عدد كبير التجارب، فإن نسبة عدد النجاحات إلى عدد المحاولات يصبح مقاربا جدا للاحتمالية النظرية".

تعتمد شركات التأمين على الحياة إلى صياغة جداول بمعدل الوفيات مبنية على وفيات الماضي تعرض للتنبؤ بعدد الأشخاص الذي سيقارقون الحياة من كل مجموعة. ويظهر أدناه جزء من الجدول المعياري للوفيات الاعتيادية الخاص بأعضاء 1958. لصياغة هذا الجدول استخدمت عينة عدد أشخاصها 10 ملايين فردا. تم تدوين مدى حياة هؤلاء من الولادة ولغاية سن 99 عاما. وفي كل مستوى عمري، يدون الجدول أعداد الأشخاص الأحياء عند بداية السنة، وعدد الوفيات التي حصلت خلال السنة. بعدها تحسب النسبة الآتية:

عدد الوفيات خلال سنة

عدد الأشخاص الأحياء عند بداية السنة

إن هذه النسبة يتم تحويلها إلى عدد وفيات لكل 1000. إن عدد الوفيات لكل 1000 يطلق عليها اصطلاح "معدل الوفيات". إن معدل الوفيات هذا، كما سلاحظ الطلبة، يحتل مكانة بارزة في عملية احتساب قسط التأمين الذي سيدده حامل بوليصة التأمين.

تصف هذه الوحدة للطلبة كيف تأخذ شركات التأمين باعتباراتها الاحتمالية، والفائدة المركبة في حساب قسط الفائدة الصافية للتأمين على الحياة.

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1 سيستخدم الطلبة صيغة الفائدة المركبة لحساب قيمة رأس المال المتبقي في المصرف خلال فترة محددة، وبفائدة معلومة.
- 2 سيقوم الطلبة باحتساب القيمة الحالية لرأس المال التي تزداد إلى قيمة محددة عندما تودع في المصرف لفترة محددة، وبفائدة معلومة.
- 3 سيستخدم الطلبة الاحتمالات، وقيمة الفائدة المناسبة لحساب قسط الفائدة الصافية التي سيقوم بدفعها حامل بوليصة التأمين.

التقييم السابق Preassessment

استخدم المسألة التالية لأغراض الفحص والتشخيص، إضافة إلى بث حافز داخل الصف. في كل 200,000 رجل على قيد الحياة بعمر 40 عاما فإن 40,199,100 يبقون منهم أحياء لسن 41 ما هي الاحتمالية الخاصة برجل عمره 40 عاما قد آمن على حياته بأن يعيش على الأقل سنة واحدة؟ وما هي احتمالية وفاته خلال هذه السنة؟

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بالعرض إلى هذه المسألة، سيصبح الطلبة على وعي تام بتطبيقات نظرية الاحتمالات في ميدان التأمين على الحياة. إن من المهم جدا بالنسبة لهذه الشركات أن تكون قادرة على تحديد المخاطر التي يؤمن الناس عليها باقتنائهم لبوليصة التأمين على الحياة.

ولنعرض تقرير حسابات أقساط الفائدة، ينبغي على شركة التأمين على الحياة معرفة عدد الأشخاص المتوقع وفاتهم في كل

هذا الأمر لا يأخذ بالحسبان الريح أو مصاريف العمل). يتم تقسيم مبلغ 1690 دولار بصورة متساوية على 1000 شخص فيساوي 1.69 دولار لكل شخص. في المناقشة السابقة، لم يأخذ الطلبة بعين الاعتبار حقيقة إن المال الذي سيسدد إلى الشركة سوف يحصل على فائدة خلال السنة. لذا بالإضافة إلى اعتبار معدل الوفيات، ينبغي أن تؤخذ نسبة الفائدة بالحسبان عند حساب قسط التأمين. ويجب على المعلم، الآن، أن يطور مفهوما للفائدة المركبة، فيطرح سؤالا على الطلبة مفاده: ما هو مقدار المال المتراكم في مصرف، عند نهاية السنة، إذا أودع شخص مبلغا مقداره \$100 وبفائدة قدرها 5%. سيكون الجواب 100 زائدا (100×0.05) أو 100×1.05 وهو \$105. إذا ابقي مبلغ \$105 في المصرف لسنة أخرى، فكم سيصبح المبلغ المودع في نهاية السنة؟ $(105 \times 0.05) + 105$ أو 105×1.05 أو 100×1.05^2 ليقيم الطلبة بكتابة الصيغة العامة مستخدمين P = رأس المال الأصلي، i = نسبة الفائدة خلال فترة محددة، A = مقدار رأس المال في نهاية فترة محددة، و n = عدد السنوات التي سيودع خلال رأس المال الأصلي. إن الصيغة ستكون $A = P(1+i)^n$.

يجب أن يطرح المعلم، الآن، سؤالا على طلبته يستفسر فيه عن مقدار رأس المال الذي يجب عليهم إيداعه في مصرف تبلغ فائدة المودوعات فيه 5%. إذا أرادوا أن يتراكم مبلغ \$100 في سنة واحدة من الآن. في المثال السابق، رأى الطلبة بأن مبلغ \$100 قد نما إلى \$105 خلال مدة سنة واحدة. ستستخدم هذه المعلومات لأعداد تناسب:

$x / 100 = 100 / 105 = .9524$ $x = 100(.9524) = \$95.24$
 كم يجب علينا أن نودع الآن لفرض تراكم \$100 في نهاية السنتين من الآن؟

$x / 100 = 100 / 110.25 = .9070$ $x = \$90.70$
 ينبغي أن يكون الطلبة، الآن، قادرين على اشتقاق صيغة لاحتساب القيمة الحالية Present Value من صيغة الفائدة المركبة $(A = P(1+i)^n)$.
 إن هذه الصيغة هي:

$$P = \frac{A}{(1+i)^n}$$

وسيعود طلبتكم الآن إلى المسألة الأصلية التي تخص موضوع شركة التأمين على الحياة، والتي يفترض بها أن تسدد مبلغا مقداره \$1690 في نهاية العام إلى المتوفين الذين بلغت أعمارهم

العمر	عدد الأحياء	الوفيات لكل سنة	الوفيات لكل 1000
0	10,000,000	70,800	7.08
1	9,929,200	17,475	1.76
2	9,911,725	15,066	1.52
3	9,896,659	14,449	1.46
4	9,882,210	13,835	1.40
10	9,805,870	11,865	1.21
11	9,794,005	12,047	1.23
12	9,781,958	12,325	1.26
13	9,769,633	12,896	1.32
18	9,698,230	16,390	1.69
25	9,575,636	18,481	1.93
30	9,480,358	20,193	2.13
42	9,173,375	28,253	4.17
43	9,135,122	41,382	4.53
44	9,093,740	44,741	4.92

جدول (1)

بعد هذه المقدمة، ينبغي أن يطرح المعلم السؤال الآتي: ما هي احتمالية وفاة شخص يبلغ عمره 18 عاما، إذا كان قد توفي 11 من 6,509 شخص كانوا أحياء عند بداية العام؟ إن الاحتمالية هي $\frac{11}{6509}$. ولكن شركات التأمين على الحياة تفضل تحويل هذه النسبة إلى معدل الوفيات لكل 1000. ينبغي أن يوجه المعلم الطلبة نحو تغيير النسبة 11/6509 إلى $x/1000$ عن طريق تثبيت النسب الآتية:

$$\frac{x}{1000} = \frac{\text{عدد الوفيات خلال السنة}}{\text{عدد الأحياء عند بداية العام}}$$

x = معدل الوفيات لكل 1000.

إن الجواب على المسألة أعلاه هو:

$$1.69 = x \text{ أو } 1000 / x = 6509 / 11$$

وهذا يعني بأن 1.69 من الأشخاص سيتوفون من الألف الأصلي عند نهاية السنين الثمانية عشر. تستخدم شركة التأمين هذه المعلومات لحساب قسط الفائدة الذي سيتحمله أعضاء مجموعة فئة 18 عاما. افترض وجود 1000 شخص يعمر 18 عاما. والذين قاموا بالتأمين على حياتهم بمبلغ 1000 دولار لكل منهم ولسنة واحدة كم هو مقدار المبلغ الذي ستدفعه شركة التأمين عند نهاية السنة؟ إذا توفي 1.69 شخصا، فإن الشركة سوف تدفع $(1690 = 1000 \times 1.69)$ \$1690 وعليه ما هو مقدار المبلغ الذي ستحمله الشركة لحاملي بوليصة التأمين؟ (إن

1.93 أو 1.93 شخصا يتوفى من كل 1000 شخص يقع في فئة 25 عاما خلال الخمس وعشرين عاما التي انقضت. ما هو مقدار قسط التأمين إذا كان مقدار الفائدة 5/4؟ معدل الوفيات لكل 1000 شخص عند عمر 25 عاما = 1.93. للبلغ المطلوب تسديد مستحقته = $(1.93 \times 1000) = 1930$ \$. معامل الفائدة = $9524 / 1930 = 4.93$ \$. التهمة الحالية للمستحق في سنة واحدة ($9524 \times 1930 = 1838.13$ \$. عدد الأشخاص الذين يسدّدون القسط = 1000. صافي الأقساط = $1838.13 / 1000 = 1.83813$. إن هذه العملية قد تستمر لسنوات إضافية من التأمين.

التقييم اللاحق Postassessment

احسب صافي قسط التأمين لبوليصة لستين ومجموعة من 1000 شخص بعمر 30 عاما، وفائدة مقدارها 5٪. معدل الوفيات عند سن 30 عاما هو 2.13، معدل الوفيات عند 31 هو 2.19.

18 عاما. ما هي القيمة الحالية لـ \$1690؟ بعبارة أخرى، ما مقدار ما تجمعهم شركة التأمين في بداية السنة بحيث يمكنها أن تدفع مبلغا مقداره \$1690 في نهاية السنة؟.

باستخدام صيغة القيمة الحالية، سيحتسب الطلبة بأنه لكل \$1 ينبغي أن تسدده الشركة، يجب أن تجمع الشركة \$0.9524 في بداية السنة. وإذا كان على الشركة أن تسدّد \$1690 إذن يجب عليها أن تجمع \$1609.56 بالمجموع من الألف شخص الذين يعدّون ضمن فئة 18 عاما $(1690 \times 0.9524 = 1609.56)$ \$. وعليه فإن كل حامل لبوليصة تأمين يجب عليه أن يساهم بقسط تأمين مقداره \$1609 / $1.60956 = 1000$ أو حوالي \$1.61.

يمكن الآن أن تفرض مسألة جديدة. افترض أن مجموعة أخرى من 1000 شخص أعمارهم 25 عاما اقتنوا بوليصات تأمين لسنة واحدة تساوي \$1000 للبوليصة الواحدة (فائدة الموت هي \$1000). ووفقا لما ورد في جدول الوفيات فإن معدل وفياتهم هو

25

تحليلات (تسريحات) هندسية

Geometric Dissection

2. سيقوم الطلبة بتحويل أشكال محددة من متعددات الأضلاع إلى أشكال من نوع آخر تساويها في المساحة بواسطة التحليلات.

التقييم السابق Preassessment

اعرض للطلبة المسألة الآتية: لديك مثلث متساوي الأضلاع، تم تجزئته إلى أربعة قطع، والتي يمكن جمعها سوية لتكوين مستطيل. إن أحد الحلول الممكنة: أقم النصف العمودي من النقطة C إلى النقطة D على الضلع AB، ارسم من النقطة D قطعة مستقيمة إلى منتصف الضلع AC، نصف زاوية $\angle A$ ، ماردا شعاع النصف إلى النقطة F على الضلع CD. إن هذه الأجزاء الأربعة سوف تكون مستطيلة؛

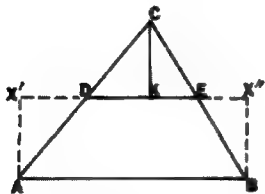
خلافًا لشخصية Humpty Dumpty^(*). فإن أشكال التحليل الهندسي يمكن أن توضع سوية مرة ثانية. وبالحقيقة، فإن الهدف الأساسي للتحليل يكمن في قطع شكل مستوي مستقيم الخطوط بخطوط مستقيمة بطريقة ما بحيث إن الأجزاء الناتجة يمكن إعادة تركيبها لتكوين الشكل المطلوب. إن هذه الوحدة سوف تعرض المدى الواسع للتحليلات الهندسية عن طريق التأكيد على قيمتها الرياضية والترفيهية.

أهداف الأداء Performance Objective

1 سيُشاهد الطلبة صياغات لمساحة متعدد الأضلاع بأسلوب متين مترابط.

(*) هي شخصية خيالية يشار بواسطتها إلى حقيقة إن الشيء المكسور لا يعود إلى حالته الأصلية إطلاقاً.

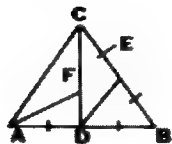
إن مدى التحولات الممكنة لمتعددات الأضلاع إلى متعددات أضلاع أخرى بأسلوب التحليلات تمتاز بكثرتها وتعددتها. ويعد يانوس بولاي Janos Bolyai، أحد الذين ارسوا دعائم الهندسة اللا إقليدية، كان الأول في اقتراح بأنه في حالة وجود أي متعدد أضلاع يمتلكان مساحة متساوية، فإن أي شكل يمكن تحليله/ تجزئته بعدد محدود من المحاولات بحيث يمكن من خلال إعادة ترتيب الأجزاء المجزئة مطابقتها للشكل الآخر ولكن، نحن مهتمون بتحويلات محددة تتطلب أقل عدد من التجزئات على سبيل المثال، يمكن أن تتأمل مسألة تجزئة مثلث حاد الزاوية لتكوين شكل مستطيل. في شكل 4، في البداية جد نقطة منتصف الضلعين \overline{AC} و \overline{BC} وصل هاتين النقطتين لتكوين \overline{DA} على الضلع \overline{DA} . من النقطة C أقم مستقيماً عمودياً على الضلع \overline{DE} في النقطة X. خذ المثلث $\triangle DCX$ وضعه بحيث أن X الآن هي X' وزاوية $\angle DCX$ تكون مجاورة للزاوية $\angle CAB$. بنفس الطريقة انقل المثلث $\triangle EXC$ بحيث أن X الآن ستكون X'' وزاوية $\angle ECX$ مجاورة لزاوية $\angle CBA$



شكل (4)

لتشجيع الطلبة على البدء بحل مسائل التحليل/التجزئة بأنفسهم، اقترح قيامهم بمنايا إنشاء مربع 10×10 سم، وكما يأتي:

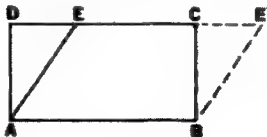
بع $DN=4.2$ ، $AR_1=2.9$ ، $CT_1=3.1$ ، $AL=BG=7$
ارسم \overline{AG} و \overline{LN} ، وعلى \overline{LN} ليكن $LS_1=1.6$ ، والنقاط R, S, K, T على المستقيم \overline{AG} بحيث $AR=2.4$ ، $RS=3.3$ ، $KT=3.3$ و $SK=2.4$ و \overline{KB} و $\overline{SS_1}$ ، $\overline{RR_1}$ ارسم $\overline{TT_1}$



شكل (1)

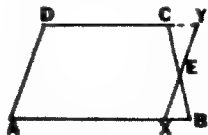
إستراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابتدئ مناقشة التحليلات بعرض تساوي المساحة بين مستطيل ومتوازي أضلاع يشتركان بنفس القاعدة. إن التحليل يستمر كما يأتي باستخدام ورق سمك أو ورق مقوى، اصنع المستطيل ABCD. اصنع قطعاً مستقيمة من الرأس A إلى نقطة E على الضلع \overline{DC} ، ارفع المثلث ADE واضعاً الضلع \overline{AD} على طول الضلع \overline{BC} لتكوين متوازي الأضلاع ABCE.



شكل (2)

وبنفس الأسلوب، تستطيع أن تعرض بأن متوازي أضلاع وشبه المنحرف بنفس القاعدة يمتلكان نفس المساحة. خذ أي شبه منحرف، جد نقطة المنتصف E على الضلع \overline{BC} ، وارسم خلال النقطة E مستقيماً يوازي الضلع \overline{AD} ، والذي يقطع الضلع \overline{AB} في X والضلع \overline{DC} في Y. بما إن المثلث CEY والمثلث BEX متطابقان، فإن مساحتي شبه المنحرف ABCD ومتوازي الأضلاع AXYD ستكون متساوية.



شكل (3)

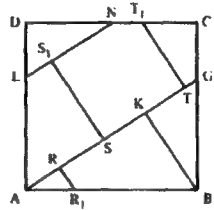
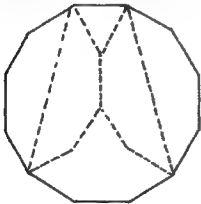
ينبغي أن يلاحظ بأن هذا التحويل يمكن اعتباره بأسلوب التدوير Rotation، وأخرى بأسلوب الانعكاسات، والتحويلات بالإضافة إلى التدوير.

بعدها تستطيع أن تحدد بأن ضلعا في المثلث الكبير هو أكبر بمقدار $\sqrt{3}$ من ضلع المثلثات الصغيرة. وبما أن مساحة المثلث الجديد تساوي ثلاث أضعاف مساحة كل من المثلثات الصغيرة، فقد قمنا بالتأكد من علاقة معنوية والتي تنطبق بين أشكال مماثلة: أي أن نسبة مساحتها هي مربع نسبة أضلاعها المتقابلة.

التقييم اللاحق Postassessment

ينبغي أن يكمل الطلبة التمارين الآتية:

1. اعرض بواسطة التحليل بأن المستطيل يمكن تقسيمه إلى شكلين من نوع شبه المنحرف ويمتلك كل منها نصف مساحة المستطيل.
2. بواسطة القطع الناتجة عن تجزئة مربع 10×10 سم اصنع: (1) مستطيلا، (2) متوازي أضلاع.
3. جزئ الشكل المضلع الاثني عشري Dodecagon والذي يظهر أدناه إلى مربع (اقطع خلال الخطوط المؤشرة).



شكل (5)

بعد عملية القطع ينبغي أن يكون لدى الطلبة سبعة قطع، وباستخدام جميع هذه القطع، يجب أن يحاول الطلبة تكوين: (1) ثلاثة مربعات بنفس المساحة و (2) شبه منحرف متساوي الساقين.

إن تحليلا جميلا سيكون ممكنا مع ثلاثة أشكال سداسية منتظمة. بترك الشكل المثلث الأول دون قطع، قم بتجزئة الثاني والثالث كما في الشكل الآتي (شكل 6). إن هذه الأجزاء الـ 13 يمكن أن يعاد جمعها وترتيبها لتكوين شكل مثلث متساوي.



شكل (6)

قنينة (زجاجة) كلاين

26

The Klien Bottle

ينبغي أن لا يعد الثقب الموجود على سطح الاسطوانة ثقبا تقليديا، ولكنه عبارة عن تقاطع لسطوح مغطاة باستمرارية سطح القنينة.

دعنا الآن نعود إلى المسألة الأصلية. يمكن تصور الحالة بسهولة إذا قمنا بمبادلة الجزء الأنبوبي الذي في الغلاف إلى نهايات الاسطوانة، وإحدى الثقوب الزراعية إلى الثقب في الاسطوانة. لقد قمنا الآن بصنع شكل الذي يكافئ طوبولوجيا قنينة كلاين.

متى توفر للطلبة فهم واضح عن الكيفية التي ستبدو بها قنينة كلاين، اعرض لهم كيفية إنشائها من قطعة ورق. وفرض إنشاء قنينة كلاين، فإن ما ينبغي علينا فعله بالقطعة الورقية-السطحة سيشمل، ربط الزوايا المتتالية للحافات AB بـ A'B'، كذلك نسعد إلى ربط الحافتين المتبقيتين AB' بـ A'B.



(2) مخطط

في البداية اصنع اسطوانة عن طريق طي الورقة إلى نصفين مع ربط الحافتين المتقويتين بشقة من شريط. اقطع شقا صغيرا خلال سمك الورقة على مسافة تقربك بحوالي ربع المسافة من القمة. إن هذا سيقابل "الثقب" في سطح الاسطوانة. قم بطي الأنموذج من المنتصف، وادفع النهاية السفلى خلال الشق الصغير. صل بين الحافات كما توضح الأسهم في الشكل الآتي. يلاحظ بسهولة إن هذا الأنموذج الورقي يشابه طوبولوجيا قنينة كلاين التي صنعت من الاسطوانة.

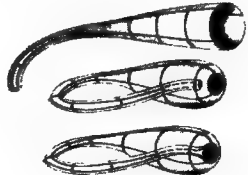
تزداد هذه الوحدة الطلبة بنفاذ للبصرة إلى أعماق أحد الموضوعات الجذابة بميدان الطوبولوجيا Topology وهو موضوع قنينة كلاين. وسوف يصاب الطلبة بالدهشة عندما يرون شكلا مجسما Solid Figure لا يمكن تمييز داخله من خارجه.

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1 سيقوم الطلبة بصنع قنينة كلاين من قطعة ورق مسطحة.
- 2 سيقوم الطلبة بتحديد خصائص سطح ما بواسطة خصائص طوبولوجية محددة.
- 3 سيقوم الطلبة بتحديد بيتي Betti للسطوح الطوبولوجية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

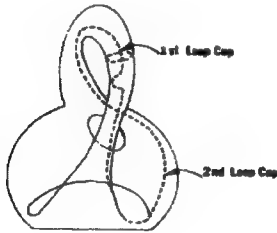
قبل عرض كيفية إنشاء الحالات أعلاه، ناقش بصورة مختصرة قنينة كلاين والتي تعد شكلا طوبولوجيا أحادي الضلع. اخترعت قنينة كلاين على يد العالم الرياضي الألماني فيليكس كلاين Felix Klien في عام 1842. وإذا حاولنا مقارنة قنينة كلاين مع شيء واقعي ملموس، فسوف نستخدم مجسما مرنا، مثل اسطوانة تحتوي على "ثقب" قطع خلال سطحها. بعدها سنقوم بشد إحدى النهايات للحصول على قاعدة عريضة والنهاية الثانية الضيقة التي تشبه عنق القنينة. ولكن ينبغي علينا أن نأخذ بنهايتي الدائرتين سوية مع أسهمهما التي تعمل باتجاهات معاكسة (انظر الشكل الآتي). تخيل النهاية الضيقة للاسطوانة مطوية إلى أعلى، ومنغمسة خلال الثقب الموجود على الاسطوانة، ومرتبطة بالقاعدة الواسعة كما في الشكل الآتي.



(1) مخطط

"القص الحلقي" Loop-cut (تبدأ من أي نقطة على السطح ثم تعود إليها ثانية دون أن تقطع نفسها، متجنبين الحافة بصورة كلية)، ستوفر طريقة أخرى لتحديد عدد بيتي. عند استخدام القص الحلقي لأغراض احتساب عدد بيتي، فإننا نقوم بإحصاء عدد الحافات فنذهب إلى أن هذا العدد يساوي عدد القصات الحلقيّة التي نستطيع عملها في السطح دون أن نقطعه إلى قطع تزيد على الحافات. إن شكل الكمكة المحلاة يتطلب قصتين حلقيّة: الأولى أفقية، والثانية عمودية، وعليه فإن عدد بيتي سيكون 2.

تتطلب قنينة كلاين، أيضاً، قصتان حلقيّة كما يوضح الشكل الآتي.



(4) مخطط

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقيم الطلبة باحتساب عدد بيتي للسطوح الآتية:
 - أ- أنبوب.
 - ب- أنبوب مثقوب.
 - ج- كرة مثقوبة.
2. ليقيم الطلبة بتحديد أي الأشكال سوف تصنعها إذا قمت بقص قنينة كلاين في النصف.



(3) مخطط

وإذا أردنا الآن اختبار قنينة كلاين ومحاولة التمييز الخارج من الداخل، وبالعكس، سنجد من المستحيل إجراء ذلك. ويبدو جلياً بأن السطح ذو جانب أحادي، ولا يحوي على حافات، وهي فكرة غير اعتيادية في الأشكال الهندسية.

ونظراً لصعوبة تمييز قنينة كلاين، أو أي سطح آخر حصل تسويه في شكله، فإن من الضروري أن نكون قادرين على تمييز خصائص كل سطح بواسطة خصائص طوبولوجية أكثر بساطة. إن اثنتين من هذه الخصائص تمت الإشارة إليها: عدد الحافات، وعدد الوجوه. لقد وجدت قنينة كلاين بأنها تحتوي على جانب/ وجه واحد ولا تحتوي على أية حافة. إن الخاصية المميزة الثالثة لهذه السطوح هي "عدد بيتي" Betti Number. إن عدد بيتي هو عبارة عن أكبر عدد من القصات المستعرضة Cross cuts (وهو قص بسيط بواسطة القص والذي يبدأ وينتهي على الحافة) والتي يمكن عملها على سطح دون تقسيمه إلى أكثر من قطعة واحدة. وهذا يعني بأن شكلاً قابله عبارة عن قرص يمتلك عدد بيتي مقداره صفراً، نظراً لأن أي قص مستعرض سيؤدي إلى تقسيمه إلى قطعتين. من جهة أخرى، فإن السطح الجانبي للأسطوانة يمتلك عدد بيتي مقداره واحد.

اطرح سؤالاً على الطلبة تستقر فيه عن سبب صعوبة تحديد عدد بيتي لشكل يقابل الكمكة المحلاة Doughnut أو قنينة كلاين باستخدام طريقة القص المستعرض. إن معظم الطلبة سوف يدركون بأنه في هذه المسألة لا يحوي كل من الشكلين الطوبولوجيين حافات محددة. لذا فإن طريقة بديلة باستخدام

مسألة الخارطة ذات الألوان الأربعة

The Four Color Map Problem

27

يلزم الطلبة بتحليل هذه الخارطة الجغرافية-الخيالية والتي تصف ثمانية أقطار مختلفة، مع إدراج أسماء جميع الأقطار التي تمتلك حدوداً مشتركة مع القطر H، والأقطار التي تشارك برأس مشتركة مع منطقة H. يمكن أن تمتد الخارطة ملونة بصورة كلية-وصحيحة عندما يتم تلوين كل قطر بصورة كلية، وأن القطرين اللذين يشتركان معه بالحدود يمتلكان ألوان مختلفة عنه. إن القطرين اللذين يشتركان برأس مشترك قد يشتركان بنفس اللون. إن قيام الطلبة بتلوين عدة خرائط وفقاً لقواعد التلوين كما ذكرت أدناه (b أزرق Blue، r أحمر Red، y أصفر Yellow، g أخضر Green).



شكل (2)

إن هذه الخارطة تتألف من منطقتين ويحدود مشتركة-واحدة، وعليه فهي بحاجة إلى لونين لكي يتم تلوينها بصورة صحيحة.



هذه الخارطة تتألف من ثلاثة مناطق مختلفة، وينبغي على الطلبة أن يستنتجوا بأنها تحتاج إلى ثلاثة ألوان مختلفة لتلوينها بصورة صحيحة. ويبدو مع ذلك بأن

خارطة بمنطقتين تحتاج إلى لونين، وإن الخارطة بثلاثة مناطق تحتاج إلى ثلاثة ألوان.

أسأل الطلبة فيما إذا كانوا قادرين على اختراع خارطة تحتوي على ثلاثة أقطار مختلفة، والتي تحتاج إلى أقل من ثلاثة ألوان لغرض تلوينها. كمثال على ذلك انظر شكل 4.

إن الطوبولوجيا هو فرع من فروع الرياضيات ذو صلة متينة بالهندسة. إن الأشكال التي نوقشت قد تظهر على سطوح المستويات. أو على سطوح ثلاثية الأبعاد Three-Dimensional. يقوم المشتغل بالطوبولوجيا Topologist بدراسة خصائص الشكل التي تبقى بعد تشويهه، أو شده وفقاً لمجموعة من القواعد. إن قطعة من خيط، إذا ربطت نهايتها، يمكن أن تصنع شكل دائرة، أو مربع. وإن سهر هذه التحولات، يظهر بأن ترتيب "النقاط" على طول الخيط لم يعاني أي تغيير. وقد نجم عن ظاهرة الاحتفاظ بالترتيب التشويه الحاصل بالشكل، والذي يعد خاصية مهمة تستأثر باهتمام الطوبولوجيين.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة ببيان مسألة الخارطة بالألوان الأربعة.
2. بتقديم خارطة جغرافية على سطح مستوي، سيعمد الطلبة إلى بيان وعرض، بواسطة مثال، إن الألوان الأربعة كافية لتلوين جميع مكونات الخارطة وبنجاح ملموس.

التقييم المسبق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بمعاني الحدود المشتركة والرؤوس المشتركة Common Vertice كما تطبق في الخرائط الجغرافية المعدة على السطوح المستوية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابتنى ببيان إن هذه المسألة قد تم حلها في الفترة الأخيرة، فقط، بتوظيف دعم مركز من الحواسيب المعاصرة. بينما كانت تعد سابقاً من إحدى المسائل الرياضية التي لا يتوفر حل لها.



شكل (1)

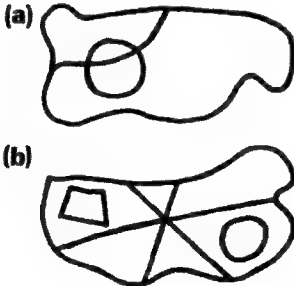
ليقم الطلبة بالخطوة المنطقية التالية في سلسلة مسائل تلوين الخرائط وينبغي أن يصلوا إلى فكرة تلوين خرائط تتضمن خمسة مناطق مختلفة. كما سيكون من الممكن رسم خرائط تحوي خمسة مناطق وتتطلب : لوان، أو ثلاثة ألوان، أو أربعة ألوان لكي يتم تلوينها بصورة صحيحة. إن رسم خارطة تحوي خمسة مناطق ويمكن تلوينها بصورة صحيحة بواسطة خمسة ألوان هي مهجة مستحيلة. إن هذا الفصول العلمي يمكن أن يعمم من خلال تحريرات إضافية، ويمكن للطلبة أن يتوصلوا إلى الفكرة التي تنص على أن أية خارطة على سطح مستو، وبأي عدد من المناطق، يمكن أن تلون بنجاح بأربعة ألوان، أو بألوان أقل.

قد يكون اشد إقناعا التوجه صوب فرض المسألة كتحد مباشر بالصيغة الآتية: "هل تستطيع رسم خارطة جغرافية، على سطح مستوي، بأي عدد من المناطق، والتي تحتاج إلى خمسة ألوان لكي يتم تلوينها بصورة صحيحة؟".

إن هذه هي قضية مسألة الألوان الأربعة. ويجب أن نلاحظ بأنه في حين كانت مسائل العصور السابقة-الثلاثة المشهورة قد برهن على كونها مستحيلة في سنين خلت، فإن هذه المسألة قد تم حلها في السنين الأخيرة.

التقييم اللاحق Postassessment

1. في فترة، استخدام الأشكال، صف ماذا يقصد بموضوع مسألة الألوان الأربعة في الطوبولوجي.
2. باستخدام الألوان: الأخضر/g، الأحمر/r، الأزرق/b، والأصفر/y اعرض بأن من الممكن تلوين كل من الخرائط الآتية، بصورة صحيحة، بأربعة ألوان، أو بعدد ألوان أقل.



نظرا لأن القطرين الأكثر عمقا، والأكثر بعدا لا يشتركان بحدود مشتركة بينهما، يمكن أن يتشاركا باللون الأحمر، مع احتفاظهما بهويتهما المنفصلة.



شكل (4)

ويبدو من المنطقي الخروج باستنتاج يؤكد بأنه في حالة تلوين

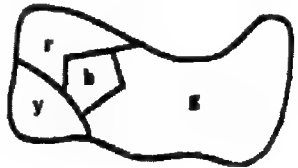
خارطة لثلاثة أقطار بأقل من ثلاثة ألوان، فإن خارطة لأربعة مناطق يمكن أن تلون بأقل من أربعة ألوان. ليقم الطلبة بإنشاء مثل هذه الخريطة.



شكل (5)

شكل (6)

يحتوي شكل 5 على أربعة مناطق، ويفتقر في تلوينه الصحيح إلى لونين فقط. ويحتوي الشكل 6 على أربعة مناطق، أيضا، ويحتاج إلى ثلاثة ألوان فقط لتلوينه بصورة صحيحة. حاول أن تتحدى الطلبة باختراع خارطة تتألف من أربعة أقطار وتحتاج إلى أربعة ألوان، بالضبط، للتلوين الصحيح. قبل القيام بمثل هذه المهمة ينبغي على الطلبة أن يدركوا الآن بأن هذه الخارطة تدعو إلى أن يشترك كل قطر من أقطارها الأربعة بحدود مشتركة مع الأقطار الثلاثة الأخرى. يعد الشكل 7 مثالا واضحا على هذه الخارطة.

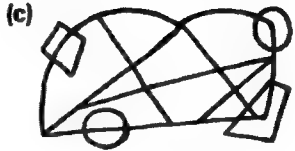


شكل (7)

3. ارسـم خريطة تحتوي على عدد غير محدود من المناطق ولكنها تحتاج إلى لونين فقط للتلوين الصحيح.

مرجع Reference

Apple, K. and Haken, CN. "The Solution of The Four-Color-Map Problem". Scientific American 237, No. 4 (December 1977): 108-21.

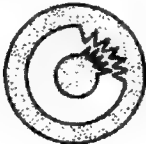


رياضيات عن دراجة

28

Mathematics on a Bicycle

ذات سرعة 3 أو 10، وبالخصوص آلية عمل الدراجة ذات العشرة سرع. بالنسبة للدراجة ذات الثلاث سرع فإن آلية التروس تستقر في محور العجلة الخلفي Hub (أو محور الدولاب Axle). انها عبارة عن تقنية القابض مع مجموعة قطع، تتمشق داخل محور العجلة الخلفي. والتي تحكمها قيود Constraints بحيث لا يمكن وجود أي نسبة أكبر من القطر الداخلي للمحور الخلفي.



مقطع عرضي

في الدراجة ذات السرعة العشرة، تحتوي العجلة الخلفية على خمسة عجلات مسننة يطلق عليها العنقود Cluster، بحيث تكون أكبر عجلة مسننة أكثر قرباً من أشعة الدواليب، ثم تأتي العجلات المسننة الأصغر منها واحدة تلو الأخرى، فيقل حجمها بالتدريج.

إن التعشيق (أي، ارتباط العجلات المسننة بواسطة السلسلة) سيتم عن طريق حركة السلسلة من سن إلى آخر بواسطة آلية حركة السلسلة من عجلة مسننة إلى أخرى Derailleur. دعنا نخبر التعشيق عن قرب:

مع جملة التغييرات الحاصلة في دولاب التروس Gears على الدراجة التقليدية ذات السرعة العشرة، يوجد أمامنا الكثير من التطبيقات الرياضية. وستسهم هذه التطبيقات في مساعدة الطلبة على فهم دراجاتهم، بينما تسهم في نفس الوقت بتقوية وتعقيم فهمهم الرياضي.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء عدد الأسنان (أو ضرس العجلة المسننة Sprockets) في العجلتين المسننتين الأمامية والخلفية، وقطر العجلة، سيجد الطلبة نسب دولاب التروس والمسافة المقطوعة في كل حركة تدوير دواسي الدراجة Pedals (سيتم تطوير مفردات لغوية Vocabulary جديدة).

2 سيكون الطلبة قادرين على توضيح أهمية الدرجة Pitch.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يمتلك الطلبة المهارات الأساسية في مادة الجبر، وأن يكونوا قد ألفوا استخدام الدراجات.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن دراجات البالغين، والتي سنعالجها في هذه الوحدة، تحتوي على عجلتين، سلكي كايح Brake Cables أمامية وخلفية. ودولاب بثلاث، أو خمس، أو عشرة تروس، والتي تصنع من مادة الفولاذ Steel بمسالكه المختلفة. دعنا نختبر، في البداية، الفروق في التروس بين الدراجات

والتي سوف تشكل صموية أكبر بالنسبة لدواسة الدراجة مقارنة مع نسبة العجلة المسننة السابقة، والتي بلغت 78. بماذا تفيد الصموية الإضافية سائق الدراجة بالضغط على دواسة العجلة؟ إذا قام أحدنا بضرب نسبة العجلة المسننة التي حصلنا عليها من الصيغة السابقة بالثابت π ، فسنحصل على المسافة المقطوعة - إلى أمام - في كل دورة من دورات دواسة القدم. وينبغي أن يعاود الطلبة تذكر إن المحيط = $\pi \times$ القطر.

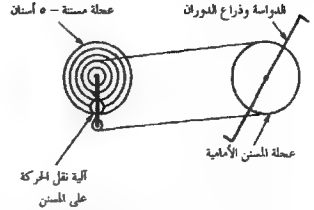
على سبيل المثال، سائق الدراجة بنسبة العجلة المسننة 78 يتقدم تقريبا 245 بوصة إلى أمام خلال كل دورة من دورات الدواسة، بينما يتقدم سائق الدراجة ذات نسبة العجلة المسننة 84 إلى أمام مسافة 264 بوصة خلال كل دورة من دورات الدواسة. وعليه، فإن الزيادة في الشغل (زيادة الصموية في عملية دوران الدواسة) تنعكس بزيادة المسافة المقطوعة لكل دورة من دوراتها. ولأن دعنا نمتحن تطبيقات متعددة بنسب مختلفة للعجلة المسننة بالنسبة لراكب الدراجة التقليدي.

افترض إن السيد كارتر Carter كان يقود دراجته براحه تامة على طريق مستوي ونسبة 78 للعجلة المسننة، ثم اعترضه تل مرتفع. ماذا عليه أن يفعل؟ هل يتحول إلى نسبة للعجلة المسننة أعلى أم أقل؟

ينبغي أن يسترشد استدلالك العقلي بما يأتي: إذا انتقل السيد كارتر إلى نسبة 84، فإنه سيتقدم مسافة 264 بوصة إلى أمام كلها قام بتدوير الدواسة دورة كاملة. وهذا الأمر يتطلب مقدارا محددا من الشغل - للتغلب على تأثيرات الجاذبية عند الصعود على سفح التل ويطلب بذلك المزيد من الطاقة والشغل. وعليه فإن السيد كارتر سوف يلجأ إلى إيقاف عجلته دون تردد. أما إذا قام السيد كارتر بالانتقال إلى نسبة أقل، فإنه سيستخدم طاقة أدنى لإدارة دواسة القدمين، وإن الطاقة الإضافية المطلوبة لتسلق التل سوف تجعل عملية دوران العجلة المسننة تشابه نسبة 78 إلى حد كبير. لذا فإن الجواب سيكون: الانتقال إلى قيمة أقل لنسبة العجلة المسننة.

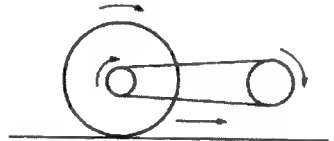
وينبغي على السيد "كارتر" أن يدير دواسة القدم بدورات أكثر لتسلق التل إذا اختار نسبة العجلة المسننة 84، وأكثر إذا استمر باستخدام نسبة 78.

تذكر، بأن عملية دوران العجلة تبدو مشابهة لـ 78 بسبب طبيعة تضاريس التل. إن هذه هي "الموازنة بين العوامل المختلفة Trade-off" التي قام بها السيد كارتر: دوران أكثر يعزم تدوير ثابت (قوة زاوية) بدلا من نفس عدد الدورات للمسافة المطلوبة مع بذل عزم متغير.



يوجد هناك عجلة مسننة أمامية وخلفية مع أسنان. إن أعداد الأسنان على العجلتين المسننة الأمامية والخلفية تمتاز بأهمية بالغة.

افترض بأن العجلة المسننة الأمامية تحتوي على 40 سنا، بينما تحتوي العجلة المسننة الخلفية على 20 سنا، ستكون النسبة 20/40 أو 2. وهذا يعني بأن العجلة المسننة الخلفية تدور مرتين كلما تدور العجلة المسننة الأمامية مرة واحدة. لكن العجلة المسننة الخلفية مرتبطة بالعجلة الخلفية للدراجة، وإن انتقال الطاقة يحصل أيضاً بالاعتماد على مقدار قطر العجلة. في حالة الدراجة ذات السرعة العشرة فإن قطر العجلة (مقضمنا الأنبوب الإطار Tire) هو 27 بوصة. إن هذا الترتيب قد عرض أدناه.



إن العلاقة (عندما تؤخذ عجلة الدراجة بعين الاعتبار) هي: نسبة دولاب التروس = النسبة \times القطر = $1/2 = 27 = 54$. إن الرقم الناتج هنا يكون غالبا بين 36 و 108، ويعطي مقارنة واضحة بين دولاب التروس، كما يسهم بقيادة ملموسة في إقامة علاقة بين نسب دولاب التروس والشغل المنجز.

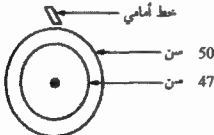
على سبيل المثال، فإن سائق دراجة يستخدم عجلة مسننة تحوي 46 سنا في المقدمة، وعجلة بـ 16 سنا في المؤخرة مع عجلة الدراجة بقطر 27" سوف يحصل على نسبة مقاديرها $77.625 \approx 78$. وهناك سائق دراجة أخرى تستخدم عجلة مسننة أمامية بـ 50 سنا، وعجلة مسننة خلفية بـ 16 سنا سوف يحصل على نسبة العجلة المسننة مقاديرها $84.375 \approx 84$.

"بانستر" Bannister إدارة العجلة 100 دورة بالدقيقة عند نسبة 68 للعجلة المسننة، أو بنسبة 78 وبسرعة 84 دورة بالدقيقة. للحصول على أقصى سرعة ماذا ينبغي على السيد "بانستر" اختياره؟ (هذه الاختبارات الحقيقية التي يستخدمها راكب العجلة في تحديد أي عجلة مسننة يستخدم خلال السباق النهائي). افترض إن هذه السرعة ثابتة خلال مدة السباق.

الحل Solution: إن ضرب نسبة العجلة المسننة 68 بالنسبة الثابتة $\pi = 214$ بوصة لكل دورة (تقريباً). فإذا كان السيد بانستر يدير الدواسة بسرعة 100 دورة بالدقيقة، فإنه سيسافر بسرعة 21,400 بوصة/دقيقة، أو 20.27 ميل/ساعة. إن نسبة العجلة المسننة 72 مضروبة بالنسبة الثابتة $\pi = 226$ بوصة لكل دورة (تقريباً) وعند سرعة 84 دورة بالدقيقة سوف تنتج سرعة مقدارها 18,984 بوصة/دقيقة أو 17.98 ميلاً بالساعة. وعليه فإن من الأفضل للسيد "بانستر" أن يتسابق بنسبة العجلة المسننة التي تساوي 68.

كما ذكر سابقاً، فإن على المتسابقين أن يولوا اهتماماً خاصاً بفقرتي أداء الدوران، وعزم التدوير. وسوف يختار المتسابق بعناية عتقود العجلة المسننة الخلفية اعتماداً على طبيعة الطريق. إن طريقاً منبسطاً يستلزم معدل أسنان 13-18 في عتقود العجلة المسننة الخلفية مع 47 سناً للعجلة المسننة الأمامية الداخلية و 50 سناً للعجلة المسننة الأمامية الخارجية.

وهذا هو مورد السرعة العشرة. فعندما تكون السلسلة على العجلة المسننة ذات الـ 47 سناً، تتوفر خمسة نسب مختلفة للعجلة المسننة. وعندما تتحرك السلسلة من عجلة مسننة إلى أخرى، على وعبر العجلات المسننة ذات الـ 50 سناً، هناك أيضاً خمسة نسب مختلفة للعجلة المسننة.



هناك اعتبار آخر سيأخذه المتسابق الحسبان عند اختيار عجلاته للمسنة هو التصور الذاتي Inertia. وسوف تلاحظ بأن عجلة 54 للمسنة الأمامية والعجلة المسننة 18 الخلفية تعطي نفس نسبة العجلة المسننة كما هو الحال مع العجلة المسننة ذات 48 سناً الأمامية، والعجلة المسننة الخلفية ذات الـ 16 سناً، أي $16/48 = 3$. وسوف يختار راكب الدراجة 16/48 لأن الشغل

يمكن فهم هذه الموازنة الحكيمة بين العوامل المختلفة عن طريق مقارنة الجسم البشري بالآلة. إن الآلة تعمل بكفاءة أداء أفضل عندما تشتغل بعزم تدوير ثابت بالمقارنة مع عملها بعزم تدوير متغير. وتعرض بتغيير نسبة العجلة المسننة مع تغيير السرعة وعدد الدورات بالدقيقة.

إن وصفاً أكثر دقة قد عرض أنهما. حيث تستخدم سيطرة العجلات المسننة للتغلب على الاحتكاك الثابت Static Friction والتعجيل للوصول إلى سرعة التشغيل بينما تجهز عزم تدوير ثابت. أو عزم يقل عن الحمل الزائد Overload إلى الآلة. إن هذه الآلية لا تشابه مسألة الدراجة لأن الآلة البشرية تستطيع التغلب على زيادة عزم التدوير، لفترة قصيرة، لتسريع حركة الدراجة. وعندما تكون الدراجة بحالة حركة، فإن القوة الوحيدة المطلوبة لدوام حركتها بسرعة ثابتة، على أرض مستوية، هي تلك التي تسهم بالتغلب على الاحتكاك الداخلي ومقاومة الرياح. إن هذه الحالة تشابه تماماً ما يحصل في السهارة وأكتها التي تدور. إذا رغب راكب الدراجة زيادة تعجيل دراجته بسرعة، فقد يلجأ إلى تدوير دواسي القدمين بأكبر سرعة دورانية ممكنة. إن جميع الآلات (بضمنها الآلة البشرية) تعتلك قابلية مثلى لعزم التدوير لمثل هذه الحالة. وهناك أمان يمكن حدوثهما بحيث يحولان دون وصول الماكينة إلى السرعة القصوى المتاحة. الأول، إذا كان عزم التدوير كبيراً جداً، فإنه سيحول دون إمكانية التدوير السريع. إن هذه الحالة تناظر ما يحصل في السهارة عند الدرجة الثالثة للعجلة المسننة Third Gear عندما تحاول الاجتياز دون تقليل الحركة "Down shift". فلا تمتلك الآلة قدرة كافية لتوفير تعجيل سريع، وتقتصر على زيادة بطيئة في التعجيل. ويصح نفس الأمر بالنسبة لراكب الدراجة الذي يحاول التعجيل بسرعة في "الدراجة الصعبة للعجلة المسننة Harder Gear"، لأنه سيكون مقتصرًا إلى الطاقة اللازمة لذلك. والثاني هو يدير إلى الخارج "Spinout"، وينظر هذا الأمر ما يحصل للسهارة عندما تصل سرعتها إلى 30 ميل بالساعة عند الدرجة الأولى للعجلة المسننة. ولا يمكن أن تزداد سرعتها بالرغم من وجود قدرة كافية لزيادة السرعة. وهذا الأمر يناظر راكب العجلة الذي يدير دواسي القدم بأقصى سرعة ممكنة ولكن دون القدرة القصوى.

إذا وصل راكب العجلة إلى أقصى دوران عند أقصى عزم للتدوير. فإنه سيتمكن من الوصول إلى السرعة القصوى. في هذه النقطة قد ترغب بأن يباشر طلبتك بأنفسهم بعض التطبيقات.

نموذج مسألة Model Problem: يستطيع السيد

والأداء، والشغل المطلوب لعملية السباق.

وكمثال نهائي فإن كثير من الدرجات زهيدة الثمن تحتوي على 6 - 8 سرع بسبب المضاعفة Duplication. تأمل مثالنا السابق حول القصور الذاتي، عندما كان الاختيار بين 48 سنا و 54 سنا في العجلة المسننة الأمامية. لقد رأينا استنساخ نفس نسبة العجلة المسننة بعجلة مسننة خلفية 16 و 18. إن هذه الحالة تحدث في كثير من المجالات الأقل ثمنا.

التقييم اللاحق Postassessment

1. وصلت "ليزا" Lisa إلى تل يزيد على أي نسبة للعجلة المسننة لديها ب 10. لا تستطيع ليزا أن تستخدم دواصة القدم بنسبة تزيد على نسبة 62 للعجلة المسننة. فإذا امتلكت دراجتها ذات السرعة الثلاث نسب 48، 58، 78 للعجلة المسننة، أي من هذه النسب عليها اختيارها؟
2. ما هو مقدار التقدم الذي يصاحب كل دورة لدواستي القدم وبنسبة للعجلة المسننة مقدارها 78 بحيث يحرك دراجة قطر عجلتها 27"؟
3. يستطيع "جورج" George الحصول على سرعة دوران مقدارها 80 دورة بالدقيقة عند نسبة العجلة المسننة 72، و 48 دورة بالدقيقة عند نسبة 96. أيهما يوفر سرعة أكبر؟

يستهلك دون الرجوع إلى التعجيل من خلال التعجيل الزاوي لعجلة مسننة ذات نصف قطر أكبر بدلا من عجلة مسننة ذات نصف قطر اصغر بسبب اعتبارات القصور الذاتي. ونظرا لكون العجلة المسننة ذات نصف القطر 10" هي الأصغر في قائمة الاختيارات للحصول على أكبر قوى للقص Shear Forces، فإن العجلة المسننة ذات الـ 34 سنا اصغر ما يتوفر. ونحن نستخدم حاليا درجة مقاس $\frac{1}{2}$ Pitch (المسافة بين الأسنان)، فإن تحسينا بدرجة مقاس تزيد على 1" سوف يؤدي إلى زيادة عدد النسب دون أن يبدع فرصة أمام المجالات المسننة لكي تزداد أقطارها. إن العجلة المسننة التي قد احسن تصنيعها سوف تبدو مشابهة للشكل الآتي، حيث تم التخلص من معظم المادة غير الضرورية.



القصور الذاتي = $(X M \times \text{مربع المسافة من محور الدوران})$. وكلما صغرت المسافة، تناقصت قيمة القصور الذاتي إلى حدودها الدنيا. وعليه فمعد اختيار دراجة بعشرة سرع تذكر على الدوام بأن أي فرق في الثمن يذهب بالتفكير صوب وجود فرق في التصميم،

الرياضيات والموسيقى

29

Mathematics and Music

التقييم السابق Preassessment

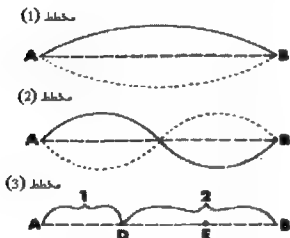
- احصل على آلة وترية Stringed Instrument مثل: البيانو أو الفايولين (الكمان)، أو القيثارة. وإذا لم تتوفر هذه الآلات يمكن تقسم العلوم أن يزود بمقياس صوت أحادي الوتر Sonometer، وهو عبارة عن آلة علمية تحتوي على أوتار تستخدم في التجارب.
- قم بأداء العروض الثلاثة الآتية. وليقم الطلبة، في كل حالة، بتحديد هل أصبحت النغمة أعلى أم أقل.
1. امسك بوتر من الأوتار، وقم بشد الوتر، ثم عاود الإمساك بالوتر ثانية.

إن الطلبة الذين يلمون بعمليات الكسور مع معرفة محدودة بنظرية الموسيقى سيتلمسون الرابطة الموجودة بين هذين الحقلين.

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1 سيظهر الطلبة معرفة بصيغ محددة تربط بين درجة النغمة الموسيقية note وخصائص الوتر أو عمود الهواء.
- 2 سيتعلم الطلبة كيفية إنشاء مقياس فيثاغورث الدياتوني Pythagoras Diatonic Scale.
- 3 سيعرض الطلبة كيف يبرهن اقليدس Euclid بأن الاوكتاف Octave هو أقل من ستة نغمات تامة.

شعر فيثاغورث بأن هذه النغمات، والتي كانت سارة بالخصوص، أو منسجمة الأصوات Consonant، كانت ذات صلة بالأعداد 1، 2، 3 و 4. أخذ فيثاغورث مجموعة من الأوتار متساوية الأطوال، وبدع النغمة C بوصفها نغمة أساسية. إذا استخدم مقياس صوت أحادي الوتر، يستطيع أن يعرض المعلم مبادئ العمل الذي قام به فيثاغورث. إن هذا يعني بأن الوتر يتذبذب بصورة تامة (انظر شكل 1). للحصول على النغمة C باوكتاف أعلى، ينبغي أن يتذبذب الوتر بجزئين (يعني، يمتلك ضعف التردد) (انظر شكل 2). يمكن للمرء أن ينجز نفس الأمر بتقسيم الوتر إلى قسمين بنسبة 1:2 (انظر شكل 3).



في شكل 3، إن ذبذبة \overline{AD} و \overline{DB} بصورة مستقلة سوف يمتلك نفس التأثير لإنتاج نغمتين بتعد بمقدار اوكتاف. وعليه، إذا كانت C تناظر العدد 1، فإن C باوكتاف أعلى سوف تناظر العدد $\frac{2}{1}$ أو 2. أضاف فيثاغورث، أيضاً، النغمتين F و G واللتان تناظران $\frac{4}{3}$ و $\frac{3}{2}$ على التوالي. اطرح سؤالاً على الطلبة حول كيفية تقسيم الوتر بنسبة 2:3. استنبط بأن الوتر يمكن أن يقسم إلى خمسة أقسام للحصول على النتيجة.



إن هذا هو أحد الأسباب التي تبرر إطلاق اصطلاح الخمسي التام Perfect Fifth على النغمة. للحصول على نغمة تناظر $\frac{4}{3}$ ينبغي تقسيم الوتر إلى سبعة أجزاء كما يأتي.

- 2 امسك بوتر من الأوتار، ثم اضغط نحو الأسفل على منتصف الوتر (تصويج Fretting) والذي سوف يؤدي إلى تذبذب نصف الوتر فقط.
- 3 باستخدام وترين يختلفان في أقطارهما (السك Thickness) قم بإمسك كل منهما.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استنبط من الطلبة الحقائق الثلاثة الآتية:

- 1 كلما زاد الشد Tension، تصبح النغمة أكثر ارتفاعاً.
- 2 كلما قل الطول، تصبح النغمة أكثر ارتفاعاً.
- 3 كلما قل القطر، تصبح النغمة أكثر ارتفاعاً.

عند هذه النقطة اعتمد إلى توضيح بأن جميع ما ذكر أعلاه مؤسس في الصيغ الرياضية. ولكن هذه الصيغ تستخدم التردد Frequency، وهي عبارة عن عدد ذبذبات الوتر في كل ثانية، بدلا من النغمة. ونظراً لأن درجة النغمة تزداد بازدياد التردد، فإنها لن تؤدي إلى تغيير الصيغ. وهذه الصيغ هي:

$$\frac{F_1^2}{F_2^2} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{F_1}{F_2} = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{F_1}{F_2} = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}$$

(الأوتار من نفس النوع) (الشد ثابت) (الطول والشد ثابتان)

حيث:

F = التردد

T = الشد

D = قطر الوتر

ليحاول الطلبة العمل على أمثلة رقمية: هناك وتر طوله 20 بوصة يتذبذب بتردد مقداره 400 VPS (ذبذبة لكل ثانية Vibration per Second) وهناك وتر آخر من نفس النوع تم الإمساك به بنفس الأسلوب (يتساوى الشد مع الحالة الأولى). فإذا كان تردده 800 VPS، فما هو مقدار طوله؟

ليقم الطلبة بحل المعادلة $\frac{400}{800} = \frac{L_2}{20}$ ، نستنتج بأن طول الوتر الثاني هو 10 بوصات. إن مثالا آخر قد يعالج موضوع التأثير على الشد إذا تضاعف تذبذب الوتر. استنبط بأن الشد

$$\left(\frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}\right) \text{ سوف يصبح أربعة أضعاف}$$

إن الموسيقى والرياضيات يرتبطان أيضاً بإنشاء المقياس. إن فيثاغورث، الذي أصبح مألوفاً لدى الطلبة نتيجة لجهوده الطيبة على المثلث قائم الزاوية، قام بصناعة مقياس يقوم بتوليد معزوفات جميلة، ولكن يحدد ارتباطات النغمات الممكنة واستخدام التوافق (التناغم).

البقية "نصف نغمة (S) Semitone". وعليه فإن النمط الذي تم الحصول عليه هو كما يأتي:

C	D	E	F	G	A	B	C
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
	V	V	V	V	V	V	V
W	W	S	W	W	W	S	

إن هذا يدعى المقياس الرئيسي Major Scale.

ولكن، هناك بعض الصعوبات مع التناغم Harmony. عندما يصدر المرء نغمة على آلة موسيقية فإنها لا تتذبذب في جزء يؤلف النغمة الأساسية فحسب، ولكنها تنشئ أيضاً في جزء منها نغمات يطلق عليها "نغمات إضافية Overtones". إن النغمات الإضافية لها تردد يتألف من المضاعفات 2، 3، 4، 5 مضروبة بالتردد الأساسي. إن النغمة الإضافية الخمسية تناظر 5 أو $\frac{5}{4}$ إذا كانت تستقر بين 1 و 2 (تذكر التنصيف المستمر Continuous Halving مثل $\frac{1}{2}$ ينشئ نغمات متشابهة). إن أقرب نغمة على مقياس فيثاغورث هو E والذي يبلغ تردده $\frac{81}{64}$. عندما تمزف C ثم تتلوها E فإن الإذن تتوقع سماع نفس E بوصفها نغمة إضافية لـ C. ولكن، بالنسبة للقرء فإن E الفيثاغورسية تعد مصدراً مقلداً. إن سبب الإقلاق يعود إلى الحقيقة القائلة أن تضمن اثنان من الـ E يمتلك اختلافاً يسيراً في الترددات، الأولى ستكون $\frac{81}{64}$ والأخرى $\frac{5}{4}$ أو $\frac{80}{64}$.

التقييم اللاحق Postassessment

1. إذا كان الشد ثابتاً، وقد زيد الطول، كيف ستأثر درجة نغم الوتر؟
2. كيف يؤثر شد الوتر على درجة النغم؟
3. افترض أن C تناظر $\frac{4}{5}$ بدلاً من 1 في مقياس فيثاغورث. جد الترددات ذات الصلة بالنغمات الـ 8 التالية لهذا المقياس الرئيسي.



ومع ذلك، فإن هذه النغمة يطلق عليها رابعة بدلاً من سابعة. أضاف فيثاغورث إلى مقياسه $\frac{3}{2}$ G أو $\frac{3}{2}$ C = $\frac{9}{4}$ C. ونظراً لكون C = 1 فإن الأوكتاف $\frac{2}{1}$ C = $\frac{9}{4}$ C = 2 = C.

حاول أن تتحدى الطلبة بإيجاد نغمة تشابه "جوهرياً Basically" وتطبق بين C "واوكتافها". دعهم يستذكرون بأن عملية مضاعفة أو تنصيف الذبذبة تغير النغمة باوكتاف واحد فقط. وعليه، بدلاً من $\frac{9}{4}$ ، استخدم فيثاغورث $\frac{1}{2}$ مقدار $\frac{9}{4}$ أو $\frac{9}{8}$.

بإضافة التناغم الثالث لكل نغمة تالية (يعني، الضرب بواسطة $\frac{3}{2}$)، سيكون الطلبة قادرين على الحصول على النغمات التي تكون الترددات ذات الصلة بها: 1. $\frac{3}{2}$ ، $\frac{9}{8}$ ، $\frac{27}{16}$ ، $\frac{81}{64}$ ، $\frac{243}{128}$. لا ريب بأن بعض "التنصيف Halving" الإضافي قد أجري عند ظهور الحاجة إليه، كما هي الحالة مع $\frac{9}{8}$ مقياس فيثاغورث الدليتروني، والذي يمكن الحصول عليه.

	C	B	A	G	F	E	D	C
الترددات ذات الصلة	2	$\frac{243}{128}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{9}{8}$	1

إن G التي تحتل الموقع الخامس، تعد الخمسي المثالي. إن هذا يحصل حيثما تكون نسبة الخامس إلى الأول تساوي $\frac{3}{2}$. ينبغي التركيز خلال المناقشة على حقيقة إن الترددات تكون متناسبة إلى أطوالها بنفس النسبة.

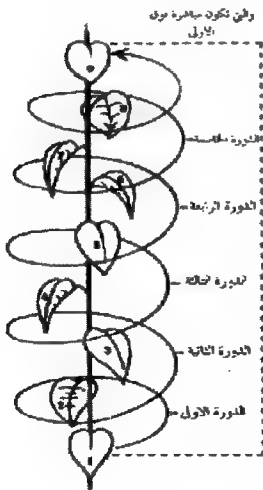
دع يدرسوا المقياس بصفته الجديدة، حاول أن تستقيط وجود نسبة ثابتة مقدارها $\frac{9}{8}$ بين النغمات (باستثناء تلك التي بين E و F وكذلك بين B و C حيث تكون النسبة $\frac{256}{243}$). ينبغي أن ينتبه إلى أن $\frac{9}{8}$ تناظر نغمة تامة (W) بينما تسمى

30

الرياضيات في الطبيعة

Mathematics in Nature

$\frac{3}{8}$ والذي يعني استراقها ثلاثة دورات وثمانية أوراق للوصول إلى الورقة الكائنة بنفس المحل. بصورة عامة، إذا افترضنا r تساوي عدد الدورات، و s عدد الأوراق للوصول من أي ورقة معطاة إلى موقع مماثل، فإن $\frac{r}{s}$ تمثل Phyllotaxis (ترتيب الأوراق في النبات). ليقال الطلبة نظرة فاحصة على شكل 1 ويحاولون إيجاد نسبة النبتات Plant Ratio. ارسم شكلاً توضيحياً على اللوحة، وحاول أن توفر نباتاً حياً، إذا كان الأمر ممكناً.



شكل (1)

هدف الأداء Performance Objective

سيتمكن الطلبة من تمييز وتوضيح أين توجد الرياضيات بالطبيعة وفي حالة واحدة كحد أدنى.

التقييم السابق Preassessment

إن تعاقباً (سلسلة) مشهوراً للأعداد (أعداد فايبوناتشي The Fibonacci Numbers) كان النتيجة المباشرة لمسألة طرحها ليوناردو Leonardo من مدينة بيتزا Pisa في كتابه Liber Abaci (1202) بخصوص تكاثر الأرانب. إن استعراضاً مختصراً لهذه المسألة يوضح بأن العدد الكلي لأزواج الأرانب التي تولد كل شهر تحدد التعاقب: 1، 1، 2، 3، 5، 8، 13، 21، 34، 55، 89....

تمتلك أعداد فايبوناتشي جملة من الخصائص الممتعة، وقد ظهر بأنها موجودة في الطبيعة.

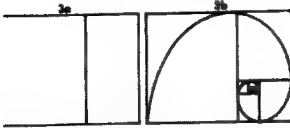
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليقم الطلبة بتقسيم كل عدد في سلسلة فايبوناتشي على شريكه من الجهة اليمنى لكي يروا نوع التعاقب الجديد الذي سينشأ عن ذلك. سوف يحصلون على سلسلة من الكسور:

$$\frac{55}{89}, \frac{34}{55}, \frac{21}{34}, \frac{13}{21}, \frac{8}{13}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

اسأل الطلبة إذا كانوا قادرين على إيجاد علاقة بين هذه الأعداد، وأوراق النبات (ليكن هناك نبات بين يديك). من خلال منظور أعداد فايبوناتشي، يستطيع المرء أن يلاحظ فترتين: (1) إن عدد الأوراق عند المضي قدماً (وبالدوران حول الساق) من أي ورقة نحو التي تليها كائنة بنفس المحل (2) أن عدد الدورات عندما يتبع المرء الأوراق بالذهاب من ورقة إلى أخرى كائنة بنفس المحل أيضاً. في كلا الحالتين، فإن هذين العددين يتقلمان في النهاية لكي يصبحا من أعداد فايبوناتشي. في حالة ترتيب أوراق النبات، فقد استخدم الرمز الآتي:

في هذا الشكل، إن نسبة النيات هي $\frac{5}{8}$.



(شكل 3)

إذا قسم المستطيل (شكل 3a) بمستقيم إلى مربع ومستطيل ذهبي، وإذا استبقينا تقسيم كل مستطيل ذهبي، بنفس الطريقة، تستطيع إنشاء "حلزون لوغاريتمي Logarithmic Spiral" في المستطيلات المتتالية (شكل 3b). إن هذا النوع من المنحنيات يكثر العثور عليه في انساق البذور بالأزهار، والأصداف البحرية، والفواقع. اجلب رسوما توضيحية لعرض هذه الحلزونات (شكل 4).



(شكل 4)

كمثال آخر على الرياضيات في الطبيعة، ينبغي أن يتأمل الطلبة ثمرة الأناناس Pineapple. يلاحظ فيها وجود ثلاثة حلزونات مميزة من الأشكال السداسية: مجموعة من خمسة حلزونات تلفت تدريجيا في اتجاه واحد، ومجموعة ثانية من 13 حلزونا تلفت بانحدار كبير ونفس الاتجاه، وأخيرا مجموعة ثالثة تتألف من ثمانية حلزونات تلفت باتجاه معاكس. تتألف كل مجموعة من الحلزونات من عدد فايبوناتشي. يتفاعل كل حلزوني لإعطاء أعداد فايبوناتشي. يظهر شكل 5 تمثيلا لثمرة الأناناس مع ترقيم المقاييس بالترتيب. يحدد هذا الترتيب بواسطة المسافة (النسبية) التي يبعد بها كل شكل سداسي عن القاعدة. أي إن الشكل السداسي الأدنى يرقم بالرقم 5، والذي يقع أعلاه يرقم بالرقم 1. لاحظ بأن المسدس 42 يعلو قليلا عن المسدس 37.

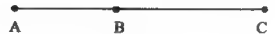
إن كوز الأناناس Pine Cone يمثل تطبيقا من تطبيقات أعداد فايبوناتشي. إن القنابات Bracts الموجودة على الكوز تعد أوراقا محورة انضغطت إلى مساحة أصغر. عند إمعان النظر في الكوز، يستطيع المرء أن يلاحظ حلزونين Spirals، أحدهما على اليسار (باتجاه عقارب الساعة) والثاني على اليمين (عكس اتجاه عقارب الساعة) أن إحدى الحلزونين يزداد بزاوية حادة، بينما يزداد الحلزون الثاني بالتدريج. ليتأمل الطلبة الحلزونات - شديدة الانحدار ويباشروا بإحصائها بالإضافة إلى الحلزونات التي تزداد بالتدريج. ينبغي أن تكون الأعداد من نوع أعداد فايبوناتشي. على سبيل المثال، يحتوي كوز الصنوبر الأبيض على خمسة حلزونات باتجاه عقارب الساعة، وثمانية بعكس اتجاه عقارب الساعة. وقد تحتوي ثمار الاناناس الأخرى علي قيم متفاوتة لنسب فايبوناتشي.

بعد ذلك، ليقم الطلبة باختيار زهرة الربيع Daisy ليروا مواطن انطباق نسب فايبوناتشي عليها. إذا نظرنا بامعان إلى نسب أعداد فايبوناتشي المتعاقبة، نستطيع تقريب الأعداد المشربة المكافئة لها. ان بعضا منها سيكون:

$$(1) \frac{2}{3} = .666667 \quad (2) \frac{3}{5} = .600000$$

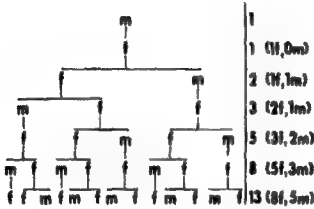
$$(3) \frac{89}{144} = .61056(4) \frac{144}{233} = .618026$$

بالاستمرار على هذا المثال، سنصل إلى ما يعرف "بالنسبة الذهبية Golden Ratio". إن النقطة B في شكل 2 تقسم المستقيم \overline{AC} إلى النسبة الذهبية،

$$0.618034 \approx \frac{BC}{AX} = \frac{AB}{BC}$$


شكل 2

والآن تأمل سلسلة من المستطيلات الذهبية (الشكل 3a و 3b). والتي قد اخترت أبعادها بحيث أن نسبة العرض/الطول تمثل نسبة ذهبية (بمعنى، $\frac{w}{1} = \frac{1}{w+1}$).



ينبغي أن يكون واضحاً، من الآن، بأن هذا النمط هو تعاقب فايوناشي.

التقييم اللاحق Postassessment

1. اطلب من الطلبة توضيح طريقتين مختلفتين تظهر الرياضيات ذاتها من خلالها في الطبيعة التي تحيط بنا.
2. ليحاول الطالب إيجاد أمثلة عن أعداد فايوناشي في الطبيعة (غير التي تم عرضها في هذه الوحدة) وليقوموا بتوضيح الأسلوب الذي يستخدم فيه التعاقب.

مراجع References

- Brother U. Alfred, An Introduction to Fabionacci Discovery, San Jose, Calif.: The Fabionacci Association, 1965.
- Bicknell, M. and Vernes E. Hoggatt, Jr., A Primer for the Fabionacci Numbers, San Jose, Calif: The Fabionacci Association, 1972.
- Dunlap, Richard A., The Golden Ration and Fabionacci Numbers, River Edge, New Jersey: World Scientific Publishing Co., 1997.
- Hoggatt, Verner, E., Jr., Fabionacci and Lucas Numbers, Boston: Houghton Mifflin, 1969.



مسألة يوم الميلاد

31

The Birthday Problem

سؤدي إلى ترسخ مبدأ الاحتمالات وسيساعد في إقناعهم بالقبول الظاهري للاحتمالية. أما إذا لم يكن هناك ثمة اشتراك، حاول أن تبين لهم بأنه لم يطرح أي ادعاء بصدد اليقين المطلق لهذه القضية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies
استعرض المبادئ الأساسية الآتية والتي يفتقر الطلبة إلى معرفتها. توصف الاحتمالات الرياضية بصورة عشرية بين 0.00 و 1.00، وتعني احتمالية 0 (صفر) استحالة حدوث النتيجة، بينما تمثل احتمالية 1 (واحد) بأن نتيجة محددة تعد يقينية لا غبار عليها.

إن كلا من المبادئ التي طرحت هنا يمكن أن توضح بمجموعة من الأمثلة البسيطة حول نقر العملة بالإصبع Tossing، ورمي أحجار الزهر، وسحب البطاقات، ... الخ. فعلى سبيل المثال، إن احتمالية رمي مجموع 13 رمية زوج من أحجار الزهر الاعتيادية تساوي صفراً، بينما تبلغ احتمالية إلقاء أحجار الزهر بعدد يتراوح ما بين 2 و 12 (متضمناً العدد 12) المقدار 1.0.

إن احتمالية حدوث النتيجة المطلوبة يمكن احتسابها عن طريق إعداد كسر يكون بسطه ممثلاً لعدد النتائج (القبولة Acceptable) أو (الفاشلة Unsuccessful) أو (الإخفاقات Failure). ويمكن تمثيل هذا الأمر رمزيًا $P = \frac{S}{S+F}$ أو $P = \frac{S}{T}$ حيث تمثل P حصول حادثة معينة، و S عدد النتائج الناجحة، و F عدد النتائج غير الناجحة/الفاشلة، بينما يمثل الرمز T المجموع الكلي للنتائج الممكنة. يمكن من خلال أي من هاتين الصيغتين تحويل النتيجة إلى صيغة عشرية تتراوح بين الصفر و 1 نظراً لأن البسط لن يزيد على المقام بأي حال من الأحوال.

ينبغي أن يلاحظ الطلبة أيضاً بأن احتمالية نتيجة مطلوبة تفشل بالحصول قد تساوي $\frac{F}{S+F}$.

يستمتع الطلبة بالمسائل التي تتضمن نتائج مذهشة، وغير متوقعة. وسوف تجعل (مسألة يوم الميلاد) الطلبة ينهمكون في دراسة الاحتمالات الرياضية.

هدف الأداء Performance Objective

في مسائل تتضمن تماقيا من الأحداث المتتالية مثل: دلالات حول أيام الميلاد، ونقر العملات المعدنية بالأطراف، وسحب بطاقات اللعب، وقذف أحجار الزهر، سيقيم الطلبة باحتساب الاحتمالات التي تحدد أن نتيجة محددة (أ) تحدث مرة واحدة على الأقل. (ب) تفشل بالحدوث على الإطلاق.

التقييم السابق Preassessment

حاول أن تستفسر من طلبة الصف عما يعتقدونه بصدد احتمالية اشتراك طالبين بالصف في نفس يوم الميلاد. وسوف يستجيب الطلبة إلى ذلك باعتقادهم أن فرصة صدق هذه القضية أمر مستبعد. حاول أن تصيهم بالدهشة في إخبارهم بأن في صف يحوي 30 طالباً، تبلغ احتمالية وجود طالبين، على الأقل، يمتلكان نفس يوم الميلاد تصل إلى حوالي 0.68 (إن احتمالية مقدارها 1.00 تدل على يقين مطلق). وترتفع هذه الاحتمالات في صف يبلغ عدد طلابه 35 فتصل إلى حوالي 0.80. حاول أن تصرح بهذه الاحتمالات في لغة (الأرجحيات Odds). وبين بأن الأرجحيات في صالح النتيجة المطلوبة هي للوهلة الأولى أفضل من 2 إلى 1 في الثانية 4 إلى 1. استنسخ، ثم وزع قائمة بأسماء رؤساء الولايات المتحدة مع تواريخ ولادتهم ووفياتهم. وأعط الطلبة وقتاً كافياً بتأمل هذه القائمة، والبحث عن تواريخ مشتركة بين الرؤساء. (اثنان منهما، Harding, Polk، ولدا في نوفمبر، واثنان منهما، Fillmore, Taft، توفي في 8 مارس، وثلاثة منهم، Adams, Jefferson، Monroe توفوا في 4 يوليو).

والآن قم بجولة في الصف لتحديد هل أن ثمة مجموعة من الطلبة يشتركون بيوم الميلاد. وإذا تحقق ذلك، فإن هذا الأمر

إلى السنة الاعتيادية ذات الـ 365 يوما. وإذا كان تاريخ ميلاد أحد طليتك يقع في 29 شباط، استخدم مقامات بـ 366 وليكن الكسر الأول لديك $\frac{366}{366}$.

حاول أن توضح بأن هذه الكسور تصف احتمالية سؤال الطلبة على التوالي عن عدم ورود تواريخ قد ذكره سابقا أحد الطلبة السابقين. واعمد إلى بيان المبدأ الأساسي لحساب الاحتمالات الخاصة بالأحداث المتعاقبة - ذات التساؤل المتتالي. وسيبدي الطلبة اهتماما في تعلم أفضل كيفية لإنجاز عمليات الضرب والقسمة المتتالية - إن أفضل أسلوب سيكون من خلال استخدام الآلة الحاسبة.

سيكتشف الطلبة بأن قيمة حاصل ضربهم قد نقص إلى حوالي 0.32 عندما يصل عدد العوامل إلى 30، وإلى حوالي 0.20 عندما يصل عدد العوامل 35. نظرا لأن هذه الأعداد تعرض احتمالية عدم اشتراك طلبة الصف بنفس يوم الميلاد، فإنها تصف (الإخفاقات) وفق اصطلاح هذه المسألة. باستخدام مبدأ الطرح من 1.0، كما ذكر سابقا، للوصول إلى احتمالات (النجاح) - احتمالية وجود طالبين في الصف يشتركان بنفس يوم الميلاد - سوف نصل إليها عند 0.68 أو 0.80 أو عند كسر عشري أكبر، استنادا إلى حجم الصف. وعندما يصل عدد الأشخاص في المجموعة إلى 55 تماما، فإن احتمالية إيجاد اثنين، على الأقل، بنفس يوم الميلاد تصل إلى القيمة المدهشة 0.99!.

التقويم Evaluation

إن الطلبة الذين نجحوا بالوصول إلى هدف الأداء سيكونون قادرين على إجابة هذه الاحتمالات أو أخرى مشابهة لها بصورة صحيحة:

- 1- اعرض احتمالية أن في مجموعة تتألف من 15 شخصا، هناك اثنان على الأقل يشتركان بنفس يوم الميلاد.
- 2- إذا نقرت قطعة نقود بالإصبع إلى الهواء خمس مرات، ما هي احتمالية:

(أ) أن تستقر القطعة على الوجه بأي من هذه النقرات.
(ب) هناك على الأقل مرة واحدة تستقر القطعة على وجهها.

- 3- إذا سحبت بطاقة ورق اللعب من ورقة لعب اعتيادية تحوي 52 ورقة لعبة فاخترت واستبدلت، وإذا تم تكرار ذلك أربع مرات، ما هي احتمالية كون:

(أ) هناك بطاقة ورق واحدة على الأقل مسحوبة تحوي البستوني؟ (Spade)
(ب) ليس هناك بين الأوراق المسحوبة آس Ace؟

ونظرا لكون $1 = \frac{S+F}{S+F} = \frac{S}{S+F} + \frac{F}{S+F}$ فإنها تتبع $\frac{S}{S+F} = 1 - \frac{F}{S+F}$.

والآن ينبغي أن يبين الطلبة، وبيانات واضحة، ودقيقة بأن احتمالية حصول نتيجة مطلوبة يساوي عدديا 1.00 مطروحا منه احتمالية فشل هذه النتيجة. إن هذه القضية ستسهم في مساعدة الطلبة على إكمال الدرس.

يجب أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالنظرية الأساسية للاحتتمالات، والتي قد تم عرضها هنا بدون برهان: إذا كان احتمالية حادثة ما تساوي P_1 ، وإذا حصلت هذه الحادثة فإن احتمالية الحادثة الثانية ستكون P_2 ، وعليه فإن احتمالية حصول هاتين الحادثتين هي P_1P_2 . حاول أن تنبه الطلبة إلى إمكانية تعميم هذا المبدأ لحساب احتمالية حدوث n من الحوادث، إذا علمت بأن كل حادثة من هذه الحوادث التالية قد حصلت، وأن النتيجة ستكون $P_1P_2P_3P_4 \dots P_n$.

على سبيل المثال، فإن قيام الطلبة بالعمل على الأنشطة الآتية سيجعلهم يدركون بأن احتمالية سحب بطاقة البستوني Spade من شدة ورق اللعب التي تحتوي على 52 ورقة هي $13/52$ أو 0.25، وأن احتمالية عدم سحب بطاقة البستوني هي $39/52$ أو 0.75، حيث أن كلا من الاحتمالين يشير إلى سحب ورقة لعب واحدة فقط من الشدة، وعلى الطلبة ملاحظة أن $0.25 + 0.75 = 1.00$.

إن احتمالية الحصول على وجه العملة النعمية بعملية النقر، يتبعها المؤخرة، ويتبعها مؤخرة ثانية، عندما تنقر قطعة نقود ثلاثة مرات على التوالي ستكون $1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2$ أو $1/8$ ، وتعرض هذه النتيجة بوضوح استخدام المبادئ الأساسية للاحتتمالية في التعامل مع الحوادث المتعاقبة.

نعود ثانية إلى مسألة يوم الميلاد، تستطيع أن تبين للطلبة بأنه من السهل حساب احتمالية "عدم" وجود طالب في الصف يشارك غيره في يوم ميلاده، ثم تلجأ إلى طرح هذه النتيجة من العدد 1.0، بدلا من الحساب المباشر لاحتمالية وجود طالبين على الأقل في الصف يمتلكان نفس يوم الميلاد. حاول أن تساعد الطلبة على صياغة العرض الآتي لاحتمالية عدم وجود طلبة في الصف يشتركون بيوم ميلادهم:

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{357}{365} \cdot \frac{358}{365} \cdot \frac{359}{365} \cdot \frac{360}{365} \cdot \frac{361}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{365}{365} \dots$$

سيكون هناك المزيد من الكسور في حاصل الضرب، ويعد الطلبة الموجودين في الصف. لاحظ بأن هذه الصياغة قد ارتكزت

هيكل نظام الأعداد



The Structure of Number System

بوصفها مجموعة الأعداد الطبيعية. استنبط أمثلة توضيحية أخرى عن الأعداد الطبيعية ودع الطلبة يصفون المجموعة بواسطة جدول: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن عناصر هذه المجموعة مرتبة، وغير محددة في العدد، وأن المجموعة تمتلك العنصر الأول أو الأصغر، العنصر 1.

استمر بنفس الأسلوب لتطوير مبدأ مجموعة الأعداد الصحيحة. وقم بتعديل المعادلة التي طالعناها قبل قليل بعكس قيمة الثابتهين $3x + 11 = 5$. وعندما يحصلون على $x = -2$ كحل للمعادلة، فإن الطلبة سوف يذهبون إلى اعتبار هذه القيمة عددا تاما سالبا أو يطلقون اصطلاحا آخر مشابهها عليها. أطرح الاصطلاح (عدد صحيح Integer) إذا لم يذكر داخل الصف. وسوف يتفهم الطلبة مباشرة بأن هذا الاصطلاح هو مرادف للاصطلاح (العدد التام Whole Number) وأن الأعداد الطبيعية التي درسناها الآن هي عبارة عن مجموعة فرعية لمجموعة الأعداد الصحيحة. يمكن أن يوضح هذا بواسطة مخطط فين Venn Diagram، والذي يتألف، في ضوء هذه المرحلة من الدرس، من دائرة داخلية تحمل عنوان "N" لوصف مجموعة الأعداد الطبيعية، ودائرة خارجية تحمل عنوان I لوصف مجموعة الأعداد الصحيحة. إن هذا المخطط سوف ينمو وتزداد تفاصيله تدريجيا مع تقدمنا في هذا الدرس عن طريق إضافة ثلاثة دوائر إضافية، تحيط كل منها بمجموع الدوائر التي سبقتها. استنبط مجموعة من الرسوم التوضيحية للأعداد الصحيحة ومد يد العون لطلبتك لوصف هذه المجموعة بواسطة جدول:

$$I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

سوف يلاحظ الطلبة بأن هذه المجموعة هي مجموعة غير محدودة، وأنها مرتبة، ولكنها لا تحتوي على عنصر أولي. والآن، اعرض المعادلة $2x + 1 = 6$ ، وعندما سيبدو الحل $5/2$ ، سيرك الطلبة بأن هذا العدد "لا ينتمي" إلى مجموعة الأعداد الطبيعية، أو مجموعة الأعداد الصحيحة نظرا لعدم كونه عددا تاما، ولكنه عبارة عن كسر على الأصح. حاول أن توضح بأن مثل هذه الأعداد تنشأ عن أعداد نسبية بين عددين

هدف الأداء Performance Objective

عند تحديد أي عدد، سيعمد الطلبة إلى اعتباره منتبها لمجموعة: الأعداد الطبيعية، أو الأعداد الصحيحة، أو الأعداد النسبية rational number، أو الأعداد الحقيقية، أو الأعداد المركبة. وسيعوم الطلبة، أيضا، بتحويل أي مرتبة عشرية تمثل العدد النسبي إلى ما يكافئها بالصيغة الكسرية، والعكس بالعكس.

التقييم السابق Preassessment

قم بتقييم قابلية الطلبة بالاختبار الأولي الآتي، مؤكدا لهم بأن هذا اختبار تجريبي، ولن تمنح لهم درجات على عملهم فيه:

1- ميز الأعداد الآتية فيما إذا كانت تنتمي إلى: الأعداد الطبيعية، أو الأعداد الصحيحة، أو الأعداد النسبية، أو الأعداد الحقيقية، أو الأعداد المركبة (قم بتسمية "أصفر" مجموعة ممكنة في كل حالة) -3 ، $5/3$ ، 17 ، $\sqrt{2}$ ، 3.14 ، $\sqrt{-9}$ ، $22/7$ ، 4 ، 0.2133333 ، 2.71828 ، \dots ، 0.12112112 ، \dots ، 15 ، 15 ، $1/4$ ، $-\sqrt{16}$ ، الخ.

2- حول كل من الكسور الآتية إلى مراتب عشرية: $3/8$ ، $7/5$ ، $2/3$ ، $7/9$ ، $5/11$ ، $5/12$.

3- حول كلا من الكسور العشرية الآتية إلى كسور اعتيادية:

$$0.875$$
، 8 ، 272727 ، 0.8333333 ، \dots

إن الطلبة الذين يبلون بلاء حسنا في الاختبار الأولي يكونون قد بلقوا هدف الأداء. وحاول أن تكلفهم بواجب محدد مختلف بينما تقوم بعرض هذا الدرس لبقية طلاب الصف.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

أطلب من التلاميذ حل معادلة خطية بسيطة مثل $3x + 5 = 11$. عندما يقدم الحل الصحيح، $x = 2$ ، اسأل الطلبة عن نوع هذا العدد. قد يستخدم الطلبة اصطلاحات مثل (عدد تام Whole number) أو (عدد موجب Positive Number) في إجاباتهم. حاول أن توضح بأن 2 هو عدد قابل للمد Counting Number، وأن مجموعة الأعداد القابلة للمد تعرف رياضيا

$$N = 0.131313...$$

اضرب بالعدد 100 :

$$100N = 13.131313...$$

$$N = 0.131313$$

$$99N = 13$$

بواسطة الطرح

$$N = 13/99$$

$$N = 0.1666666...$$

اضرب بالعدد 10 :

$$10N = 1.666666...$$

$$N = 0.1666666$$

$$9N = 1.5$$

بواسطة الطرح

$$90N = 15$$

$$N = 15/90 = 1/6$$

حاول أن تجهز طلبتك بمجموعة شواهد توضيحية، تتضمن بعض الأجزاء غير المتكررة بصيغة كسور عشرية قبل أن يظهر القسم المكرر، كما في المثال الثاني أعلاه. وساعدهم على إدراك حقيقة أن مثل هذه الكسور العشرية تمثل أعداد نسبية، رغم أن أجزائها غير المتكررة قد تكون طويلة نوعاً ما، ما دامت محدودة في طولها، وإن قسماً مكرراً يتبعها يتألف من مرتبة واحدة أو أكثر.

أصبح طلبتك الآن جاهزين للأخذ بعين الاعتبار الكسور غير المنتهية، غير المتكررة. كما أنهم قد أصبحوا على معرفة كافية ببعض التفاصيل الآتية، خصوصاً $\pi = 3.14159...$ وكذلك بالطبع الجذور التربيعية لبعض المربعات غير التامة. (ركن متأكداً من فهم الطلبة بأن أعداداً مثل $22/7$ و 3.14 أو 3.1416 لا تعدو عن كونها تقريبات للعدد الجذري π). افترض المعادلة $x^2 + 2 = 7$. إن الذين يمتلكون معرفة كافية بخوارزمية الجذر التربيعي يمكن أن يطلب منهم العمل على $\sqrt{5}$ ليضعة مراتب عشرية لتحديد إمكانية ظهور نمط للتكرار. وسوف يكتشف الطلبة، انعدام هذا الاحتمال، وذلك لأن $\sqrt{5} = 2.236...$ وهو غير نسبي.

إن الطلبة الذين لا تتوفر لديهم معرفة كافية بالخوارزمية يمكنهم الرجوع إلى جدول للجذور التربيعية، وسوف يكتشفون بأن الجذور التربيعية الوحيدة التي تحتوي على الكسرات في صورتها العشرية هي تلك التي تخص المربعات التامة. إن جميع الجذور التربيعية المتبقية هي أعداد غير نسبية، نظراً لكونها كسور عشرية غير منتهية، وغير متكررة. قد ترغب أيضاً بتعميم هذه النتيجة إلى حد الجذور النونية Nth Roots للأسس النونية غير التامة Non perfect nth power.

صحيحين، a/b ، حيث يكون المقام b غير مساوياً للصفر (أسأل الطلبة لماذا لا يكون صفراً!).

إن الاصطلاح (عدد نسبي) اشتق من كلمة (نسبة) (Ratio). أضف الدائرة الثالثة إلى مخطط فين، بحيث تحيط تماماً بالدائرتين السابقتين. ضع عنواناً جديداً (Q) تعبيراً عن كلمة خارج القسمة Quotient لوصف الدائرة الجديدة (الثالثة).

استنبط مجموعة كبيرة من الشواهد التوضيحية عن الأعداد النسبية، متضمنة الكسور التامة وغير التامة Proper and Improper fractions، ويقوم سالبة وموجبة لكل منها. ينبغي أن ينتبه الطلبة إلى كون مجموعة الأعداد النسبية غير محدودة. ومرتبطة. غير أنه لا يمكن إعداد جدول لها. تستطيع أن توضح للطلبة بأن الأعداد النسبية تمتاز بكونها (كثيفة في كل مكان Everywhere Dense) وأن الكمية اللامتناهية Infinitude النسبية يمكن أن تقع بين أي عددين من الأعداد النسبية.

لقد أصبحنا جاهزين الآن لاختبار الكسور العشرية. بصورة عامة. سيظهر الطلبة بعضاً من عدم اليقين بمدى تشخيص أي منها يصف الأعداد النسبية. لذا ينبغي أن نأخذ بعين الاعتبار المراتب العشرية المنتهية، والراتب العشرية غير المنتهية - المتكررة، والراتب العشرية غير المنتهية - غير المتكررة. يستطيع طلبتك الحصول على بضعة مفاتيح عبر تحويل بعض الكسور مثل $1/8$ ، $5/9$ ، $1/6$ إلى كسور عشرية عن طريق تقسيم بسطها على مقامها. وسوف يلاحظ الطلبة بأن النتيجة، في كل حالة، قد تكون إما كسراً عشرياً منتهياً، أو كسراً عشرياً غير منتهي ولكنه مكرر. يستطيع أن يلاحظ الطلبة، بسهولة، بأن كل كسر عشري منتهي يصف عدداً جذرياً عن طريق كتابة كل منها ككسر عشري.

بعدها، أعرض الكسور العشرية غير المنتهية. ويمكن تحدي الطلبة الذين يعتقدون بأن $\sqrt{3}$ يمثل عدداً نسبياً عن طريق كتابته بصورته العشرية. وقد يدرك البعض هذا الكسر العشري مساوياً $1/3$. وإذا كان الأمر كذلك، تحدى هؤلاء بالكسر العشري 0.5 والذي حصلوا عليه سابقاً عند تحويل الكسر $5/9$ إلى كسر عشري، أو تحداهم بالكسر العشري 0.1666 والذي قد حصلوا عليه أيضاً سابقاً عند تحويل الكسر الاعتيادي $1/6$ إلى كسر عشري.

أسأل طلبتك فيما إذا كانوا قادرين على تحويل هذه الكسور العشرية إلى كسور اعتيادية وإذا كانوا عاجزين عن الوصول إلى الإجابة! أو، تحداهم بالكسر العشري 1.3 ، بسبب عدم معرفتهم للإجابة. وإذا كان الطلبة بحاجة إلى مساعدتك في تحويل هذه الكسور الاعتيادية إلى كسور عشرية، فإن عرض شاهدين توضيحيين سوف يكون كافياً في توضيح هذه التقانة.

حاول أن تبين لهم بأن الأعداد غير الحقيقية يطلق عليها (خيالية Imaginary) وأن الأعداد الخيالية تكون مع الأعداد الحقيقية المجموعة التي يطلق عليها (الأعداد المركبة Complex Number) قد ترغب بتقديم الرمز $i = \sqrt{-1}$ بحيث يستطيع الطلبة كتابة حل لمعادلتهم الأخيرة بصيغة $2i$ ، $-2i$ اكمل مخطط فين بالدائرة الخامسة والأخيرة، والتي تحيط تماماً بالدوائر الأربعة الأخرى، وتظهر مجموعة الأعداد الحقيقية بوصفها مجموعة جزئية - تامة للأعداد المركبة، C.

تقويم Evaluation

أعط الطلبة اختباراً يشابه الاختبار الأولي، واعمد إلى مقارنة إجابات كل طالب في هذين الاختبارين لقياس مقدار التقدم في فهم الموضوع.

وضح لطلبتك بأن كلا من مجموعتي الأعداد النسبية وغير النسبية تشكلان مجموعة الأعداد الحقيقية. أضف دائرة رابعة إلى مخطط فين الذي قمت بإعداده، وحدد له الرمز R، وسيتضمن تماماً جمع الدوائر الثلاثة التي تم رسمها سابقاً.

ينبغي على الطلبة أن يدركوا بأن مجموعات كل من: الأعداد الطبيعية، والأعداد الصحيحة، والأعداد النسبية، تعد كل منها مجموعة جزئية تامة لمجموعة الأعداد الحقيقية.

إن هذا التطوير في هيكلة نظام الأعداد يمكن أن يستنتج من خلال معالجة سريعة للأعداد المركبة. أطلب من تلامذتك محاولة حل المعادلة $x^2 + 4 = 0$. وحاول أن تساعد على سبب كون الإجابات مثل $2i$ ، $-2i$ تعد غير صحيحة، وسوف يدركون سريعاً بأنه لا يوجد عدد حقيقي يمكن أن يكون حاصل مربعه -4 . أو أي عدد آخر سالب، من أجل هذا لم تكن الإجابات صحيحة

جولات في أسس الأعداد

Excursions in Number Bases



الخلفية الجبرية لدى طلبة الصف. حاول أن تسأل الطلبة، أو أن تقم نشاطهم السابق بهذا المضمار كي تحدد كم سيستفيد الطلبة من الدرس، وما مقدار الفهم الذي سينشأ لديهم عنه، وإلى أي حد سيتمكنون من فهم فكرة قيمة المراتبة عند كتابة الأعداد، ومعنى الصفر والأسس السالبة، والتقانات المستخدمة لحل المعادلات التربيعية أو تلك التي من درجات أعلى.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استعرض بسرعة حقيقة أن العد العشري تكتب باستخدام نظام قيم المراتب. وحاول أن توضح، على سبيل المثال، بأن العدد 365، يمثل فيه الرقم 3 القيمة 300 بدلاً من 3 فحسب، وأن الرقم 5 يمثل 50 بدلاً من 5، بينما يعد الرقم 6 رقم آحاد ويمثل بالحقيقة العدد 6. بصورة مختصرة، $365 = 300 + 50 + 6$ ويمثل بالأسلوب: $3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$. وينص الأسلوب: $3 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0 = 3107$

أطلب من التلاميذ مزيداً من الشواهد التوضيحية إننا كان

تلم الطلبة منذ مرحلة مبكرة من حياتهم المدرسية بأن الأساس المستخدم في نظام الأرقام الذي يسود حياتنا اليومية (النظام العشري Decimal System) هو العدد 10. وبعد ذلك اكتشف الطلبة وجود أعداد أخرى تؤدي دور الأساس في النظم العددية. على سبيل المثال، الأعداد المكتوبة بالأساس 2 (النظام الثنائي Binary System) تستخدم بكثرة في ميدان أنشطة الحاسوب. سيسعى هذا الدرس إلى استكشاف جملة من المسائل التي تتضمن أعداداً تكتب بعدة أسس صحيحة موجبة.

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بحل مجموعة متنوعة من المسائل العددية والجبرية تم وصفها كعدد في أي أساس صحيح Integral Base موجب $b \geq 2$.

التقييم السابق Preassessment

يعتمد مقدار ما ستسبر فيه ضمن هذا الدرس، لحد ما، على

على سبيل المثال، لدينا في الأساس 5، $2(5)^0 + 2(5)^1 = 12.2_{ten}$ ، $2(5)^1 + 2(5)^2 = 12.2_{ten}$ ، نظرا لأن $1/5 = 2/10$ لذا $2/10 = 12.2_{ten}$ ، أورد مزيدا من الشواهد التوضيحية مع مسائل مشابهة مثل تحويل 7.5_{ten} إلى الأساس 2: $7.5_{ten} = 1(2)^0 + 1(2)^1 + 1(2)^2 = 111.1_{two}$. إن الكسور العشرية التي تكون أجزائها العشرية $(1/2)$ ، $(1/4)$ ، $(1/8)$ ، $(3/4)$ ، (0.75) ، (0.25) ، الخ ... يمكن تحويلها بسهولة إلى أعداد الأساس 2. على سبيل المثال، $8.75_{ten} = 1(2)^0 + 1(2)^1 + 1(2)^2 = 10.11_{two}$ ، وبما أن $0.75 = 3/4 = 1/2 + 1/4 = 1/2^2 + 1/2^1 = 1/2^{-2} + 2^{-1}$ ، لذا $8.75_{ten} = 1000.11_{two}$. يمكن أن تحول الأعداد، أيضا، من الوصف العددي في أساس محدد إلى أوصاف عديدة مكافئة في أساس آخر، حيث لا يساوي أي أساس منها العدد 10. على سبيل المثال، $12.1_{four} = 1(4)^0 + 2(4)^1 + 1(4)^2 = 12.2_{four}$ ، يمكن وصفه بأعداد الأساس 6 كما يأتي: $12.2_{four} = 1(6)^0 + 0(6)^1 + 3(6)^2 = 10.3_{six}$. في الأساس 10، فإن هذا العدد هو 6.5 يجب أن توفر تمارين مناسبة بمسائل عديدة تشابه هذه الأنواع في ضوء اهتمامات وقدرات طلبتك.

إن الصف سيكون جاهزا للتعامل مع المسائل الجبرية في المرحلة التالية. أعرض موضوع التحدي الآتي: (في أساس محدد، b، يكون العدد 52 ضعف العدد 25. جد قيمة b). ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن 52 (تقرأ خمسة، اثنان) تصف بالواقع الصيغة $b5 + 2$ ، نظرا لأن $2 + 5(b)^1 + 0(b)^2 = 2(b)^0 + 5(b)^1$. ووفقا لذلك، فإن المسألة تنص بأن $5b + 2 = 5b + 2(b^2 + 5)$. قم بحل المعادلة بدلالة b لتحصل على $b=8$. إن عملية التدقيق تظهر بأن $52_{ten} = 5(8) + 2 = 42_{ten}$ وأن $25_{eight} = 2(8) + 5 = 21_{ten}$ ، وأن $42 = 2(21)$.

إن المعادلة السابقة هي معادلة خطية فحسب، ولكن المسألة الآتية تتطلب استخدام معادلة تربيعية: (في أي أساس b يوصف العدد 132 ضعف العدد الموصوف 93؟). لديك $132b^2 = (b)^2 + 3(b)^1 + 0(b)^0 = 33b$ وكذلك $2(b)^0 + 3(b)^1 + 0(b)^2 = 2 + 3b$ أو $132b^2 - 3b - 2 = 0$. حل المعادلة بدلالة b بالأسلوب التقليدي للحصول على $b=1$ ، (والذي يجب رفضه نظرا لأن مجال b موجب) وكذلك $b=4$ ، وهو الحل الوحيد المقبول.

دقق $132_{four} = 1(4)^2 + 3(4)^1 + 0(4)^0 = 2 + 3(4) + 1(16) = 20$ وكذلك $93_{four} = 3(4)^0 + 3(4)^1 + 0(4)^2 = 15$ وأن 20 هو ضعف 15. أعرض مسائل مشابهة للطلبة.

إذا قام الطلبة بدراسة حل معادلات ودرجات تزيد على

الأمر ضروريا، كما ويمكن أن تقوم بمراجعة أو تعليم معنى الأس الصفرى، وكذلك الأس السالب مع الطلبة لأن هذه المفاهيم سوف تستخدم لاحقا.

وضح للطلبة بأن استخدام العدد 10 كقاعدة هو أمر كفي لحدا، وينبغي أن يلاحظ الطلبة إمكانية استخدام أعداد أخرى كتواعد. وإذا استخدم العدد 2 كقاعدة، يعبر عن الأعداد كمجاميع أسس 2 بدلا من مجاميع مضاعفات الأعداد الصحيحة الموجبة للأساس 10، وأن الأرقام الوحيدة المستخدمة لوصف الأعداد هي 0، 1.

على سبيل المثال، إن العدد المذكور آنفا 356 يساوي

$$1(2)^8 + 1(2)^7 + 0(2)^6 + 1(2)^5 + 0(2)^4 + 1(2)^3 + 0(2)^2 + 1(2)^1 + 0(2)^0 = 101100100_{two}$$

إن الحروف الصغيرة تشير إلى الأساس. وفي الأساس 3 (حيث أن الأرقام المستخدمة لوصف الأعداد هي 0، 1، 2)

$$356 = 2(1) + 3 + 27 + 81 + 243$$

$$= 1(3)^0 + 1(3)^1 + 0(3)^2 + 1(3)^3 + 1(3)^4 + 2(3)^5$$

$$= 111012_{three}$$

بالنسبة للأساس 5 (حيث الأرقام المستخدمة ستكون 0، 1، 2، 3، 4).

$$356 = 1(5)^0 + 1(5)^1 + 4(5)^2 + 2(5)^3$$

$$= 1(5)^0 + 1(5)^1 + 4(5)^2 + 2(5)^3$$

$$= 2411_{five}$$

إن الرموز السفلية subscripts تكتب بصيغة حرفية بدلا من الصيغة العددية لتجنب أي إرباك محتمل. وينبغي أن ينتبه الطلبة إلى أنه عندما تكون الأعداد في أساس b فإن الأرقام الوحيدة المتوفرة لمثل هذا الوصف هي تلك التي تقع بين صفر إلى b-1، وأنه في حالة كون قيمة b أكبر من 10، ينبغي إنشاء أرقام جديدة لوصف الأعداد 10، 11، 12، ... الخ

حاول أن تذكر طلبة الصف بأن الأعداد مثل 2411_{five} ينبغي أن تقرأ بصيغة (اثنان، أربعة، واحد، واحد، أساس 5).

يجب أن توفر تمارين مناسبة حول كتابة وقراءة الأعداد التامة في أعداد ذات أساسات غير الأساس 10، وفي ضوء حاجات الصف.

بعدما تأمل أعدادا غير الأعداد الصحيحة. ساعد طلبتك على معرفة أن 12.2_{ten} يعني $1(10)^0 + 2(10)^1 + 2(10)^2$ ، نظرا لأن $10^{-1} = \frac{1}{10}$ ، وأن هذا العدد يمكن وصفه بأعداد لأساسات أخرى كما هي الحال في الأعداد الصحيحة.

والذي سيكون مربعا تاما في أي أساس صحيح موجب $b > 5$. ادع طلبتك لمحاولة ترتيب صياغات مثل $3b+1$ ، $2b+2$ ، $4b+1$ ، الخ، للحصول على مربعات تامة أخرى. وقد يرغب البعض الاستمرار بعملية التحري هذه للبحث عن مكعبات تامة. وتربيعات أسس تامة، ... الخ. حاول أن تساعدك بتكمييب $b+1$ ، على سبيل المثال، للحصول على b^3+3b^2+3b+1 ، موضحا بأن الوصف العددي 1331 هو مكعب تام لأي قيمة أساس صحيح $b \geq 4$ (في الأساس 10، $11^3 = 1331$) في الواقع، أن 1331 هو مكعب لأكثر من عدد الأساس في كل حالة! إن هذه الدراسة يمكن أن تستمر بها ما دام الاهتمام قائما مع سماح قدرة طلبة الصف على المواكبة. إن الطلبة الذين يمتلكون معرفة كافية بنظرية ذات الحدين سيجدون من المناسب استخدامها في فتح الأسس الأعلى لصياغات مثل b^2+1 ، $2b+1$ ، ... الخ.

تقويم Evaluation

- إن الطلبة الذين نجحوا في الوصول إلى هدف الأداء سيكونون قادرين على حل مسائل مثل المسائل الآتية:
1. اعرض العدد العشري 78 بوصف عددي للأساس 5.
 2. إن العدد المثلث عدديا بـ 1000.1 في الأساس 2 في أي وصف عددي يمكن تمثيله في الأساس 8 ؟
 3. في أساس محدد b ، فإن العدد الذي المثلث عدديا بـ 54 هو ثلاثة أضعاف العدد الموصوف عدديا بـ 16 جد قيمة b .
 4. في أساس محدد b ، فإن العدد الذي يمثل عدديا بـ 231 هو ضعف العدد المثلث عدديا بـ 113 جد قيمة b .
 5. في أي أساسات يمكن للعدد 100 أن يمثل مربعا تاما؟ وفي أي أساسات يصف العدد 1000 مكعبات تامة؟ هل تستطيع أن تنشئ قاعدة عامة من هذه النتائج ؟

اثنين، بواسطة القسمة التركيبية Synthetic Division (نظرا لأن جميع النتائج ستكون غير كسرية)، والتي تتضمن أعدادا تضمن وصفها في أساسات تتألف من أكثر من ثلاثة أرقام. على سبيل المثال، (في أي أساس b سيكون فيها التمثيل العددي للعدد 1213 ثلاثة أضعاف الوصف العددي للعدد 221؟). سيكون لديك:

$$= 1(b)^1 + 2(b)^2 + 1(b)^3 + 3(b)^0 \\ = b + 2b^2 + b^3 + 3 \text{ أو } [2(b)^2 + 2(b)^1 + 1(b)^0]$$

والتي يمكن تبسيطها إلى $b^3 - 4b^2 - 5b = 0$ ، والتي يمكن تبسيطها إلى $b(2b^2 + 2b + 1) = 0$ ونظرا لكون هذه المعادلة قابلة للتحليل دون اللجوء إلى القسمة التركيبية، قم بحلها كما يأتي:

$b(b+1)(b-5) = 0$ وأن $b = 0$ ، -1 ، 5 . كما مر سابقا، فإن الحل المقبول الوحيد هو القيمة الموجبة $b = 5$. ادع الطلبة إلى تدقيق الإجابة. في النهاية هناك تطبيق جبري ممتع حول تطبيقات أساس العدد والذي اقترح ما يأتي: (في الأساس 10، فإن التمثيل العددي 121 يمثل عددا تاما مربعا. هل يمثل هذا العدد مربعا تاما في أي أساس موجب؟). مد يد العون إلى طلبتك للتغيب في جوانب هذه المسألة كما يأتي:

$$121_b = (b)^2 + 2(b)^1 + 1(b)^0 = b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2.$$

يا للعجب! إن التمثيل العددي 121 يمثل تاما في أي أساس موجب صحيح $b \geq 3$ ، وبعد كذلك مربعا لأكثر من عدد الأساس! هو يوجد ثمة تفعيل عددي مشابه لهذا ؟

قد يكتشف الطلبة تمثيلات عديدة أخرى عبر ترتيب صياغات مثل $(b+2)$ و $(b+3)$ للحصول على أوصاف عديدة 144، 169. إن هذه المربعات التامة في الأساس 10 هي أيضا مربعات تامة في أساس تام موجب يحتوي على الأرقام المستخدمة فيها ($b \geq 10$ ، $b \leq 5$ على التوالي). وليس من الضروري بالنسبة لمعامل b أن يكون مساويا 1. إذا قمت بترتيب $(2b+1)$ ، على سبيل المثال، سوف تحصل على $b^2 + 4b + 1 = 441_b$.

زيادة الربح (الفائدة)

Raising Interest

قائمة خلال السنوات الماضية. كم من المال سيحني أحفاد أولئك الهنود - في هذه الأيام إذا:
 (1) احتسبت نسبة الفائدة البسيطة فقط.
 (2) كانت الفائدة مركبة.
 (أ) سنويا (ب) فصليا (ج) بصورة مستمرة.
 إن إجابات الأسئلة أ، ب، ج سوف تصيب الجميع بالدهشة والاستغراب!

استعرض باختصار صيغة الفائدة البسيطة، والتي تمت دراستها في دروس مبكرة. وسوف يتذكر طلبة الصف بأن الفائدة البسيطة قد احتسبت من حاصل ضرب رأس المال P ، ونسبة الفائدة السنوية r ، والفترة الزمنية بالسنوات t . وفي ضوء ذلك، سوف تكون بين يديك الصيغة: $I = P \cdot r \cdot t$ ، وفي هذه المسألة (354) (06) (24) $I = \$509.76$ مقدار الفائدة البسيطة. أضف هذا المبلغ إلى رأس المال البالغ \$24.00 للحصول على المبلغ A والذي يبلغ \$533.67 المتوفر بالوقت الحالي. لقد استخدمت الآن الصيغة بالنسبة للمبلغ $A = P + Prt$.

مع الاحتفاظ بهذا المبلغ الزهيد في ذاكرتنا (لنأخذ مستحصل بعد 354 عاما!) عاود بالتنقيب عن مقدار ما سيحصل من تحسن في الاستثمار إذا تراكت الفائدة سنويا بدلا من احتسابها على أساس الفائدة البسيطة. برأس مال مقداره P ، ونسبة فائدة سنوية مقداره r ، وعند فترة زمنية مقدارها $t=1$ ، فإن المبلغ $A_1 = P + Pr$ عند نهاية السنة الأولى سوف توفره الصيغة $A_1 = P(1+r)$. (إن الرمز السفلي (1) يعرض السنة التي احتسبت الفائدة عند نهايتها). ولأن أصبحت $A_1 = P(1+r)$ تمثل رأس المال عند بداية السنة الثانية، والتي ستحتسب على أساسها الفائدة التي تخص السنة الثانية. وعليه،

$A_2 = P(1+r) + P(1+r)r = P(1+r)^2$
 وبما أن الصيغة الأخيرة تصف رأس المال عند بداية السنة الثالثة، سيكون لديك

$A_3 = P(1+r)^2 + P(1+r)^2r = P(1+r)^3$
 ومنذ الآن، سلاحظ طلبتك النمط اللينقي، وينبغي أن يكونوا

غالبا ما يجابه الطلاب الإعلانات العائدة إلى مؤسسات الادخار والتي تعرض نسباً جذابة للربح مع ربح مركب تتكرر بالإضافة إلى المبالغ الودعة. ونظرا لكون جل المصارف تمتلك مجموعة متنوعة من البرامج، فإن من الضروري بالنسبة للأشخاص الذين يحتمل قيامهم بإيداع مبالغ من المال في المصارف أن تتوفر لديهم معرفة كافية بأسلوب حساب الربح تحت كل خيار من الخيارات المتوفرة.

Performance Objective هدف الأداء

سيستخدم الطلبة الصيغة الخاصة بالربح المركب لحساب العائد على المبلغ المستثمر لأي نسبة من نسب الربح، ولأي فترة من الزمن، ولأي تكرار شائع لتكوين الربح، وبضمنه التركيب الآني (المستمر Continuous). كما سيقومون أيضا بتحديد أي من الخيارين، أو الخيارات المتاحة تعطي أفضل عائد خلال نفس الفترة الزمنية.

Preassessment التقييم السابق

نظرا لأن هذا الدرس يتطلب توفر القابلية على تطبيق قوانين اللوغاريتمات، تأكد من امتلاك الطلبة معرفة كافية بهذه القوانين. كما وينبغي عليك، أيضا، أن تحدد مقدار حدود المعرفة المتوفرة لديهم، نظرا لأن قدرات الصف تلعب دورا حاسما في تحديد إلى أي مدى سوف تستمر بمعالجة مبادئ التركيب الآني Instantaneous Compounding.

Teaching Strategies استراتيجيات التعليم

اقترح مسألة الفائدة المالية الآتية: (في عام 1626، اشترى Peter Minuit جزيرة مانهاتن Manhattan لشركة غربي الهند الألمانية Dutch West India Company من الهنود مقابل حلية بسيطة كلفت مقدار 60 كيلدر ألماني Dutch Guilders، أو حوالي \$24 دولارا. افترض بأن الهنود كانوا قادرين على استثمار مبلغ الـ \$24 دولارا في ذلك الوقت بقيادة سنوية مقدارها 6%، وافترض كذلك بأن نفس نسبة الفائدة ظلت

مركبة نصف سنوية، $n = 4$ (فصلية)، $n = 12$ (شهرية).

ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن المبلغ A لا يزداد بصورة فلكية عند ازدياد قيمة n ، ولكنه يزداد بصورة بطيئة من \$2.00 ($n=1$) إلى حوالي \$2.60 ($n=12$) في حالة $n=12$. وضح بأن المبلغ A سوف يقارب، ولكنه لن يصل بصورة قاطعة، إلى القيمة \$2.27. (الذي الذي ترغب بمناقشة الحقيقة القائلة أن $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2.71828, \dots$ سوف يعتمد على قابلية الطلبة ومعرفتهم العملية).

نظرا لأن الاستثمارات لا تكسب فائدة مقدارها 100٪، بصورة عامة، ينبغي أن تقوم لاحقا بالتحويل إلى فائدة عامة أو r . إن وضع $r = \frac{1}{k}$ سوف تحصل على $n = kr$ وأن المبلغ $A = P(1 + r/n)^{kn}$ سوف يصبح

$$A = P(1 + 1/k)^{kn} = P[(1 + 1/k)^k]^n$$

يبدو واضحا بأنه عندما تقارب n إلى اللانهاية، وكذلك الحال بالنسبة للمتغير k ، ونظرا لكون r محدودا، فإن الصياغة الموجودة بين الأقواس تقارب قيمة e كنهاية لقيمتها. وبهذا ستحصل على الصيغة $A = Pe^n$ بالنسبة "للفائدة اللحظية"، حيث تمثل r الفائدة السنوية، الأسمية، وأن t هي المدة بالسنوات. قد يستمتع الطلبة بمعرفة أن هذه الصيغة هي وصف خاص لقانون النمو العام (Low of Growth) والذي يكتب عامة بصيغة $N = N_0 e^{kt}$ ، حيث تمثل N الكمية النهائية للمادة والتي كانت كميتها الابتدائية N_0 . توجد تطبيقات متعددة لهذا القانون في عدة ميادين مثل زيادة السكان (الهرس، والبيكتريا في المستنبت Culture، ... الخ)، والانحلال الإشعاعي للعناصر (ويصبح في هذه الحالة قانون الانحلال (Low of Decay)، $(N = N_0 e^{-kt})$).

باستكمال مسألة الاستثمار، مستخدمين 2.72 كقيمة تقريبية للمتغير e ، سيكون لديك:

$$A = 24 (2.72)^{06(354)} = 40,780,708,190.$$

سيرى الطلبة أن (أقصى Ultimate) عائد على مبلغ \$24 المستثمر (عند فائدة سنوية - أسمية مقدارها 6٪ ولدة 354 عاما) سيصل إلى حوالي \$41 مليار.

يستطيع الطلبة، الآن، تطبيق الصيغة التي تم تطويرها. وتعرض المصارف، بالوقت الحاضر، فائدة تتراوح بين 5٪ ولغاية 12٪ (لفترة إيداع مقدارها سنتين أو أكثر، ويعتمد بصورة شائعة احتساب الفائدة المركبة بصورة فصلية، أو شهرية، أو يومية، أو بصورة مستمرة. يستطيع الطلبة العمل على مسائل بقيم مختلفة ومتغيرة: لرأس المال، والنسب الدورية، وتكرار تراكم الفائدة.

قادرين على اقتراح التعميم المناسب للمبلغ بعد مرور t من السنوات، $A_t = P(1+r)^t$.

والآن حاول تجربة هذه الصيغة على المبلغ المستثمر والبالغ \$24 في عام 1626! . مفترضاً فائدة مركبة سنوية مقدارها 6٪، وسيكون لديك

$$A_{354} = 24 (1 + 0.06)^{354} = 21,801,558,740$$

إن هذا يعني بأن المبلغ الأصلي والبالغ \$24 يساوي في هذا الوقت تقريبا \$22 مليار! . سيصاب معظم الطلبة بالدهشة من الفرق الكبير بين هذا المقدار والمبلغ \$533.76 الذي حصلنا عليه عند احتساب الفائدة البسيطة.

تعتمد معظم المصارف، في هذه الأيام، الفائدة المركبة الفصلية، أو الشهرية أو اليومية، أو المستمرة، دون الفائدة السنوية. لذا توجه لاحقا إلى تعميم الصيغة $A = P(1+r)^n$ بعد الأخذ بعين الاعتبار تراكم الفائدة للترات أكثر تلاحقا. وساعد طلبتك على ملاحظة أنه في حالة تراكم الفائدة بمعدل نصف سنوي Semiannual، فإن الفائدة الدورية Periodic rate سيكون مساويا لنصف المعدل الزمني Annual rate، لكن عدد الفترات ستكون ضعف عدد السنوات: وعليه $A = P(1+r/2)^{2n}$ وب نفس الطريقة، إذا تراكمت الفائدة بصورة فصلية $A = P(1+r/4)^{4n}$.

بصورة عامة إذا تراكمت الفائدة n من المرات خلال السنة، سيكون لديك $A = P(1+r/n)^{n}$. يمكن استخدام هذه الصيغة لأي قيمة محدودة من المرات n . بافتراض أن $n = 4$ في المسألة، ينتج عنها $A = 24 (1 + 0.06/4)^{4(354)} = 24 (1.015)^{1416} = 34,365,848,150$. لقد ازدادت قيمة \$24 في هذه المرة إلى \$34 مليار.

ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن تغيير الفائدة المركبة من سنوية إلى فصلية نجم عن زيادة الدخل بحوالي \$12 مليار.

قد يتساءل الطلبة، الآن، حول إمكانية زيادة الدخل بصورة غير محدودة عن طريق زيادة تكرار تراكم الفائدة. إن المعالجة التامة لهذا السؤال تتطلب تطويرا شاملا لمبدأ الحدود Limits، لكن الأسلوب العامي المدرك بالبداهة سيكون وافيا بالفرض في هذه الحالة.

في البداية، دع الطلبة يبدشرون، عملية استكشاف لمسألة أكثر بساطة لمبلغ مستثمر مقدارها \$1 وبفائدة سنوية أسمية Nominal مقدارها 100٪. ولفتره زمنية مقدارها سنة واحدة. إن هذه الظروف سينجم عنها $A = 1(1 + 1.00/n)^n = (1 + 1.00/n)^n$ ادع الطلبة إلى إعداد جدول بقيم A بالنسبة لقيم شائعة للمتغير n ، بحيث تكون قيمها $n = 1$ (فائدة مركبة سنوية)، $n = 2$ (فائدة

يعرض قائمة سنوية مقدارها 5٪ مركبة فصليا، أو من مصرف تجاري يعرض قائمة سنوية مقدارها 4½٪ مركبة بصورة دائمة؟

3- تعرض مصارف قائمة سنوية - اسمية مقدارها 6٪ مركبة بصورة دائمة على أمد توفير مقدار سنتين أو أكثر، وتدعي بأن هذه الفائدة تكافئ (فائدة سنوية مؤثرة Effective Annual Rate) (الفائدة مركبة سنويا) بمقدار 6.27٪. برهن على صحة ذلك، مقترضا أن المبلغ المودع هو \$500 (الحد الأدنى التقليدي) ولدة مقدارها سنتين.

والفترات الزمنية، ثم ليعمدوا إلى مقارنة العوائد، وسوف يندعش الطلبة بالمادة التي تلقوها!.

التقويم Evaluation

إن الطلبة الذين أكملوا هدف الأداء سوف يكونوا قادرين على إجابة الأسئلة التي تشابه ما يأتي:

1- ادعت المصارف التي تعرض قائمة سنوية مركبة فصليا مقدارها 5٪ بأن المبلغ المودع يتضاعف خلال 14 عاما. هل أن ادعائهم صحيح؟

2- إذا كان لديك مبلغا تريد استثماره مقدارها \$1000 ولدة سنتين، هل ستحصل على عائد كبير من مصرف توفير

علاقات الانعكاس، والتماثل، والانتقال

Reflexive, Symmetric, and Transitive Relations

35

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ بمعالجة علاقة بسيطة جدا مثل (يكون مساويا Is Equal to) بالنسبة للأعداد الحقيقية. وسينجح الطلبة من استثمار خبراتهم السابقة، في إدراك حقيقة أن أي كمية a تساوي نفسها، لأنه إذا كانت الكمية a تساوي كمية أخرى تساوي b ، بعدها ستكون b مساوية لـ a ؛ وكذلك إذا كانت الكمية a تساوي كمية أخرى b ، وأن b بدوره تساوي كمية ثالثة c ، بعدها ستكون a مساوية لـ c . وسيكون لدينا رمزا، $a=a$ ، $a=b \rightarrow b=a$ ، وكذلك $a=b$ ، $a=c \rightarrow b=c$. إن السهم يقرأ (يدل فعنا Implies) كما هو الحال في المنطق المؤلف. (استبدل السهم بالكلمة إذا لم يكن طلبة الصف معتادين على استخدام هذا الرمز).

وضح للطلبة بأنه عندما تمتلك الكمية a علاقة محددة بذاتها (كما في $a=a$) فإن تلك العلاقة يطلق عليها (انعكاسية Reflexive). يضاف إلى ذلك، عندما تكون الكمية a تمتلك علاقة محددة بكمية أخرى b ، وأن b تمتلك نفس العلاقة بـ a (كما في $a=b \rightarrow b=a$) فإن تلك العلاقة يطلق عليها (التماثل

ستتوفر للطلبة خلال هذا الدرس فرصة مناسبة لاستكشاف بعض خصائص العلاقات الرياضية السائدة بين الأعداد، والأشكال الهندسية، والمجموعات، والقضايا، والأشخاص، والأماكن. والأشياء.

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بتمييز ماهية علاقات محددة سواء كانت علاقات: انعكاس، أو تماثل، أو انتقال، أو بوصفها علاقة تكافؤ.

التقييم السابق Preassessment

ادع الطلبة إلى وصف طبيعة ما يدل عليه الاصطلاح الرياضي (العلاقة Relation). وإذا لم تتقنع بفهم الاصطلاح، اعرض جملة من الأمثلة، قبل البدء بالدرس. قد ترغب في تنويع العلاقات التي ستعرضها أمام طلبتك، في ضوء مستوى المهمة والخلفية العلمية في موضوعات مثل: الجبر، والهندسة، ونظرية المجموعة، ونظرية العدد، والمنطق.

تأمل بعد ذلك بعض العلاقات السائدة في ميدان الهندسة. في البداية استكشف العلاقات (هو متطابق مع is congruent to) وكذلك (هو مشابه لـ is similar to) بالنسبة للأشكال الهندسية. وسيجد الطلبة صعوبة محدودة في تمييز أن هاتين العلاقتين هما علاقتان متكافئتان. ادع الطلبة إلى اختيار كل من هاتين العلاقتين عندما تكون مرفوضتين. آنذاك ستظهر كل منهما فقط خاصية التماثل.

إن العلاقتين (هو مواز لـ is parallel to) و (هو عمودي على is perpendicular to) تماثل كل منهما بكونهما مثيرتان للاهتمام عندما نحاول تطبيقهما على المستقيمتين في مستوى وعلى المستويات ذاتها.

على سبيل المثال، بالنسبة للمستقيمتين في مستوى فإن (هو مواز لـ) تماثل بكونها تماثلية وانتقالية، ولكن (هو عمودي على) تماثل بكونها تماثلية فقط اطلب من طلبة الصف تبرير ذلك. وسيلجأون إلى استدعاء أفكار وآراء من الهندسة مثل (المستقيمتان الموازيان لنفس المستقيم توازي بعضهما الآخر) المستقيمتان المتعامدتان على نفس المستقيم توازي بعضهما الآخر إن هذه العلاقات يمكن أن تناقش كتمارين.

إن الطلبة الذين يتمتعون ببعض المعرفة حول نظرية المجموعة يمكن أن يستكشفوا العلاقتين (هو مساوي لـ is equal to)، و (هو مكافئ لـ is equivalent to) عند تطبيقهما على المجموعات. نظرا لكون المجموعات المتساوية هي تلك المجموعات التي تحتوي على عناصر متماثلة، يبدو واضحا بأن (هو مساوي لـ) هي علاقة تكافؤية.

تمتلك المجموعات "التكافؤ" نفس العدد من العناصر (يمكن أن توضع عناصرها في توافق واحد - ل - واحد بين بعضها)، ولكن ليس من الضروري تماثلها. إن انعكاسا بسيطا يظهر بأن (هو مكافئ لـ) هي علاقة تكافؤية أيضاً. إن علاقة متممة أخرى هي (هو تكملة لـ is the complement of) عندما تطبق على المجموعات. ينبغي أن يكتشف طلبة الصف بأن هذه العلاقة هي علاقة تماثلية، ولكنها ليست انعكاسية أو انتقالية. (إذا كانت a متممة b وكانت b متممة c بمعدل a ليست متممة c ولكن على الأصح $a=c$).

إن علاقة متممة أخرى من نظرية الأعداد هي (هو منطوق على وحدة Modulo m) بالنسبة للأعداد الصحيحة. إن الطلبة الذين يمتلكون معرفة كافية بهذا البعد ينبغي أن يكونوا قادرين على البرهنة بسهولة بأن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤية، باستخدام الجبر البسيط، $a \equiv b \pmod{m}$ وبما أن $a - b = 0 \pmod{m}$ (تبرهن

Symmetric)، يضاف إلى ذلك عندما تكون الكمية a تمتلك علاقة مع كمية أخرى b وأن b تمتلك علاقة مشابهة بكمية ثالثة c ، ويستنتج عن هذا الأمر أن a تمتلك نفس العلاقة مع c (كما في $a=b$ و $b=c$ و $a=c$) ويطلق على هذه العلاقة صفة (انتقالية Transitive).

إن علاقة تمتلك جميع الخصائص الثلاثة المذكورة يطلق عليها (علامة تكافؤ Equivalence Relation).

والآن ادع الطلبة إلى اختيار بعض العلاقات التي اعتادوا التعامل معها في علمهم المبكر بدائرة العلوم الرياضية. لقد أنشأت قبل قليل قضية أن عبارة (يكون مساويا لـ is equal to) هي علاقة تكافؤ. تابع الموضوع عبر تأمل العلاقتين (يكون أكبر من is greater than)، و (يكون أصغر من is smaller than) بالنسبة للأعداد الحقيقية. سيكتشف طلبة صفك، بسرعة، بأن هاتين العلاقتين ليست انعكاسية أو تماثلية، لكنهما علاقتان انتقالية. إن تغييرا ممثلا ينظمه في العلاقة (لا يكون مساويا لـ is not equal to) بالنسبة للأعداد الحقيقية. ورغم أن هذه العلاقة ليست انعكاسية، فإنها تعد تماثلية في خصائصها. وقد يعتقد الطلبة، أيضا، بأن هذه العلاقة هي انتقالية ولكن مثالا عدديا - $7+2 \neq 9+6$ وكذلك $11+4 \neq 7+2$ ولكن $11+4 = 9+6$. لذا فإن العلاقة (لا يكون مساويا لـ) ليست انتقالية.

لاحظ بأن جميع العلاقات التي تناولناها بالدراسة هي ليست علاقة تكافؤية. دع الطلبة يتناولون بالدراسة علاقة أخرى. على سبيل المثال، (هو مضاعف لـ is multiple of) أو (قابل للقسمة على is divisible by) و (هو عامل لـ is a factor of) بالنسبة للأعداد الصحيحة. إن جميع هذه العلاقات تماثل بكونها انعكاسية وانتقالية، ولكن أيها منها لا يعد تماثليا. ادع طلبتك إلى برهنة هذه الحقائق جبريا. بالنسبة للعلاقة الأولى، على سبيل المثال، قد يلجأ الطلبة إلى كتابة $a = kb$ و $b = me$. حيث يمثل كل من m, k أعدادا صحيحة. ويبدو واضحا بأن $a = 1a$ قابل للقسمة على a (انعكاسية)؛ $a / b = k$ ونظرا لكون a قابل للقسمة على b ولكن $b / a = 1/k$ وهو ليس عددا صحيحا، لذا فإن b غير قابلة للقسمة على a (غير متماثلة)؛ $a = kb$ وكذلك $a = k(mc)$ و $b = mc$ أو $a/c = km$ ، وهو عدد صحيح، نظرا لأن حاصل ضرب عددين صحيحين يكون عددا صحيحا، (مجموعة الصحيحة قد أغلقت عند الضرب)؛ لذا فإن a قابل للقسمة على c (انتقالية).

محددة أو بلد واحد)، (هو على ارتفاع أكبر من $is\ at\ a$ higher altitude than)، (يبعد ميلا واحد بالضبط عن $is\ exactly\ in\ mile\ from$)، وكذلك (هو أقل من ميل واحد بالضبط من $is\ less\ than\ one\ mile\ from$) (انعكاسية وتماثلية). إن العلاقات بين الأشياء قد تتضمن: (هو فوق $is\ above$)، (هو أكبر من $is\ older\ than$)، (يكلف بقر $costs\ more$)، وكذلك (يكلف أكثر من $costs\ as\ much\ as$) (than).

التقويم Evaluation

إن الطلبة الذين نجحوا بالوصول إلى هدف الأداء سيكونون قارين على إجابة أسئلة تشابه الأسئلة الآتية:

- 1- عين كل من العلاقات الآتية هل هي علاقات: انعكاسية، أو تماثلية، أو انتقالية، أو تكافؤية:
 - أ- (هي مكملة لـ $is\ supplementary\ to$) بالنسبة للزوايا.
 - ب- (هو مطابق لـ $is\ congruent\ to$) بالنسبة لقطع المستقيم.
 - ج- (هي مجموعة جزئية لـ $is\ subset\ of$) بالنسبة للمجموعات.
 - د- (هي مجموعة جزئية حقيقية لـ $is\ a\ proper\ subset$) بالنسبة للمجموعات.
 - هـ- (هي مكافئة لـ $is\ equivalent\ to$) بالنسبة للقضايا.
 - و- (هو أكثر غنى من $is\ wealthier\ than$) بالنسبة للشعوب.
- ز- (هو أصغر من $is\ smaller\ than$) بالنسبة للأشياء.
- ح- (هو أبرد من $is\ colder\ than$) بالنسبة للأماكن.

- 2- برهن جبريا بأن العلاقة (هو مقيم لـ) هي تماثلية بالنسبة للزوايا الحادّة ولكنها ليست انعكاسية أو انتقالية.
- 3- أي من العلاقات الآتية انعكاسية وانتقالية، ولكنها ليست تماثلية ؟
 - أ- (هو أس صحيح موجب لـ $is\ a\ positive\ integral$)
 - ب- (له نفس المساحة مثل $has\ the\ same\ area\ as$) بالنسبة للمثلثات.
 - ج- (هي نقیض لـ $is\ the\ converse\ of$) بالنسبة للقضايا.
 - د- (هو أكثر شبابا من $is\ younger\ than$) بالنسبة للناس.

خاصية الانعكاسية: $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow b \equiv a \pmod{m}$ ، وبما أن $b - a = -(a - b) = -km$ (تبرهن خاصية التماثل)، $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow a \equiv c \pmod{m} \rightarrow b \equiv c \pmod{m}$ وأن $a - c = (a - b) + (b - c) = pm + km = m(p + k)$ (تبرهن خاصية الانتقال).

إن الطلبة الذين يمتلكون معرفة كافية بالمنطق الرمزي يمكن أن يدعون إلى تأمل العلاقة (يقضي ضمنا $Implies$) بالنسبة للقضايا (مثال كما يرمز لها بالرموز r, q, p).

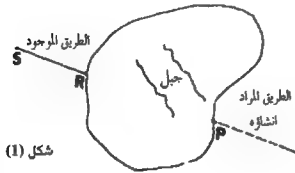
إن الطالب اليقظ سوف يدرك بأن هذه العلاقة هي علاقة انعكاسية، $p \rightarrow p$ (نظرا لأن أي قضية تقتضي ضمنا ذاتها) وكذلك انتقالية، $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ (نظرا لأن هذا الأمر يمكن البرهنة على كونه تكرارا للمعنى باستخدام جداول الصدق). لكنها ليست تماثلية. لأن $(q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ ليست صادقة: (نظرا لأن صدق القضية لا يضمن صدق معكوسها). والآن حاول أن توسع مساحة مفهوم العلاقات من الإعدادات الرياضية الصارمة لكي يتضمن العلاقات الموجودة بين الأشخاص والأماكن، والأشياء. وسيجد طلبتك بأن هذا الأمر يعد موردا للثقافة والتسلية. اقترح علاقة مثل (هو أب لـ $is\ father\ of$)، إن انعكاسا بسيطا يوضح بأن هذه العلاقة ليست انعكاسية، وليست تماثلية، كما أنها ليست انتقالية ! يبدو واضحا بأن a لا يمكن أن تكون والدًا لذاتها (ليست انعكاسية)، وأنه إذا كان a أب لـ b ، بعدئذ يكون b ابنا أو بنتا وليس أبًا لـ a (ليست تماثلية)، وأنه إذا كان a أبًا لـ b ، وأن b هو أب لـ c ، بعدئذ فإن a هو جد c وليس أبًا له (ليست انتقالية) !

إن علاقات كثيرة معادلة يمكن دراستها عن كتب، وضمنها (هي أم لـ $is\ mother\ of$)، وهو أخ لـ $is\ brother\ of$. (تحذير: علاقة انتقالية وليست تماثلية، نظرا لأن b قد تكون أختًا لـ a)، (هي أخت لـ $is\ sister\ of$)، (هو قريب لـ $is\ sibling\ of$) (إن هذه العلاقة هي تماثلية)، (هو قريب لـ $is\ spouse\ of$) (هو سلف لـ $is\ ancestor\ of$)، (هو متحدر من $is\ the\ descendant\ of$)، (هو أكثر طولًا من $is\ taller\ than$)، وكذلك (يزن أكثر من $Weigh\ more\ than$). إن أيًا من هذه العلاقات يمكن استكشافها في الجس السالب Negative sense وكذلك بالحس الموجب. بالنسبة للأماكن، يستطيع الطلبة تأمل علاقات مثل: (هو شمال لـ $is\ north\ of$)، (هو غرب لـ $is\ west\ of$). (تحذير: إن الانتقالية ليس من الضروري صدقها إذا اختيرت الأماكن من أي مكان في العالم بدلا من منطقة

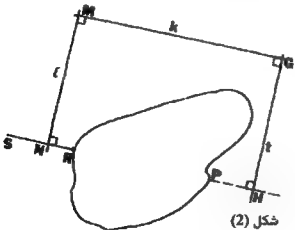
تجاوز منطقة يتعذر بلوغها

Bypassing an Inaccessible Region

حالاً فهم الطلبة المسألة، دعمهم يقومون برسم مخطط (خرائط) لهذه الحالة.



ينبغي أن ينشأ الطلبة على امتداد واحد امتداداً لقطعة المستقيم \overline{SR} عند النقطة P (باستخدام منطقة عدلة وفرجار) دون أن يلمسوا، أو يمرّون خلال المنطقة التي يتعذر بلوغها. هناك عدة طرق لإنشاء التماسات الممتد بقطعة المستقيم \overline{SR} عند النقطة P . إن إحدى هذه الطرق تكمن في إقامة مستقيم عمودي (المستقيم ℓ) إلى \overline{SR} عند نقطة مناسبة N على قطعة المستقيم \overline{SR} . وبعدئذٍ وعند نقطة ملائمة M من المستقيم ℓ يقام عمود (المستقيم k) على المستقيم ℓ (أنظر شكل 2).



سوف تعرض هذه الوحدة مسألة إنشاء خط مستقيم خلال منطقة يتعذر بلوغها باستخدام مسطرة عدلة وفرجار، وبدون استخدام أدوات في / أو فوق هذه المنطقة التي يتعذر بلوغها. إن هذا النشاط سيوفر فرصة مناسبة للطلبة لإظهار الموهبة والقدرة على الإبداع.

أهداف الأداء Performance Objective

1- لديك قطعة خط مستقيم مع نقطة نهاية على حدود المنطقة التي يتعذر بلوغها، وسيقوم الطلبة، مستخدمين المسطرة العدلة والفرجار بإنشاء قطعة مستقيم أخرى على خط مستقيم واحد Collinear مع المستقيم المعطى، وفي الجهة المقابلة من المنطقة التي يتعذر بلوغها (إن نقطة النهاية سوف تقع على حدود هذه المنطقة).

2- لديك نقطة ما على إحدى جهات المنطقة التي يتعذر بلوغها، وسيقوم الطلبة باستخدام مسطرة عدلة وفرجار لإنشاء قطعتي مستقيم على استقامة واحدة، تمتلك كل منها نقطة بوصفها نقطة نهاية ولا يقطع أي منها المنطقة متعذرة البلوغ.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالإنشاءات الهندسية الأولية باستخدام مسطرة عدلة وفرجار.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لأحداث اهتمام ابتدائي بالموضوع، ابدأ هذا الموضوع بإصطناع قصة حول بلدين يفصل بينهما جبل من الجبال، وأن كلا منهما يرغب بإنشاء طريق مستقيم ونفق Tunnel خلال هذا الجبل. ونظراً لأن كلا من هذين البلدين لا يستطيع اتخاذ قرار بصد أسلوب حفر النفق، فإنهما قد اتفقا سوية على إنشاء طريق على أحد جوانب الجبل عند النقطة المتوقعة للنفق (استمرار الطريق المستقيم على الجانب الآخر من الجبل) والتي سينشأ عنها خلال الجبل.

باستخدام مسطرة عدلة وفرجار، فقط، سيحاول الطلبة رسم مسار الطريق الجديد.

37

الزاوية التي يتعذر بلوغها

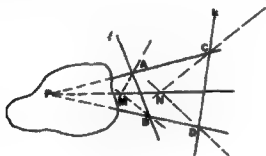
The Inaccessible Angle

مركز التميز في الرياضيات
مركز التميز في الرياضيات
مركز التميز في الرياضيات

في البداية، ستكون محاولات معظم الطلبة، على الأرجح، غير صحيحة. ولكن الاعتناء باستجابات الطلبة، وأخذها بعين الاعتبار سيسهم بدور دلييل مرشد إلى الحل الصحيح. سوف يعرض الطلبة في بعض الأحيان بعض الحلول الغريبة (والخلاقة). لذا ينبغي أن تمتنع جميع هذه الحلول اهتماما كافيا. إن الإظهار الأفضل للمورد الأساسي لطبيعة الإبداع الذي توفره هذه المسألة سيتضمن عرض ثلاثة حلول متباينة.

الحل I Solution

ارسم أي مستقيم l يقطع شعاعي الزاوية التي يتعذر بلوغها في النقطتين A و B. ضع الرمز P لرأس الزاوية الذي يتعذر بلوغه.



شكل (2)

أنشئ منصف الزاوية $\angle PAB$ ، $\angle PBA$ ، واللذان يتقاطعان فيما بعد عند النقطة M. ذكر الطلبة بأنه لا كانت منصفات زوايا المثلث (هنا $\triangle APB$) تتلاقى في نقطة واحدة، فإن منصف الزاوية $\angle P$ ، والذي نحاول إنشاؤه، ينبغي أن يحتوي على النقطة M. وبنفس الطريقة، ارسم أي مستقيم k ، يقطع شعاعي الزاوية التي يتعذر بلوغها في النقطتين D, C. أنشئ منصف الزاويتين $\angle PCD$ و $\angle PDC$ واللذان يتقاطعان عند النقطة N. مرة ثانية، يجب أن يدرك الطلبة بأنه لا كانت منصفات زوايا المثلث (في هذه الحالة المثلث $\triangle CPD$) تتلاقى في نقطة واحدة، فإن منصف الزاوية $\angle P$ ينبغي أن يحتوي على

ستوفر هذه الوحدة، من خلال تطبيق ترفيهي، فرصة مناسبة للطلبة لاستخدام جملة من العلاقات الهندسية التي تلقوها في أساليب جديدة. كذلك ستفتح الباب أمام حشد كبير من الأنشطة الإبداعية.

هدف الأداء Performance Objective

لديك زاوية يقع رأسها في منطقة يتعذر بلوغها (يشار إليها فيما بعد كزاوية يتعذر بلوغها) سيقوم الطلبة بإنشاء منصف زاويتها باستخدام مسطرة عدلة وفرجار.

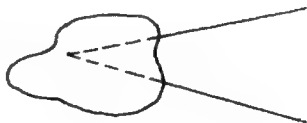
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالإنشاءات الهندسية الأساسية وباستخدام مسطرة عدلة وفرجار. وتأكد بأن الطلبة قادرين على تصنيف زاوية محددة، بصورة صحيحة، مستخدمين مسطرة عدلة وفرجار.

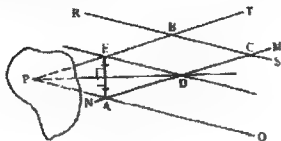
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد أن يكمل الطلبة استعراض الإنشاءات الهندسية الأولية أعرض لهم الموقف الآتي:

مسألة Problem: لديك زاوية برأس يتعذر بلوغه (يعني، أخبر الطلبة بأن رأس الزاوية يقع في منطقة، وعبر منطقة لا يمكن استخدام مسطرة عدلة وفرجار معها)، أنشئ منصف الزاوية باستخدام مسطرة عدلة وفرجار فقط.



شكل (1)



شکل (4)

بعدها أنشئ المستقيم $(\overleftrightarrow{RS})$ موازيا للشعاع الآخر (PQ) إلى الزاوية التي يتعذر بلوغها وقطع \overleftrightarrow{PT} وكذلك \overleftrightarrow{MN} عند النقطتين B، C على التوالي. باستخدام زوج من الفرجارات، أعمد إلى تأثير قطعة المستقيم \overleftrightarrow{AD} على \overleftrightarrow{AC} بنفس طول \overleftrightarrow{BC} . خلال النقطة D، أنشئ $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$. حيث تقع E على \overleftrightarrow{PT} . والآن يمكن بسهولة إظهار بأن $ED=AD$. (لأن EBCD متوازي أضلاع وأن $ED=BC$) وبما أن PEDA هو متوازي أضلاع، كل ضلعين متجاورين فيه متطابقين ($ED \equiv AD$)، فإن الشكل هو معين. وعليه، فإن القطر \overleftrightarrow{PD} هو منصف الزاوية التي يتعذر بلوغها. ويمكن إنشاء \overleftrightarrow{PD} ببساطة عن طريق توصيف الزاوية $\angle EDA$ أو إقامة العمود النصف لـ \overleftrightarrow{EA} .

بعد عرض هذه الحلول على طلبتك، ينبغي أن تأتي بعدها الحلول التي اخترعها الطلبة مباشرة. كما ينبغي أن يشجع التفكير لتحفيز قدرات إبداعية أكبر.

Postassessment التقييم اللاحق

اعرض للطلبة الزاوية التي يتعذر بلوغها واطلب منهم العمل على تنسيقها.

النقطة N . وعليه لقد تمت البرهنة بأن المستقيم المطلوب يحتوي على النقطتين M : N ، وعليه برسم \overleftrightarrow{MN} يكون الإنشاء قد اكتمل..

Solution II. الحل

أبدأ هذه الطريقة بإنشاء مستقيم مواز لأحد شعاعي الزاوية
التي يتعذر بلوغها. أنظر شكل 3. ويمكن أن ينفذ هذا بأي طريقة
من مجموعة الطرق المتاحة.

في شكل 3. \overleftrightarrow{RS} يوازي \overleftrightarrow{PT} (شعاع الزاوية التي يتعذر بلوغها $\angle P$). ويقطع \overleftrightarrow{PQ} عند النقطة A. أنشئ منصف زاوية $\angle SAQ$ والذي سيقطع \overleftrightarrow{PT} عند النقطة B. بما أن $\overleftrightarrow{SR} \parallel \overleftrightarrow{PT}$ ، $\angle PAB \equiv \angle CAQ \equiv \angle PBA \equiv \angle SAC$. ولكن $\angle PAB \equiv \angle PBA$ وعليه $\angle SAC$. وبذلك يصبح المثلث PAB متساوي الساقين.

ونظرا لكون منتصف الزاوية العمودي على قاعدة المثلث متساوي الساقين \overline{AB} ينصف أيضا زاوية الرأس، فإن العمود النصف لقطعة المستقيم \overline{AB} هو منتصف الزاوية المطلوب للزاوية التي يتخذ بلوغها $(\angle P)$.

Solution III الحل

ابداً بإنشاء المستقيم $(\overleftrightarrow{MN})$ موازياً لأحد شعاعي الزاوية (PT) التي يتعذر بلوغها $(\angle P)$ ، ويقطع الشعاع الثاني في النقطة A . أنظر شكل 4.

38

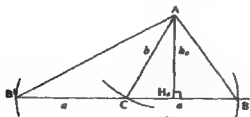
إنشاءات مثلث

Triangle Constructions

لا ريب، بأنه لو توفرت لدى الطلبة قياسات الزوايا الثلاثة في مثلث، فإن كل طالب سيقوم بإنشاء مثلث بمساحة تختلف عن مساحة المثلث الذي أنشأوه بقية زملائه (رغم أن جميع هذه المثلثات تمتلك نفس الشكل). والآن، إذا زود الطلبة بأطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث فإنهم سيقومون جميعاً بإنشاء مثلثات متطابقة فيما بينها. عند هذه النقطة ينبغي أن يدرك الطلبة بأن بيانات معلومة سوف تحدد مثلثاً "مفرداً" بينما لا تنجح معلومات أخرى في تحقيق ذلك.

من أجل هذا فإن الطالب سيكون محدداً في تحري مثل هذه الحالات حيث تتوفر قياسات الأضلاع والزوايا فقط. وقد يرغب أخذ بعض أجزاء المثلثات بعين الاعتبار، كذلك اعرض المسألة الآتية:

قم بإنشاء مثلث إذا كان لديك طول ضلعين من أضلاعه، ومقدار الارتفاع بالنسبة لأحد هذين الضلعين. يجب أن ندون هذه المسألة مثل $[a, b, h_a]$ ، حيث يمثل h_a طول الارتفاع إلى الضلع a .



شكل (2)

لإتجاز هذا الإنشاء، خذ النقطة H_a على أي مستقيم وأقم العمود $H_a A$ (باستخدام طريقة المسطرة العدلة والفرجار التقليدية) وبطول مقداره h_a . بواسطة القوس (A, b) (ملاحظة: إن الرمز المزدوج المرتب هو طريق مختصر، فحسب، للإشارة إلى الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها b) اقطع مستقيم القاعدة في النقطة C ، ثم بالقوس (C, a) اقطع مستقيم القاعدة ذاتها في النقطتين B, B' . إن الحلين هما المثلث ABC ، والمثلث $AB'C$ ، والذي يحوي كل منهما على البيانات $[a, b, h_a]$. إن الفحص الإضافي

غالباً ما يعمد المعلمون إلى تهيئ مسلمات التطابق Congruence Postulates بالفجاء إلى عرض أن المثلثات المفردة يمكن إنشائها من بيانات محددة مثل أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث، أو ربما طول ضلعين من أضلاعه وقياس الزاوية المتضمنة. إن هذه الوحدة ستوسع من دائرة المناقشة الأولية لإنشاءات المثلث بحيث تشمل مسائل تثير المزيد من الاهتمام.

هدف الأداء Performance Objective

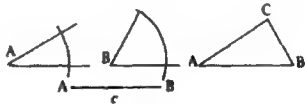
لديك قياسات الأجزاء الثلاثة من المثلث (والتي تحدد المثلث)، وسيقوم الطلبة بتحليل، وإنشاء المثلث المطلوب باستخدام مسطرة عدلة وفرجار.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالإنشاءات الهندسية الأولية، والتي غالباً ما تدرس في مساق الهندسة بالمدارس الثانوية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

للبد، بتحسين اطلاع الطلبة على هذا الموضوع، أجعلهم يباشرون إنشاء مثلث، حيث تتوفر قياسات زاويتين من زواياه والضلع المعطى.



شكل (1)

سيقوم الطلبة برسم مستقيم، وتأشير طول قطعة المستقيم \overline{AB} (يشار إليه في بعض الأحيان بالرمز c ، وهو طول الضلع المقابل للزاوية $\angle C$) بإنشاء الزاويتين A, B عند أي نهاية من المستقيم AB ، سوف يجدون في آخر الأمر بأنهم قد أنشأوا مثلثاً مفرداً $\triangle ABC$.

(179!) بالإضافة إلى تشكيلة من موضوعات مثيرة عن إنشاءات هندسية، (مثال، استعراض للإثباتات الأولية، ومجموعة من التطبيقات، وإنشاءات الدائرة، ... الخ) يتوفر لدى:

Dale Seymour / Cuisenaire
10 Bank Street
White Plains, NY 10602

وهو بعنوان:

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry:
Excursions for Secondary Teachers and
Students, Emeryville, CA: Key College
Publishing, 2002.

التقييم اللاحق Postassessment

ليتم الطلبة بإنشاء المثلثات الآتية:

- 1- $\{a, b, m_a\}$
- 2- $\{a, h_a, t_a\}$
- 3- $\{a, h_a, h_c\}$
- 4- $\{h_a, m_a, t_a\}$
- 5- $\{h_a, h_b, h_c\}$

ملاحظة: t_a هو طول منصف الزاوية A.

ارسم المستقيم (AD) موازيا للمستقيم CB وقاطعا CH_b في النقطة A. بما أن الشكل ADBC هو متوازي أضلاع، فإن CD ينصف AB عند النقطة M_c وأن $M_c = \frac{1}{2}CD = m_c$. وعليه فإن المسألة قد تم تحليلها بأسلوب معاكس، وبعدئذ تم إنشاء المثلث المطلوب.

عندما تأخذ بعين الاعتبار قياسات أجزاء أخرى من المثلث مثل منصفات الزوايا، ونصف قطر الدائرة الماسة، ونصف قطر الدائرة المحوطة، ونصف محيط الشكل Semi-perimeter (بالإضافة إلى قياسات الأجزاء التي عولجت ميكرا في هذا النموذج) بعدها ستظهر أمامنا احتمالات 179 إنشاء ممكن لسائل المثلث، حيث تتألف كل منها من قياسات هذه الأجزاء الثلاثة من المثلث. قد يكون بعضها بسيطا إلى حد كبير (مثال، $\{a, b, c\}$) وهناك بعض آخر أكثر صعوبة وتعقيدا (مثال، $\{h_a, h_b, h_c\}$).

تسهم مسائل الإنشاء من هذا النوع بدور منصة الوثوب إلى دراسة أكثر تعمقا بهذا الموضوع، بالإضافة إلى مسائل إنشاءات هندسية أخرى. إن كتابا قد نشر حديثا، ويحتوي على مزيد من مفردات هذا الموضوع (تتضمن قائمة متكاملة لإنشاءات المثلث الـ

معييار الإنشاء

The Criterion of Constructibility

تسهم هذه الوحدة في تطوير معيار إنشاء للأدوات الأقليدية التقليدية Euclidean Tools، وهي المسطرة العدلة والفرجار.

أهداف الأداء Performance Objective

- 1- سيبين الطلبة معيار الإنشاء.
- 2- سيرعرض الطلبة صياغات جبرية بأسلوب هندسي (بدلالة أطوال محددة).

التقييم السابق Preassessment

اطلب من الطلبة أن يمثلوا هندسياً $AB+CD$ و $AB-CD$ ، حيث أن AB و CD معطيان.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ينبغي أن يكون معظم الطلبة قادرين على أداء المسألة أعلاه بنجاح. والآن افترض $AB=a$ وأن $CD=b$.

A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{b} D

إن الاهتمام المنطقي الثاني سينصب على عرض حاصل ضرب قطعتي خط مستقيم. في هذه الحالة لا بد من استخدام قطعة مستقيم بوحدة طول واحدة. ولإنشاء ab ، ينبغي الأخذ بعين الاعتبار الحالتين الآتية: (I) عندما يكون $a < 1$ و $1 < b$ ، وكذلك (II) عندما يكون $a > 1$ و $b > 1$.

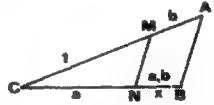
لغاية الآن فإن جميع قطع المستقيم التي أخذت بعين الاعتبار كانت تمتلك طولاً موجياً Positive Length. والآن سيصبح الطلبة، شغوفين بالاطلاع حول إمكانية استخدام قطع مستقيم بقيم سالبة لوصف حاصل الضرب وخارج القسمة. لغرض تأمل قطع المستقيم ذات الأطوال السالبة، ينبغي أن تعرض محاور الأعداد، والأفقية والمائلة Oblique. لإيجاد ab ، ثبت A على المحور الأفقي بحيث $a=OA$ ، وحدد موقع B على المحور المائل بحيث $b=OB$. ارسم مستقيماً خلال A إلى 1 على المحور المنحرف ونقطة A . من خلال B ارسم مستقيماً موازياً للمستقيم الأول، ويقطع المحور الأفقي في النقطة C وعليه $ab=OC$.

في الحالة الأولى (I)، سيقوم الطلبة بإنشاء الشكل الآتي. لاحظ بأن $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ وأن الزاوية $\angle C$ هي، أي زاوية مناسبة.



بما أن $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ ، وأن $a/x=b/1$ ، وعليه فإن $ab=x$ هي قطعة المستقيم بالطول المطلوب (يعني a, b). ينبغي أن يلاحظ بأن $a < ab$ وكذلك $b < ab$ والذي يمكن توقعه إذا كانت $a > 1$ و $b > 1$.

في الحالة الثانية (II)، سوف يستمر الطلبة بنفس الطريقة كما في الحالة (I)، ولكن بما أن $a < 1$ و $b < 1$ ، ينبغي أن يكون واضحاً بأنه بناء على المفاهيم الهندسية فإن $a > ab$ وكذلك $b > ab$.



والآن يمكن أن نتحدى الطلبة باكتشاف أنماط مشابهة لإنشاء قطعة مستقيم والذي يمثل خارج قسمة قطعتي المستقيم المحددين. وللمرة الثانية سيكون أمامنا حالتين بحاجة لكي نأخذهما بعين الاعتبار:

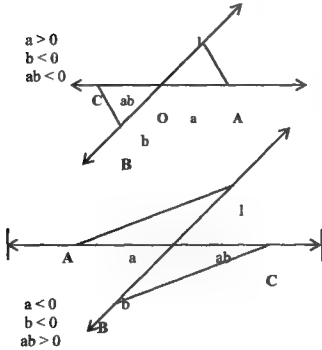
الحالة (I) $a < b < 1$. للمرة الثانية دع الطلبة يقومون برسم الشكل السابق، حيث $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ في هذه الحالة إما أن يكون $a < a/b < b$ أو $a < a/b < 1$. ينبغي أن نحث الطلبة على التأكد من ذلك.

الحالة (II) $b < a \leq 1$. استمر بنفس الأسلوب أعلاه لإنشاء الشكل الآتي:



$$b > a < \frac{a}{b}$$

سلاحظ الطلبة بأن كل من a ، b قد تم تأشيرهما على محورين مختلفين، وأن حاصل ضرب كل حالة ab ، كان أقل من، أو، أكبر من صفر على نحو مناسب. وكما هو الحال سابقاً، ينبغي أن نجد حاصل القسمة باعتبار القسمة عملية معكوسة لعملية الضرب. ولإيجاد a/b سنقوم بإيجاد x بحيث $bx = a$ ، وكذلك $b > 0$ ، بعدد $a/b > 0$.



بالمقابل، إذا كان الإنشاء ممكناً، يمكننا الحصول عليها بعدد محدود من تطبيقات: الإضافة، والطرح، والمضاعفة، والقسمة، واستخراج الجذر التربيعي، باستخدام معطيات قطع المستقيمتين ووحدة طول اختيارية.

ونحن على علم بأن المستقيمتين والدوائر التي قمنا بإنشائها يمكن تحديدها إما بالمقاطع المعلومة، أو تلك التي حصلنا عليها من تقاطعات خطين مستقيمتين، أو خط مستقيم ودائرة، أو دائرتين. ولعرض التقيض أعلاه، ينبغي أن نبين بأن هذه التقاطعات يمكن الحصول عليها من معاملات المعادلات. وبعدد محدود من تطبيقات عمليات الجمع، الطرح، الضرب، القسمة، واستخراج الجذر التربيعي.

هنا خطان مستقيمان:

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ y &= m'x + b' \end{aligned} \quad m \neq m'$$

يتقاطعان في النقطة (x,y) وفيهما:

$$x = (b-b')/m-m' \quad y = (mb' - m'b)/(m-m')$$

إن هذه العلاقات قد تم الحصول عليها من المعادلات بتطبيق العمليات أعلاه. إن معادلة دائرة نصف قطرها r ومركزها (c,d) هي $(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$. ولإيجاد نقطة تقاطع الدائرة مع المستقيم $y=mx+b$ نستطيع التعويض بالنسبة لـ y في معادلة الدائرة.

$$(x-c)^2 + (mx+b-d)^2 = r^2$$

ينشأ عن هذا معادلة تربيعية بالنسبة للمتغير x. وبما أن حل المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

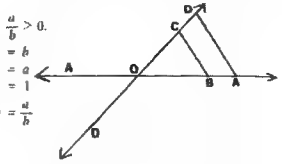
ونحن على علم بأن المعادلة التربيعية

$$(x-c)^2 + (mx+b-d)^2 = r^2$$

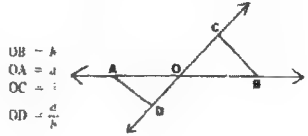
لديها جذر يمكننا الحصول عليه من الثوابت المعروفة باستخدام العمليات الخمس المذكورة آنفاً.

إن تقاطع الدائرتين يشابه إلى حد كبير تقاطع دائرة مع وتر مشترك. وعليه، يمكن لهذه الحالة أن تختصر لإيجاد تقاطع دائرة مع مستقيم.

مقياس الإنشاء Criterion of Constructibility إن إنشاء هندسياً مقترحاً سيكون ممكناً باستخدام مسطرة عدلة وفرجار فقط وإذا كانت فقط في حالة كون الأعداد التي نعرف، جبرياً، العناصر الهندسية المطلوبة يمكن أن تشتق من تلك التي نعرف العناصر المعلومة بعدد محدود من العمليات العقلية، واستخراجات الجذر التربيعي.

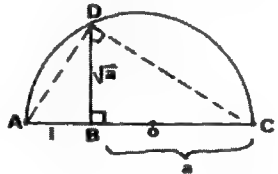


وبالمثل. عندما $a < 0$ و $b > 0$ ينتج أن $\frac{a}{b} < 0$



ليتأمل الطلبة موضوع القسمة على صفر يعني أين هي B إذا كانت $b=0$ ؟ وماذا سيحصل لـ OD؟

إن العملية الوحيدة المتبقية، والتي ستظهر الحاجة عندها للوصف الهندسي هي أصل الجذر التربيعي. وهنا سيبدأ الطلبة إنشاء نصف دائرة على $a+1$ (حيث تنشأ قيمة \sqrt{a}). بعدئذ وعند نقطة النهاية المشتركة، B، للمقطع 1 وكذلك a، أقم عموداً لقطع نصف الدائرة في النقطة D. وعليه $BD = \sqrt{a}$. ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على تطبيق نظريات متوسط التناسب Mean Proportional للبرهنة على هذا.



إن حل مسألة الإنشاء يمكن وصفه كجذر لمعادلة. على سبيل المثال، تأمل مسألة مضاعفة مركب. ينبغي أن نجد حافة المكعب الذي يكون حجمه ضعف حجم المكعب المعلوم. أي، ينبغي أن نجد x، عندما $x^3 = 2$. إذا استطعنا الحصول على الحل بواسطة عدد محدود من تطبيقات العمليات +، -، ×، ÷، وكذلك $\sqrt{\quad}$. باستخدام معطيات قطع المستقيمتين ووحدة طول Unit Length. بعدئذ سيكون الإنشاء ممكناً.

مرجع Reference

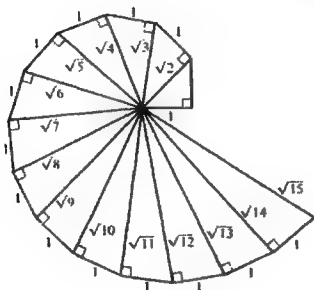
Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teacher and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

التقييم اللاحق Postassessment

- 1- أعد صياغة وألق مزيداً من الضوء على معيار الإنشاء.
- 2- إذا كان لديك الأطوال 1, a, b أنشئ قطعة مستقيم بطول $\sqrt{ab/a+b}$.

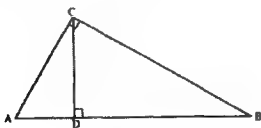
إنشاء أطوال جذرية

Constructing Radical Lengths



شكل (1)

من المتوقع أن يطرح الطالب سؤالاً عن إمكانية وجود طريقة أكثر ملائمة لإنشاء $\sqrt{15}$ بدلاً من توليد حلزون جذري لغاية $\sqrt{15}$. أرشد الطلبة إلى استذكار إحدى نظريات الوسط المتناسب. ويظهر في الشكل أدناه بأن CD هو الوسط المتناسب بين AD و BD.



شكل (2)

يكثر الطلبة من السؤال حول كيفية إنشاء خط مستقيم بطول $\sqrt{2}$. إن هذا النشاط سوف يصوب محتواه باتجاه هذا السؤال بالإضافة إلى إيجاد أطوال قطع جذرية أخرى.

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بإنشاء قطعة بطول جذري محدد، بعد تحديد وحدة طول لها.

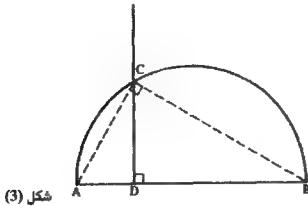
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على تطبيق نظرية فيثاغورث، وعلى معرفة كافية بالإنشاءات الهندسية الأساسية باستخدام المسطرة العدلة والفرجار.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

أطلب من التلاميذ إنشاء مثلث على أن يكون طول أحد أضلاعه $\sqrt{2}$ (تأكد من إخبارهم حول ضرورة اختيار وحدة طول مناسبة). وفي جميع الاحتمالات سيعمد الطلبة إلى رسم مثلث متساوي الساقين، قائم الزاوية طول ساقيه 1. وسيجدون بواسطة نظرية فيثاغورث بأن طول الوتر هو $\sqrt{2}$.

والآن دعهم يباشرون إنشاء مثلث قائم الزاوية باستخدام هذا الوتر ويساق آخر طوله وحدة واحدة. إن المثلث القائم الزاوية الذي أنشئ حديثاً سيكون لديه وتر طوله $\sqrt{3}$. سوف يكتشف الطلبة، بسهولة، الحقيقة التي تستخدم نظرية فيثاغورث بإعادة هذه العملية، وسينجح الطلبة في توليد، جذور لأعداد صحيحة، يعني، $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{5}$ ، ... على التوالي. وهو الشكل الذين يكثر من تسميته باسم الحلزون الجذري (Radical Spiral). والذي يعرض الحالات المذكورة.



شكل (3)

هناك حاجة ملموسة للخطوط المقطعة لتبرير الإنشاءات.

التقييم اللاحق Postassessment

- 1- أنشئ حلزون جذري لغاية $\sqrt{18}$.
- 2- أنشئ قطعة بطول $\sqrt{18}$ باستخدام وحدة طول معلومة. لا تنشئ حلزونا جذريا في هذه الحالة.

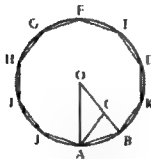
أي $(CD)^2 = (AD)(BD)$ أو $CD/BD = AD/CD$ والتي تتضمن بأن $CD = \sqrt{(AD)(BD)}$.

إن هذه العلاقة ستساعد الطلبة على إنشاء قطعة مستقيم بطول $\sqrt{15}$ في أحد الإنشاءات. وسيكون مجموع ما سيحتاجونه هو إنشاء الشكل أعلاه وافترض $AD = 1$ وأن $BD = 15$ وبعدئذ $CD = \sqrt{(1)(15)} = \sqrt{15}$. وسيكون ما عليهم فعله هو رسم قطعة بطول 16 وتقسيمها إلى قطعتين بأطوال 1، 15. ودعهم يقيموا عند نقطة التقسيم عمودا على هذه القطعة. إن نقطة تقاطع العمود مع نصف الدائرة التي تحوي قطعة بطول 16 بوصفها قطرا لها، سوف تحدد نقطة النهاية بالنسبة للقطعة العمودية التي يبلغ طولها $\sqrt{15}$. أنظر الشكل الآتي:

إنشاء خميس

41

Constructing a Pentagon



شكل (1)

من نقطة المركز O، ارسم المستقيمين OA، OB لتكوين المثلث متساوي الساقين AOB. ينبغي أن يلاحظ الطلبة، وبسهولة، بأن قياس $\angle AOB = 360^\circ$ (يعني، $360/10 = 36$). وعليه فإن قياس $\angle OBA = \angle OAB = 72^\circ$. اعزل المثلث AOB للوضوح (شكل 2).

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بإنشاء خميس منتظم في ضوء المعلومات المتوفرة عن طول نصف قطر الدائرة المحوطة.

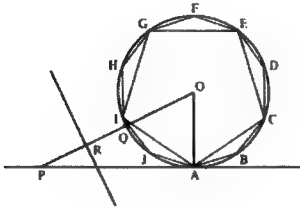
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بخصائص الخمس المنتظم.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ الدرس بجعل الطلبة يتأملون الشكل معشر الزوايا Decagon الذي نصف قطره 1 شكل (1).

$$QR = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = x \text{ سوف يزودنا}$$

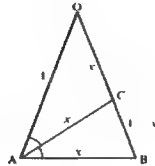


شكل (3)

ينبغي أن يؤثر الطلبة، الآن، المقاطع المتتالية لـ x على دائرة الوحدة الأصلية. وعندما يتم إكمال ذلك بصورة صحيحة. فإن قيمة x سوف تعطينا 10 أقواس على الدائرة بالضبط وبعد أن يكمل الطلبة إنشاء الشكل معشر الأصلاع، سوف يدركون بوضوح بأن ربط الرؤوس المتبادلة للشكل المعشر، سيثمر عن حصولنا على الخمس المطلوب.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بإنشاء مخمس منتظم في ضوئ وحدة طول محدودة.



شكل (2)

ارسم منصف الزاوية \overline{AC} . وعليه فإن قياس الزاوية $m\angle OAC = 36^\circ$ ، مما يجعل المثلث OAC متساوي الساقين. وينفس الطريقة، يكون المثلث CAB متساوي الساقين. يضاف إلى ذلك $\triangle AOB \sim \triangle BAC$. وإذا افترضنا أن $OC = x$ ، بعدئذ $CB = 1-x$ وكذلك $CB = x = AB$ ومن التماثل سيحصل الطلبة على النسبة $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ والذي سيوصلنا إلى المعادلة $x^2 - x + 1 = 0$.

تتملك هذه المعادلة جذرين، أحدهما أهمية هندسية:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

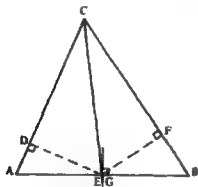
والآن ادع الطلبة إلى تأمل إنشاء القيمة الحالية لـ x . في أي نقطة A على المستقيم، أقم عموداً بطول $OA = 1$ ، وأنشئ دائرة الوحدة (يعني دائرة طول نصف قطرها 1) تَمَسُّ المستقيم في النقطة A . أقم على المستقيم $AP = 2$ ، ثم ارسم \overline{OP} . باستخدام نظرية فيثاغورث، ينبغي أن يحدد الطلبة بأن $OP = \sqrt{5}$ وكذلك $OP - OQ = \sqrt{5} - 1$ أخيراً فإن العمود المنصف من PQ

تجري مغالطة المثلث متساوي الساقين

Investigating the Isosceles Triangle Fallacy

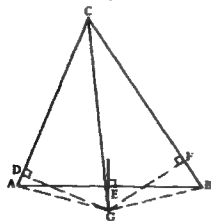
42

شكل 2، حيث يلتقي كل من \overline{GC} و \overline{GE} على AB ،



شكل (2)

شكل 3، حيث \overline{GC} و \overline{GE} يلتقيان خارج المثلث ولكن الأعمدة \overline{GD} ، \overline{GF} يقعان على \overline{AC} ، \overline{CD} ،



شكل (3)

شكل 4، حيث \overline{GC} و \overline{GE} يلتقيان خارج المثلث، ولكن الأعمدة \overline{GD} ، \overline{GF} يلتقيان \overline{CA} ، \overline{CG} خارج المثلث.

تقدم هذه الوحدة فرصة لاعتبار مغالطة المثلث متساوي الساقين بصورة شاملة. كما ويمكن أن تستخدم هذه المغالطة في ترسيخ مبدأ صفة الوسيطة (البينية) Betweenness.

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1- سيعمل الطلبة على عرض مغالطة المثلث متساوي الساقين.
- 2- سيعمد الطلبة إلى بيان (الخطأ) في مغالطة المثلث متساوي الساقين والبرهنة على حدسهم.

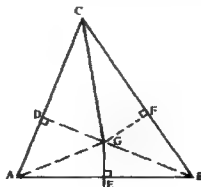
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالطرق المختلفة للبرهنة على تطابق المثلثات، بالإضافة إلى قياس الزاوية في دائرة.

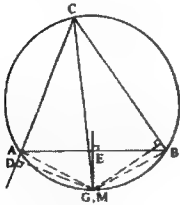
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ المناقشة بتحدي طلبتك لرسم مثلث مختلف الأضلاع Scalene على السبورة والذي ستقوم أنت بالبرهنة على كونه متساوي الساقين. ولتفرض البرهنة على أن المثلث المختلف الأضلاع $\triangle ABC$ هو متساوي الساقين، ارسم منتصف الزاوية $\angle C$ والمنتصف العمودي لـ \overline{AB} . من نقطة تقاطعهما، G ، أقم عموداً على \overline{AC} وكذلك \overline{CB} ، ولتقي بهما عند النقطتين D ، F على التوالي.

ينبغي أن يلاحظ الطلبة وجود أربعة إمكانات للوصف أعلاه وللمثلثات المختلفة بأنواعها المتنوعة: شكل (1) حيث \overline{GE} و \overline{CG} يلتقيان داخل المثلث:



شكل (1)



شكل (5)

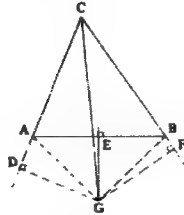
ينبغي أن نتابع بعض المناقشات حول إغفال إقليدس لمبدأ البيئية (صفة الوسيط). ولكن يمكن إجمال هذه المغالطة في البرهان الفعال للفقرتين (أ)، (ب) أعلاه، واللذان تظهران بوضوح خطأ هذه المغالطة.

ابداً باعتبار الدائرة المحوطة بالمثلث $\triangle ABC$.

ينبغي أن يحتوي منتصف زاوية $\angle ACB$ نقطة للمنتصف M ، للقوس AB (نظراً لأن الزاويتين $\angle ACM$ ، $\angle BCM$ هما زاويتان محاطتان ومتطابقتان). إن المستقيم المنصف العمودي على AB ينبغي أن ينصف القوس AB ، وعليه يجب أن يمر بالنقطة M . من أجل هذا فإن منتصف الزاوية $\angle ACB$ والمستقيم المنصف العمودي على AB سيتقاطعان "خارج" المثلث عند النقطة M (أو G). إن هذا الأمر سيلغي احتمالات الشكلين 1، 2.

والآن دع الطلبة يتأملون الشكل الرباعي المحاط بالدائرة $ACBG$. بما أن الزوايا للمقابلة للشكل الرباعي المحاط (أو الدائري) تكونان متكاملتين، سيكون قياس $m\angle CAG + m\angle CBG = 180^\circ$. وإذا كانت الزاويتان $\angle CAG$ ، $\angle CBG$ قائمتان، بعدد سيكون CG قطراً وسيكون المثلث $\triangle ABC$ متساوي الساقين.

وعليه نظراً لكون $\triangle ABC$ مثلث مختلف الأضلاع، فإن الزاويتين $\angle CAG$ و $\angle CBG$ ليستا قائمتين. في هذه الحالة ستكون إحداها حادة والثانية منفرجة. افترض أن الزاوية $\angle CBG$ حادة، وأن الزاوية $\angle CAG$ منفرجة، بعدد ينبغي أن يكون في المثلث $\triangle CGB$ الارتفاع على CB "داخلاً" المثلث، بينما في حالة المثلث "المنفرج" $\triangle CAG$ ، سيكون الارتفاع على AC "خارج" المثلث. (إن هذه القضايا غالباً ما يتقبلها الطلبة مباشرة ولكنها قابلة للبرهان بسهولة). وأن حقيقة كون عمود



شكل (4)

إن برهان المغالطة يمكن إنجازه بواسطة أي من الأشكال السابقة. ولتقم الطلبة بمتابعة البرهان على أي (أو جميع) هذه الأشكال.

المعطى: Given:

ABC مثلث مختلف الأضلاع.

برهن: Prove:

$AC=BC$ (أو أن المثلث $\triangle ABC$ متساوي الساقين).

البرهان: Proof:

بما أن $\angle ACG = \angle BCG$ وكذلك $\angle CDG = \angle CFG$ ، وعليه $\triangle ACD \cong \triangle BCF$ (SAA) وكذلك $CD=CF$ بما أن $AG=BG$ (إن النقطة على المنصف العمودي لمستقيم تبعد بنفس المسافة من تقاطعي نهاية قطعة المستقيم) وأن الزاويتين $\angle ADG$ ، $\angle BFG$ هما زاويتان قائمتان. $\triangle DAG \cong \triangle FBG$ (H.L) وعليه فإن $DA=FB$. بعدها سيكون $AC=BC$ (بالإضافة في الأشكال 1، 2، 3 والطرح في شكل 4). في هذه النقطة سيصاب الطلبة بقلق واضطراب ظاهر. وسوف يتساءل بعض الطلبة عن مورد الخطأ، والذي سمح لهذه المغالطة بالحصول.

سيكون بعض الطلبة على درجة كافية من النباهة والذكاء، بحيث يستطيعون الشروع في دراسة، وتمحيص الأشكال ثانية، وسيكون الإنشاء الصارم كافياً في إيجاد الخطأ الدقيق الذي يمكن في الأشكال:

أ- النقطة G "ينبغي" أن تكون خارج المثلث.

ب- عندما يلتقي العمودان أضلاع المثلث، فإن أحدهما سوف يلتقي ضلعا "بين" الرأسين، بينما لا يصح ذلك مع الثاني.

السابقين.

- 2- وضح (وبرهن) أين يكون (البرهان) في السؤال 1 مغلوفاً.
3- ناقش مبدأ صفة البيئية بدلالة أهميته في الهندسة.

مرجع Reference

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry:
Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بما يأتي:

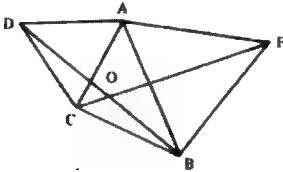
- 1- برهن بأن أي مثلث مختلف الأضلاع هو مثلث متساوي

نقطة متساوية الزوايا

43

Equiangular Point

برهن: $DB = CF$



شكل (1)

رغم أن هذه المسألة تستخدم أكثر المبادئ الأساسية (فقط) من منهج الهندسة في المدارس الثانوية، فسيجد الطلبة في المسألة تحدياً إلى حد ما. إن الأمر الذي يبدو للوهلة الأولى محيراً ومربكاً في هذه المسألة يكمن في اختبار زوج المثلثات المناسب للبرهنة على التطابق. وإذا لم يعثر الطلبة على إيجاد ذلك، يعد مرور بضعة دقائق، أخبرهم بأسماء المثلثات التي تستخدم قطعتي المستقيم DB ، CF كأضلاع. وسيدركون بسرعة بأن عليهم برهنة أن $\triangle CAF \cong \triangle DAB$. بعدها ستبرز مسألة "كيفية" البرهنة على تطابق هذين المثلثين. أرشد الطلبة إلى أن المثلثات المتداخلة $Overlapping Triangles$ غالباً ما

ستسهم هذه الوحدة في تطوير علاقات هندسية ممتعة من أشكال هندسية غير تقليدية. إن هذا الموضوع مناسب لأي طالب قد أتنق معظم مفردات منهج الهندسة الخاص بالمدارس الثانوية.

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1- سيقوم الطلبة بتعريف النقطة متساوية الزوايا في مثلث حاد الزاوية.
- 2- سيحدد الطلبة موقع النقطة متساوية الزوايا بمثلث حاد الزاوية.
- 3- سيقوم الطلبة ببيان ثلاثة خصائص (على الأقل) للشكل المستخدم في تحديد موقع النقطة متساوية الزوايا بمثلث حاد الزاوية.

التقييم السابق Preassessment

قبل محاولة عرض هذه الوحدة على صفوفك، استعرض مع الطلبة قياس الزاوية بدائرة، والخصائص الأولية للتطابق والتماثل.

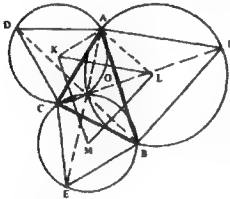
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ عرضك في تحدي الطلبة بالمسألة الآتية:

معطى: المثلث حاد الزاوية ABC .

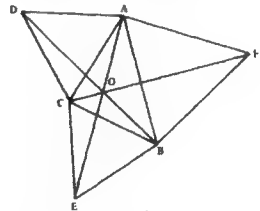
المثلثان ACD ، ABF متساويا الأضلاع.

تشتترك في عنصر مشترك. وتعد الزاوية $\angle CAB$ العنصر المشترك في هذه الحالة. بما أن المثلث $\triangle ACD$ والمثلث $\triangle ABF$ متساوية الأضلاع، فإن قياس $\angle DAC = 60^\circ$ ، $m\angle FAB = \angle FAC$ ، $m\angle DAB = 60^\circ$ (إضافة). بما أن المثلث $\triangle ACD$ متساوي الأضلاع، $AD=AC$ ، وكذلك بما أن المثلث $\triangle ABF$ متساوي الأضلاع، $AB=AF$ ، وعليه $\triangle ACF \cong \triangle ADB$ (S.A.S)، وعليه سيكون $DB=CF$.
 متى أدرك الطلبة بوضوح هذا البرهان، دعهم يتأملون مثلثاً ثالثاً متساوي الأضلاع $\triangle BCE$ ، مرسوم على الضلع \overline{BC} . اطلب منهم مقارنة طول \overline{AE} مع طول \overline{DB} وكذلك \overline{CF} .



شكل (3)

ليتم الطلبة، بوصل النقطة O مع النقاط A, B, C, D, E, F. قياس $m\angle DOA = m\angle AOF = m\angle FOB = 60^\circ$ ، وعليه يكون \overrightarrow{DOA} ، \overrightarrow{COF} ، \overrightarrow{AOE} ، \overrightarrow{DOB} وينفس الطريقة سيكون \overrightarrow{AOE} ، \overrightarrow{COF} ، \overrightarrow{DOB} وعليه فقد تمت البرهنة بأن \overline{AE} ، \overline{CF} ، \overline{DB} وكذلك تتلاقى في نقطة واحدة، وتتقاطع عند النقطة O (والتي هي أيضاً نقطة تقاطع الدوائر الثلاثة K, L, M).
 والآن اسأل الطلبة تحديد النقطة في المثلث $\triangle ABC$ التي تقابل عندها الأضلاع الثلاثة الزوايا المتطابقة. سيذكر الطلبة، بسرعة، بأنهم قد أكملوا قبل قليل البرهنة على أن $m\angle AOB = m\angle AOC = m\angle BOC = 120^\circ$ - التي يطلق عليها نقطة متساوية الزوايا في مثلث - التي تقابل عندها أضلاع المثلث $\triangle ABC$ الزوايا المتطابقة هي النقطة O.
 2- إن المراكز المحوطة M, L, K للمثلثات الثلاثة - متساوية الأضلاع $\triangle ACD$ ، $\triangle ABF$ ، $\triangle BCE$ على التوالي، تحدد مثلثاً آخر متساوي الأضلاع.
 البرهان Proof: قبل البدء بهذا البرهان، استعرض باختصار، مع الطلبة، العلاقة القائمة بين أضلاع المثلث بزوايا 30، 60، 90.
 ليتم طلبك باعتبار المثلث متساوي الأضلاع $\triangle DAC$. بما أن AK هو $2/3$ الارتفاع (أو المستقيم المتوسط)، سنحصل على



شكل (2)

سيذكر معظم الطلبة بأن قطع المستقيمتين الثلاثة تتساوى في أطوالها. إن البرهان على هذه القضية يمكن أن ينجز بنفس الطريقة السابقة. أي ليعمد الطلبة، ببساطة، إلى برهنة أن $\triangle CAE \cong \triangle CDB$ للحصول على $AE = DB$.
 إن حقيقة كون $AE = DB = CF$ ستكون مثيرة للغاية عندما يبقى حاضراً في ذهنك بأن المثلث $\triangle ABC$ هو أي مثلث حاد الزاوية. إن عدداً من النتائج المدهشة يمكن الآن تأسيسها من هذا الأساس. أعرض كل منها، على انفراد، ولكن حالاً تتم البرهنة على كل منها، حاول أن تقيم بعناية كل علاقة بحقيقتها التي تم تأسيسها سابقاً.
 1- قطع المستقيمتين \overline{AE} ، \overline{DB} ، \overline{CF} تعانز بكونها متلاقية في نقطة واحدة.

البرهان Proof: تأمل الدوائر المحوطة بالمثلثات الثلاثة - متساوية الأضلاع $\triangle ACD$ ، $\triangle ABF$ ، $\triangle BCE$.
 لتتمكن النقاط M, L, K مركزاً للدوائر الثلاثة (انظر شكل 3). تلتقي الدائرتان L, K في النقطتين A, O. بما أن قياس $m\angle ADC = 240^\circ$ ، ونحن على علم بأن قياس الزاوية

Postassessment التقييم اللاحق

لفرض اختبار قدرة طلبتك على فهم هذا الدرس، اعرض عليهم التمارين الآتية:

- 1- عرف النقطة متساوية الزوايا بمثلث حاد الزاوية.
- 2- ارمس أي مثلث حاد الزاوية. وحدد، باستخدام المسطرة العدة والفرجار، النقطة متساوية الزوايا بالمثلث.
- 3- بين ثلاثة خصائص سائدة في شكل 3، أعلاه.

مرجع Reference

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

النسبة $1:\sqrt{3} = AC:AK$. بنفس الطريقة، في المثلث متساوي الأضلاع $\triangle AFB$ $1:\sqrt{3} = AF:AL$ وعليه $AC:AK = AF:AL$.

$m\angle CAL = m\angle KAL$ ، $30^\circ = m\angle KAC = m\angle LAF$ (انعكاسية) وكذلك $m\angle KAL = m\angle CAF$ (إضافة) وعليه $\triangle KAL \sim \triangle CAF$. وهكذا فإن $CF:KL = CA:AK = \sqrt{3}:1$. بنفس الطريقة نستطيع البرهنة على أن $DB:KM = \sqrt{3}:1$ وأن $AE:ML = \sqrt{3}:1$.
ولكن بما أن $DB = AE = CF$ كما تمت البرهنة عليه سابقاً، نحصل على $KM = ML = KL$ إذن المثلث $\triangle KML$ هو مثلث متساوي الأضلاع.

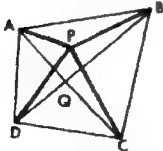
بوصفه تحديداً استنتاجياً اطرح سؤالاً على طلبتك تطلب فيه الكشف عن علاقات أخرى في شكل 3.

النقطة الأقصر مسافة بمثلث

The Minimum Distance Point of a Triangle



شكل رباعي الأضلاع، والتي يكون مجموع أبعادها عن الرؤوس بالحد الأدنى الممكن (من هنا ينبغي أن نشير إلى مثل هذه النقطة بوصفها النقطة الأقل بعداً minimum distance point).



(شكل 1)

ستطور هذه الوحدة عملية البحث عن نقطة بمثلث يكون مجموع أبعادها بالنسبة للرؤوس في الحد الأدنى.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيبرهن الطلبة بأن مجموع المسافات إلى أضلاع المثلث متساوي الأضلاع من نقطة داخلية هو مقدار ثابت.
2. سيثبت الطلبة النقطة الأقصر مسافة بمثلث لا يحوي على زاوية بقياس 120° أو أكبر.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالبادئ الأساسية المتباينات الهندسية Geometric Inequalities.

أطلب من طلبة الصف إيجاد موقع نقطة في شكل رباعي الأضلاع. يكون مجموع أبعادها عن الرؤوس بالحد الأدنى.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

أبدأ المناقشة بجمل الطلبة يتأملون موقع النقطة في داخل

تستطيع أن تتوقع بأن معظم الطلبة سيظنون بأن نقطة تقاطع الأقطار (النقطة Q في شكل 1) ستثل هذه النقطة (النقطة الأقل بعداً). ورغم أن هذا التخمين هو تخمين ذكي،

في المثلث متساوي الأضلاع $\triangle ABC$ ، $\overline{PR} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{PS} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$

ارسم مستقيماً يمر بالنقطة P ويوازي \overline{BC} ملتقياً بالمستقيمات \overline{AD} ، \overline{AB} ، \overline{AC} في النقاط F, E, G على التوالي.

$$PQ = GD$$

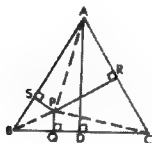
ارسم $\overline{ET} \perp \overline{AC}$ بما أن المثلث $\triangle AEF$ متساوي الأضلاع، $AG \equiv ET$ (جميع ارتفاعات المثلث متساوي الأضلاع متطابقة).

ارسم $\overline{PH} \parallel \overline{AC}$ ملتقياً بالضلع \overline{ET} عند النقطة N. $\overline{NT} \equiv \overline{PR}$ بما أن المثلث $\triangle EHP$ متساوي الأضلاع، فإن الارتفاعين \overline{PS} ، \overline{EN} متطابقان.

لذا، فإننا أظهرنا بأن $PS + PR = ET = AG$ وبما أن $PS + PR + PQ = AG + GD = AD$ ، $PQ = GD$ بالنسبة للمثلث قيد الدراسة.

الطريقة II:

شكل (3)



في المثلث متساوي الأضلاع، $\triangle ABC$ ، $\overline{PR} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{PS} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$

ارسم \overline{PC} ، \overline{PB} ، \overline{PA}

مساحة المثلث $\triangle ABC$ = مساحة $\triangle APB$ + مساحة $\triangle BPC$ + مساحة $\triangle CPA$

$$(PR)(AC)1/2 + (PQ)(BC)1/2 + (PS)(AB)1/2 =$$

بما أن $AC = BC = AB$ فإن مساحة المثلث $\triangle ABC$ = $\triangle ABC$ ولكن مساحة المثلث $\triangle ABC$ = $(AD)(BC)1/2$ عليه $PS + PQ + PR = AD$ وهو ثابت بالنسبة لهذا المثلث.

سيكون الطلبة جاهزين الآن لتأمل المسألة الأصلية : إيجاد نقطة أقصر مسافة بمثلث. ينبغي أن نأخذ بعين الاعتبار مثلثاً مختلفاً لا توجد فيه زاوية يزيد قياسها على 120° .

حاول أن تستطيع تبريراً (برهاناً) على اختيار هذه النقطة بالذات.

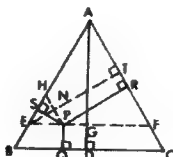
دع الطلبة يختارون أي نقطة P (لا تقع على Q) في داخل الشكل رباعي الأضلاع ABCD (شكل 1). $PA + PC > QA + QC$ (نظروا لأن مجموع طول أي ضلعين في مثلث يكون أكبر من طول الضلع الثالث). وبنفس الطريقة، $PB + PD > QB + QD$. بالإضافة إلى ذلك، سنحصل على $PA + PB + PC + PD > QA + QB + QC + QD$ والذي يظهر بأن مجموع المسافات من نقطة تقاطع قطري الشكل رباعي الأضلاع إلى الرؤوس هي أقل من مجموع المسافات من أي نقطة داخلية أخرى بالشكل الرباعي إلى رؤوسه.

إن الاهتمام المنطقي التالي للطلبة ينصب عادة على (ما هي النقطة الأقل مسافة في مثلث؟). وقبل مباشرة هذا السؤال، فإن من المفيد بالبدء في تأمل نظرية مشوقة أخرى والتي ستسهم لاحقاً في مساعدة الطلبة على تطوير نقطة أقل مسافة في مثلث.

مرة ثانية. ادع طلبك إلى استخدام بديهيتهم، وحسبهم الشخصي مع الاستدلال العقلي بصورة استقرائية. ودعمهم ينشؤون مثلثاً كبيراً متساوي الأضلاع، ثم ليعمدوا إلى اختيار أي نقطة بداخله وقياس أبعادها، بعناية ودقة، من الأضلاع الثلاثة للمثلث متساوي الأضلاع. وبعد أن يكمل الطلبة تدوين مجموع الأبعاد الثلاثة للنقطة عن أضلاع المثلث، أطلب منهم إعادة خطوات العمل لثلاث مرات أخرى، على أن يغيروا موقع النقطة الداخلية في كل مرة من هذه المرات الثلاثة. إن القياسات الدقيقة سوف تعطينا مجاميع متساوية للأبعاد لكل نقطة تم اختيارها. وهكذا، يفترض أن يكون الطلبة قادرين على الخروج بالاستنتاج الآتي : إن مجموع المسافات من أي نقطة داخل المثلث متساوي الساقين إلى أضلاعه هي مقدار ثابت. إن برهانين على هذا الكشف المتع سوف توفر هنا :

الطريقة I Method:

شكل (2)



لتكن النقطة D أي "نقطة أخرى" داخل المثلث $\triangle ABC$. ينبغي أن نفرض بأن مجموع المسافات من M إلى رؤوس المثلث يقل عن مجموع المسافات من النقطة D إلى الرؤوس.

من النظرية التي أكملنا برهانها أعلاه،
 $MA+MB+MC=DE+DF+DG$ (حيث أن قطع المستقيمات \overline{DE} ، \overline{DF} ، \overline{DG} هي الأعمدة على كل من \overline{BC} ، \overline{AC} ، \overline{AB} على التوالي).

ولكن $DE+DF+DG < DA+DB+DC$. (إن أقصر مسافة من نقطة خارجة عن مستقيم هي عبارة عن طول قطعة العمود من النقطة إلى المستقيم).

بالتعويض :

$$MA + MB + MC < DA + DB + DC$$

والآن بعد استكمال البرهنة على النظرية، قد يتساءل الطلبة لماذا اخترنا تحديد مناقشتنا بالمثلثات التي تقل قياسات زواياها عن 120° . دعهم يحاولوا إنشاء النقطة M في مثلث منفرج الزاوية وقياس إحدى زواياه 150° . إن مهتر التحديد الذي تبيناه سوف يبدو واضحاً لا لبس فيه.

التقييم اللاحق Postassessment

لاختبار مقدار فهم الطلبة واستيعابهم للتمارين السابقة، أطلب منهم :

- 1- يوهن أن مجموع المسافات إلى أضلاع مثلث متساوي الأضلاع ومن نقطة داخلية تمثل مقدارا ثابتا.
- 2- حدد النقطة الأقصر مسافة بمثلث لا يحوي على زاوية يزيد قياسها على 120° .
- 3- حدد النقطة الأقصر مسافة بشكل رباعي الأضلاع.

مرجع Reference

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

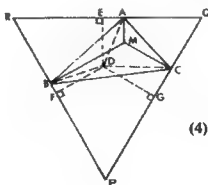
إن الطلبة الذين يدركون الحاجة للموسسة للتعامل في هذه المسألة، قد يقترحون اختيار النقطة التي تقابل عندها الأضلاع الزوايا المتطابقة. فإذا ثبت قبولهم لهذا التخمين يصبح لزاماً عليهم البرهنة على صحته.

لذا ينبغي علينا البرهنة على : إن النقطة الداخلية في مثلث (لا يزيد قياس أي زاوية من زواياه على 120°) والتي تقابل عندها الأضلاع الزوايا المتطابقة، هي النقطة الأقل بعداً بمثلث.

البرهان Proof

في شكل 4، افترض بأن M هي نقطة داخلية بالمثلث $\triangle ABC$ ، حيث تكون قياسات الزوايا $m\angle AMC=m\angle BMC=m\angle AMB=120^\circ$. ارمس مستقيمات \overline{AM} ، \overline{BM} ، \overline{CM} على التوالي.

تلتقي هذه المستقيمات لتكوين المثلث متساوي الأضلاع $\triangle PQR$ للبرهنة على أن المثلث $\triangle PQR$ متساوي الأضلاع، لاحظ بأن قياس كل زاوية من زواياه هي 60° . يمكن أن يمرض هذا الأمر عندما نتأمل، على سبيل المثال، الشكل الرباعي AMBR. بما أن قياس $m\angle RAM=m\angle PBM=90^\circ$ ، وأن قياس $m\angle AMB=120^\circ$ ، ينتج عن ذلك أن قياس $m\angle ARB=60^\circ$.

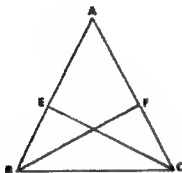


شكل (4)

45

عودة إلى المثلث متساوي الساقين

The Isosceles Triangle Revisited



Proof: البرهان

$$m\angle ECB = \frac{1}{2} m\angle ACB$$

$$m\angle FCB = \frac{1}{2} m\angle ACB$$

بما أن $m\angle ABC = m\angle ACB$ (زاويتا قاعدة المثلث متساوي الساقين)

$$m\angle FCB = m\angle ECB \text{ وبما أن } \overline{BC} \cong \overline{BC}$$

$$\overline{BF} \cong \overline{CE} \text{ عليه سيكون } \triangle FBC \cong \triangle ECB \text{ (ASA)}$$

عندما ينتج الطلبة العمل على هذا البرهان، أدهمهم إلى بيان نقض القضية التي برهنتم قبل قليل إذا تطابق منصفان زاويتين من زوايا المثلث فإن هذا المثلث يكون متساوي الساقين.

تحدى الطلبة ببرهنة القضية الجديدة. وبما أنه يبعد احتمال أن يكون طلبتك قادرين على برهنة هذه القضية في وقت قصير، فقد ترغب بأن تعرض لهم بعضاً من البراهين الآتية. سيصابون بهشة كبيرة بأن تقضي قضية نظرية تتسم بالبساطة يمتاز بصعوبة بالغة.

إن كلاً من البراهين الآتية تمتاز بكونها براهين تعليمية. ويحاجة إلى اهتمام وعناية خاصة.

في البدايات المبكرة لمساق الهندسة بالمدارس الحالية، يمارس الطلبة مجموعة من تمارين البرهنة باستخدام المثلثات متساوية الساقين. إن مثل هذا البرهان يتضمن البرهنة على أن منصفات زاويتي القاعدة يمثلث متساوي الساقين تكون متطابقة. ورغم أن هذا البرهان يتسم بالبساطة لحد كبير فإن نقضه يمتاز بصعوبة بالغة. وربما يعد من أكثر براهين القضايا صعوبة، على الإطلاق، في ميدان الهندسة الأقليدية. تعرض هذه الوحدة بضعة طرق، والتي يستطيع الطلبة بواسطتها برهنة القضية.

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بالبرهنة على أنه "إذا تطابق منصف زاويتي من زوايا المثلث، فإن هذا المثلث يكون متساوي الساقين".

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد مارسوا أكثر من تمرين على البراهين الهندسية، ومن ضمنها البراهين غير المباشرة Indirect Proofs.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

أبداً عرضك التقديمي في مطالبة الطلبة بالبرهنة على: أن منصفي زاويتي القاعدة في مثلث متساوي الساقين يكونان متطابقين.

قد ترغب بالبدء معهم بصورة منتظمة:

المعلومات المتوفرة:

المثلث متساوي الساقين $\triangle ABC$ وفيه $AB = AC$, \overline{BE} , \overline{CF} منصفي زاويتي قاعدة المثلث.

برهن Prove:

$$\overline{BF} \cong \overline{CE}$$

وكذلك، $m \angle 9 = m \angle 10$ (من المثلثين $\triangle AFDG$ ، $\triangle ABH$)

(بالتطرح) $m \angle DAB = m \angle DFB$

(من المثلثين $\triangle AEB$ ، $\triangle DBF$) $m \angle DFB = m \angle EBA$

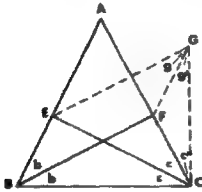
وعليه فإن $m \angle DAB = m \angle EBA$ (انتقالية) وإن المثلث $\triangle ABC$ يكون متساوي الساقين.

إن البراهين التالية لهذه النظرية هي براهين "غير مباشرة" وربما تحتاج إلى تقديم خاص.

المعطى: \overline{CE} ، \overline{BF} هما منصفتا زاويتين بالمثلث $\triangle ABC$.

$\overline{BF} \cong \overline{CE}$

برهن: أن المثلث $\triangle ABC$ متساوي الساقين.



البرهان غير المباشر Indirect Proof I:

افترض أن المثلث $\triangle ABC$ ليس مثلثا متساوي الساقين.

افترض $m \angle ABC > m \angle ACB$

(فرضية) $\overline{BF} \cong \overline{CE}$

$\overline{BC} \cong \overline{BC}$

(بحسب الفرضية) $m \angle ABC > m \angle ACB$

$\overline{CF} > \overline{BE}$

من خلال النقطة F، ارسم \overline{GF} موازية لـ \overline{EB} .

من خلال النقطة E، ارسم \overline{GE} موازيا لـ \overline{BF} .

الشكل BFGGE هو متوازي أضلاع.

والمثلث $\triangle GEC$ متساوي

الساقين.

$m \angle (g + g') = m \angle (c + c')$

ولكن $m \angle g = m \angle b$

$m \angle (b + g') = m \angle (c + c')$

وعليه فإن، $m \angle g' < m \angle c'$ بما أن $m \angle b > m \angle c$

في المثلث $\triangle AGFC$ ، لدينا $CF < GF$

ولكن $GF = BE$

إذاً $CF < BE$

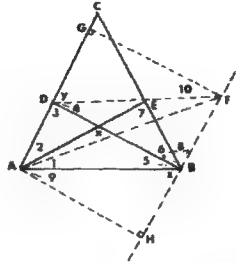
إن فرضية عدم تساوي قياس $m \angle ACB$ ، $m \angle ABC$ تؤدي

المعطى:

$\overline{BD} \cong \overline{AE}$ هما منصفتا زاويتين في المثلث $\triangle ABC$

$\overline{AE} \cong \overline{BD}$

برهن: أن المثلث $\triangle ABC$ متساوي الساقين.



البرهان Proof:

ارسم الزاوية $\angle DBF \cong \angle AEB$ بحيث $\overline{BF} \cong \overline{BE}$.

ارسم \overline{DF} .

كذلك ارسم $\overline{FG} \perp \overline{AC}$ وكذلك $\overline{AH} \perp \overline{FB}$

بالفرضية. $\overline{AE} \cong \overline{DB}$ ، $\overline{FB} \cong \overline{EB}$ وكذلك $\angle 8 \cong \angle 7$

وعليه فإن $\triangle AAE \cong \triangle DBF$ (SAS)، $DF = AB$ ، وكذلك

$m \angle 1 = m \angle 4$

(زوايا خارجية بمثلث) $m \angle x = m \angle 2 + m \angle 3$

(بالتعويض) $m \angle x = m \angle 1 + m \angle 3$

(بالتعويض) $m \angle x = m \angle 4 + m \angle 3$

(زوايا خارجية بمثلث) $m \angle x = m \angle 7 + m \angle 6$

(بالتعويض) $m \angle x = m \angle 7 + m \angle 5$

(بالتعويض) $m \angle x = m \angle 8 + m \angle 5$

وعليه $m \angle 4 + m \angle 3 = m \angle 8 + m \angle 5$ (انتقالية)

لذا $m \angle z = m \angle y$.

المثلث قائم الزاوية $\triangle AFDG \cong \triangle ABH$ قائم الزاوية $\triangle AABH$

(SAS)، $FG = AH$ ، $DG = BH$

المثلث قائم الزاوية $\triangle AFG \cong \triangle AHA$ (HL)، وكذلك $AG = FH$

وعليه يكون $GFHA$ متوازي أضلاع.

متساوي، إذن يكون قياس الضلعين المقابلين لهما غير متساوي أيضاً، ويكون الضلع ذو القياس الأكبر هو الضلع المقابل للزاوية ذات القياس الأكبر.

اختر النقطة G بحيث يكون $\overline{BG} \equiv \overline{FC}$.

بعدها ارسم $\overline{GH} \parallel \overline{FC}$

وعليه $\angle BGH \equiv \angle BFC$ (زوايا متناظرة)، وكذلك

(ASA) $\triangle BGH \equiv \triangle CFD$

عندها ينتج أن $BH = DC$.

بما أن $BH < BE$ ، وهذا يناقض الفرضية التي تنص على تساوي منصف الزاويتين. إن حجة مشابهة سوف تظهر استحالة الحصول على $m\angle ACB < m\angle ABC$. عندها ينتج أن $m\angle ACB = m\angle ABC$ وأن المثلث $\triangle ABC$ هو مثلث متساوي الساقين.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بالبرهنة على أنه في حالة تطابق منصف زاويتي مثلث فإن المثلث سيكون متساوي الساقين.

مرجع Refremce

Posamentier, A. S., and Charles, T. S., Challenging Problems in Geometry, New York: Dover, 1996.

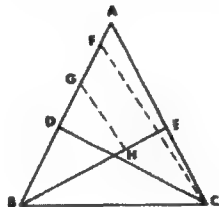
إلى نتيجتين مختلفتين، $CF > BE$ ، $CF < BE$ ، وعليه فإن المثلث $\triangle ABC$ هو مثلث متساوي الساقين.

والآن سنأتي برهان غير مباشر جديد:

المعطى: \overline{BE} ، \overline{DC} هما منصف زاويتي المثلث $\triangle ABC$.

$\overline{BE} \equiv \overline{DC}$

برهن: أن المثلث $\triangle ABC$ هو مثلث متساوي الساقين.



البرهان Proof II:

في المثلث $\triangle ABC$ ، فإن منصف زاويتي المثلث $\triangle ABC$ ، $BE = DC$ ، افترض بأن $m\angle ABC < m\angle ACB$ ، إذن $m\angle ABE < m\angle ACD$.

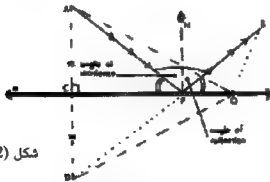
بعدها نقوم برسم $\angle FCD$ متطابقة مع $\angle ABE$. لاحظ بأننا قد اختار F بين B و A دون أن تضع العمومية. وفي المثلث

46

الخصائص الانعكاسية للمستوى

Reflective Properties of The Plane

عليها "الصورة المنعكسة" Reflected Image للنقطة A في المستقيم m. إن نقطة تقاطع \overline{BD} والمستقيم m تحدد النقطة P، وهي النقطة المطلوبة في المسألة الأصلية. ولكن، ما ينبغي عرضه الآن هو أن:



شكل (2)

$AP + PB$ هو أقصر "من أي مسار آخر من A إلى المستقيم m (لنقل عند النقطة Q)، ومن ثم إلى النقطة B. قد يكون الطلبة أكثر ارتياحاً باعتبار هذا الأمر "برهاناً شكلياً Format Proof".

لديك: النقطتان A، B تقعان على نفس الجهة بالنسبة للمستقيم. $\overline{mACD} \perp \overline{CPQ}$ حيث تمثل Q أي نقطة على \overline{CP} (عند النقطة P).

$$\frac{DPB}{AC} \cong \frac{CD}{AC}$$

برهن: $AP + PB < AQ + QB$

الخطوط العامة للبرهان Outline of Proof: $\overline{AP} \cong \overline{DP}$ سيكون $\overline{ACD} \perp \overline{CPQ}$ ، وكذلك $\overline{AQ} \cong \overline{QD}$.

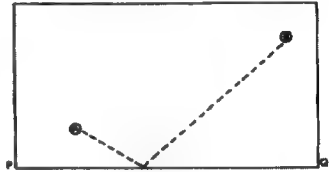
في المثلث $\triangle DQB$ ، $BD < BQ + QD$ (تباين مثلث). بما أن $AP + PB < AQ + BQ$ ، $BD = DP + PB$ أن نستطيع أن نتعرض الآن على الصف، بما أنه

هدف الأداء Performance Objective

لديك مستقيم ونقطتان في إحدى جهات المستقيم، سيقوم الطلبة بتحديد أقصر مسار مشترك من إحدى النقاط إلى المستقيم ثم إلى النقطة الثانية.

التقييم السابق Preassessment

باستخدام المخطط التوضيحي الآتي أطلب من الطلبة تحديد النقطة الصحيحة على بطاقة حافة مائدة البلهارد Cushion PQ والتي ينبغي أن ترتطم بها الكرة A لكي ترتطم بعددز بالنقطة B (افتراض عدم وجود "English" على الكرة).



شكل (1)

إن عدم الاتفاق بصدد موقع ارتطام الكرة سوف ينشأ عنه اهتمام كاف لإثارة موضوع خصائص الانعكاس.

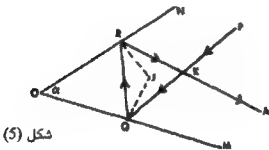
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليحاول طلبة الصف البرهنة على الخاصية الآتية: "إن شعاع الضوء سوف يصنع زاويتين متساويتين مع مرآة قبل، وبعد أن ينعكس عليها".

(إن هذه النظرية يمكن البرهنة عليها بسهولة بعد الأخذ بعين الاعتبار البرهان الآتي).

لإيجاد أقصر مسافة من النقطة A إلى المستقيم m ثم إلى النقطة B في شكل 2، تأمل العمود المقام من النقطة A إلى المستقيم m (الذي يلتقي مع المستقيم m بالنقطة C). افترض أن النقطة D على \overline{AC} بحيث $\overline{AC} \cong \overline{CD}$. إن النقطة D يطلق

المنكس عن B' (أطلق عليها B''). و \overrightarrow{PQ} هي النقطة المستهدفة لإتمام ضربتي حافة المائدة. يستطيع الطلبة تصور هذه النقطة كانعكاس للكرة في B بالمرآة الموضوعة على طول \overrightarrow{PQ} والتي سوف يرونها كانعكاس على المرآة الموضوعة على طول \overrightarrow{QR} .



(شكل 5)

إن الصف الذي سيثار اهتمامه بالموضوع، قد يرغب في النظر إلى ما وراء الانعكاس المزدوج Double Reflection إلى حيث الزاوية بين مستويين تثبت دائما بوصفها زاوية قائمة.

إن مرآتين بزاوية ثنائية الأسطح - ثابتة Fixed Dihedral Angle بينهما يطلق عليهما مرآيا الزاوية Angle Mirrors. ليقم الطلبة بالبرهنة على أنه إذا أضأ مراقب الضوء في مرآيا الزاوية بحيث أن الشعاع ينعكس بعيدا عن أحدهما، ثم من الثانية، فإن الشعاع المنعكس أخيرا سيكون زاوية مع الشعاع الأصلي والذي سيكون ضعف الزاوية ثنائية الأسطح بين المرآتين. بعبارة أخرى:

معطى: المرآتين OM، ON، افترض $\angle NOM = \alpha$ ، كذلك فإن شعاع الضوء المنبعث عند النقطة P مستهدفا Q ينكس بعيدا عن OM على ON ويعدن إلى A.

يرهن: $\angle PKR = 2\alpha$ (شكل 5)

الخطوط العامة للبرهان Outline of Proof:

ارسم الأعمدة على المستويين (المرآتين) عند نقاط سقوط الشعاع في كل منهما، يعني، $\overrightarrow{QJ} \perp \overrightarrow{OM}$ ، في النقطة Q، وارسم $\overrightarrow{RJ} \perp \overrightarrow{ON}$ ، في النقطة R (نقطة سقوط الشعاع على المرآة \overrightarrow{ON}). يعدن، بواسطة خاصية الانعكاس، ينصف كل من \overrightarrow{QJ} ، \overrightarrow{RJ} الزاويتين $\angle PQR$ و $\angle QRA$ على التوالي. بعدها $\angle PKR = m \angle KQR = m \angle KRQ$ (نظرية الزاوية الخارجية في مثلث). فإن،

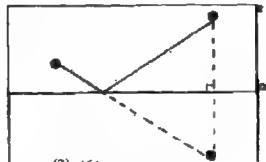
$$\angle PKR = 2(m \angle QQR + m \angle QRJ)$$

$\angle CPD \cong \angle BPQ$ ، وأن $\angle APC \cong \angle CPD$ ، علاوة على ذلك $\angle APC \cong \angle BPQ$.

إذا كان $\overrightarrow{PN} \perp$ المستقيم m، فإن الزاوية $\angle APN$ (زاوية السقوط Incidence Angle) متطابقة مع الزاوية $\angle BPN$ ، زاوية الانعكاس Angle of Reflection.

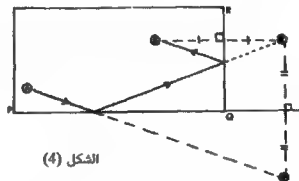
ليقم الطلبة بتطبيق خصائص الانعكاس على مسألة منضدة البليارد.

سترد كرة البليارد بعيدا عن بطانة حافة مائدة البليارد كما "يثب" الضوء بعيدا عن المرآة. من أجل هذا إذا كانت الكرة عند الموقع A (شكل 3)، ويرغب اللاعب أن يجعلها ترتطم بحافة مائدة البليارد \overrightarrow{PQ} إلى الموقع B، يستطيع أن يستهدف بضربته على \overrightarrow{PQ} حيث يرى النقطة B (إذا وضعت المرآة على طول \overrightarrow{PQ}).



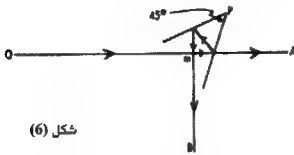
(شكل 3)

وليتأمل الطلبة الآن مسألة ضرب حافتي المائدة (\overrightarrow{PQ} ثم \overrightarrow{QR}) قبل ضرب B.



(الشكل 4)

تأمل الصورة المنعكسة للنقطة B في \overrightarrow{QR} ، وأطلق عليها B' (شكل 4). والآن عليهم أن يتأملوا، فحسب، مسألة أين ستضرب الكرة من A على حافة المنضدة \overrightarrow{PQ} بحيث تتدحرج باتجاه B' . لإجراء ذلك، دعهم يأخذون الصورة المنعكسة لـ B' في \overrightarrow{PQ} ، ثم نقطة تقاطع المستقيم الذي يصل بين A والشعاع

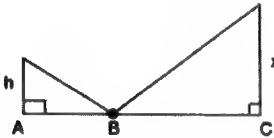


شكل (6)

لحين يكون الطالب (في نقطة ما هي m) الطالب عند O قادرا على رؤية الطالب عند النقطة B في مرآة الزاوية. إن النقطة m هي قاعدة الارتفاع من B إلى OA .

التقييم اللاحق Postassessment

باستخدام خاصية الانعكاس، ليقيم الطلبة بالبرهنة على ان ارتفاع سارية العلم هو $X = \frac{h \cdot BC}{AB}$ حيث X هو ارتفاع المراقب



إن إحدى تطبيقات موازيا الزاوية هي عندما تكون قيمة الزاوية ثنائية الأسطح 45° فإن الشعاع سوف ينعكس بزاوية مقدارها 90° . إن زوجا من مثل هذه المرايا يطلق عليها غالبا "المربع الضوئي"، Optical Square، بسبب استخدامه في تحديد خطوط الرؤية المتعامدة.

ليبان كيفية استخدام المربع الضوئي، ليقف طالب عند كل من النقاط الثلاثة B ، O ، A ، بحيث تعرف هذه النقاط مثلثا (شكل 6). باستخدام هذا المربع سيكون الطلبة قادرين على تحديد موقع التقاء العمود من B إلى AO يقابل AO . ليقف طالب آخر عند O ويصوب نظره نحو الطالب الواقف عند النقطة A . وليأت طالب ثالث ويقف عند النقطة P ، ممسكا بالمربع الضوئي، ومحركا إياه على طول خط النظر من O إلى A .

إيجاد طول "سيفيان" بمثلث

Finding the Length of a Cevian of a Triangle

47

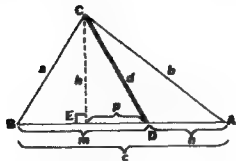
نظرية ستيفورت Stewart's Theorem (سميت إشارة إلى العالم ماثيو ستيفورت الذي نشرها عام 1945)، سيكون الطلبة قادرين على إيجاد طول "أي" سيفيان بمثلث.

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1- سيقوم الطلبة بإيجاد طول سيفيان محدد بمثلث معلوم، والذي تكون أطوال أضلاعه (وقطعته) معروفة.
- 2- سيقوم الطلبة بإعداد صيغة خاصة لإيجاد طول نصف زاوية بمثلث، معلومة أطوال أضلاعه.

تعرض هذه الوحدة طريقة لإيجاد طول "أي" قطعة مستقيم تصل بين رأس المثلث مع أي نقطة بالضلع المقابل. يطلق على قطعة المستقيم هذه اصطلاح سيفيان، نسبة إلى العالم الرياضي جيوفاني سيفا Giovanni Ceva الذي ابتكر نظرية حول التقاء مثل قطع المستقيم هذه. تكون هذه التقانة مفيدة بالخصوص للطلبة، نظرا لكونها تسد فراغا في جملة من المناهج.

بصورة عامة، يتعلم الطلبة طرقا لإيجاد أطوال سيفيانات خاصة مثل الارتفاع وبعض المستقيمات المتوسطة. ولكن باستخدام



شكل (2)

يمكن بواسطة هذه النظرية، يمكن إيجاد قيمة d إذا كانت قيم كل من: a, b, m, n معروفة. إن برهان هذه النظرية البالغة الأهمية هو كما يأتي:

البرهان: Proof:

في المثلث ABC ، افترض $BC = a, AC = b, CD = d$.
تقسم النقطة D المستقيم AB إلى قطعتين، $BD = m, DA = n$.
ارسم الارتفاع $CE = h$ وافترض $ED = p$.

لفرض الاستمرار في برهان نظرية ستوارت، سنشتق في البداية صيغتين ضروريتين. تنطبق الصيغة الأولى على المثلث CBD .
طبقنا نظرية فيثاغورث على المثلث CEB للحصول على:

$$(CB)^2 = (CE)^2 + (BE)^2$$

$$(I) \quad a^2 = h^2 + (m-p)^2, \quad BE = m-p$$

ولكن، بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث CED ، سيكون لدينا $(CD)^2 = (CE)^2 + (ED)^2$ أو $h^2 = d^2 - p^2$. بتعويض h^2 في معادلة (I)، سنحصل على:

$$a^2 = d^2 - p^2 + (m-p)^2$$

$$a^2 = d^2 - p^2 + m^2 - 2mp + p^2$$

وعليه،

$$(II) \quad a^2 = d^2 + m^2 - 2mp$$

إن قضية مماثلة تنطبق على المثلث CDA . بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث CEA ، نجد ما يأتي:

$$(CA)^2 = (CE)^2 + (EA)^2$$

$$(III) \quad b^2 = h^2 + (n+p)^2, \quad EA = (n+p)$$

ولكن، بتعويض $h^2 = d^2 - p^2$ في المعادلة (III) كما يأتي:

$$b^2 = d^2 - p^2 + (n+p)^2$$

$$b^2 = d^2 - p^2 + n^2 + 2np + p^2$$

إن،

$$(IV) \quad b^2 = d^2 + n^2 + 2np$$

وإن المعادلتين (II) و (IV) توفر لنا الصيغة التي نحتاجها.

والآن اضرب المعادلة (II) بـ n للحصول على:

$$(V) \quad a^2 n = d^2 n + m^2 n - 2mnp$$

واضرب المعادلة (IV) بـ m لتحصل على:

$$(VI) \quad b^2 m = d^2 m + n^2 m + 2mnp$$

التقييم السابق Preassessment

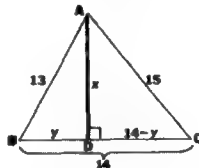
ينبغي أن يكون الطلبة قد أتقنوا معظم مفردات مصاق الهندسة الخاص بالمدارس الثانوية. ولأغراض المراجعة، ليقم الطلبة بالعمل على المسألة الآتية:

في مثلث أطوال أضلاعه 13، 14، 15، ما هو مقدار الارتفاع منسوباً إلى الضلع الذي طوله 14؟

استراتيجية التعليم Teaching Strategies

إن إحدى المهارات المطلوبة لتطوير نظرية ستوارت هي المعرفة التطبيقية بنظرية فيثاغورث. إن المسألة المذكورة أعلاه تتطلب هذه المهارة.

بعد إكمال الطلبة رسم المخطط المطلوب في هذه المسألة، سوف يلاحظون مباشرة وجود زاويتين قائمتين.



شكل (1)

سنطبق نظرية فيثاغورث على هذا الشكل مرتين، الأولى على المثلث ACD والمرة الثانية على المثلث ABD .

$$\text{بالنسبة للمثلث } ACD: x^2 + (14-y)^2 = 225$$

$$\text{بالنسبة للمثلث } ABD: x^2 + y^2 = 169$$

$$(14-y)^2 - y^2 = 56$$

$$196 - 28y + y^2 - y^2 = 56$$

$$y = 5$$

ثم بعد ذلك $x = 12$

وعليه، سيري الطلبة مثلثين قائمين وبأطوال أضلاع صحيحة: 5، 12، 13، وكذلك 9، 12، 15.

والآن تحدى طلبك بإيجاد طول منصف الزاوية من الرأس A في المثلث ABC . بعد فترة قصيرة، ستكون خبيثتهم ظاهرة للعيان! ليتوقف الطلبة عند هذا التخمين، عن العمل، وتناول من خلال مناقشة مفتوحة معهم تفاصيل نظرية ستوارت.

نظرية ستوارت Stewarts Theorem

في شكل 2، تنص النظرية على أن:

$$a^2 n + b^2 m = c (d^2 + mn)$$

بواسطة نظرية ستوارت نحصل على العلاقة الآتية:

$$c^2n + b^2m = a(t_a^2 + mn) \text{ ، أو } t_a^2 + mn = \frac{c^2n + b^2m}{a}$$

$$t_a^2 + mn = \frac{c^2n + b^2m}{a}$$

أو كما موضح في الشكل 4.

ولكن $\frac{c}{b} = \frac{m}{n}$ (منصف زاوية المثلث ينقسم الضلع المقابل إلى قطعتين يتناسب قياسهما إلى قياس الضلعين الآخرين في المثلث. ويصح العكس أيضاً).

$$cn = bm \text{ لذا}$$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه،

$$t_a^2 + mn = \frac{cbm + cbn}{m+n} = \frac{cb(m+n)}{m+n} = cb$$

$$t_a^2 = cb - mn \text{ وعليه،}$$

عند هذا التخمين، سيكون طلبتك قادرين على إيجاد طول "أي" سيفيان بمثلث. كمورد للتقوية وتعميق الفهم لديهم، اعرض مسائلًا تتضمن منصفات زاوية، ومستقيمات متوسطة قبل أن تتوجه صوب أنواع أخرى من السيفيانات.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقوم الطلبة بإكمال التمارين الآتية:

1. جد طول الارتفاع المرسوم من أطول ضلع بمثلث أضلاعه 10، 14، 12.
2. جد طول المستقيم المتوسط المرسوم إلى أطول ضلع بمثلث أطوال أضلاعه 10، 12، 14.
3. جد طول منصف الزاوية المرسوم باتجاه أطول ضلع بمثلث أطوال أضلاعه 10، 12، 14.
4. في المثلث ΔPQR ، إذا كان $PR = 7$ ، $PQ = 8$ ، $RS = 4$ ، $SQ = 5$. جد قيمة PS عندما تكون S على \overline{RQ} .

مرجع Reference

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

بإضافة المعادلة (V) إلى المعادلة (VI)، يكون لدينا:

$$a^2n + b^2m = d^2n + d^2m + m^2n + n^2m + 2mnp - 2mnp$$

$$a^2n + b^2m = d^2(n + m) + mn(m + n) \text{ إذن}$$

$$a^2n + b^2m = d^2c + mnc; \text{ بما أن } m+a=c \text{ فإن لدينا:}$$

$$a^2n + b^2m = c(d^2 + mn) \text{ أو}$$

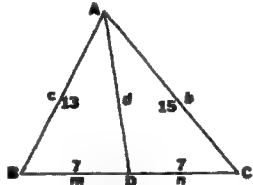
سيكون طلبتك الآن على استعداد تام لإيجاد طول المستقيم المتوسط من الرأس A بالمثلث ABC، حيث $AB = 13$ ، $BC = 14$ ، $AC = 15$.

وسيكون كل ما سيحتاجونه للحصول على ذلك هو تطبيق مباشر

لنظرية ستوارت كما يأتي:

$$c^2n + b^2m = a(d^2 + mn)$$

ولكن، بما أن AD هو مستقيم متوسط $m = n$.



شكل (3)

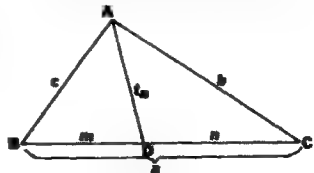
بالتعويض في الصيغة أعلاه، نحصل على:

$$13^2(7) + 15^2(7) = 14(d^2 + 49)$$

$$d = 2\sqrt{37} \text{ وعليه:}$$

لإيجاد طول منصف زاوية بمثلث، ترشدنا نظرية ستوارت إلى علاقة مبسطة ومختصرة، وسيجدها الطلبة سهلة الاستخدام.

ليتنامل الطلبة المثلث ΔABC ومنصف الزاوية \overline{AD} .

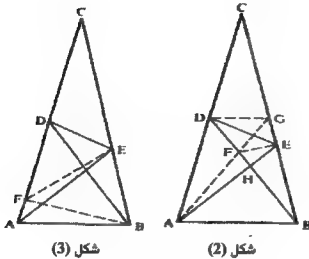


شكل (4)

48

تحدي مدهش

A Surprising Challenge



شكل (3)

شكل (2)

ينبغي أن يعطى وقت مناسب للطلبة، لكي يستطيعوا التعامل مع هذه المسألة من جميع جوانبها. وبعد فترة وجيزة، سيجد الطلبة قياسات معظم الزوايا الموجودة في المخطط. ولكنهم، سيدركون بعد ذلك، بأن هذه المسألة ليست سهلة كما تصورها منذ النظرة الأولى، نظراً لأن هناك احتمال كبير بعدم قدرتهم على حل هذه المسألة! عند هذه النقطة تستطيع البدء بمناقشة الحل للماتم لهذه المسألة.

وسيدرك الطلبة فوراً بأن هناك حاجة إلى مستقيمتين إضافية لفرض حل هذه المسألة. اقترح قيامهم برسم $DG \parallel AB$ ، حيث تقع G على CB. بعدئذ ارم AG قاطعاً BD في النقطة F. إن القطعة المستقيمة الأخيرة التي يتوجب رسمها هي EF (انظر شكل 2).

سيكون الطلبة قادرين على برهنة أن $\angle BAG \cong \angle ABD$. بعدئذ، $m \angle AGD = m \angle BAG = 60^\circ$ (زوايا داخلية متناظرة بخطوط متوازية). وعليه فإن قياس $\angle AFB$ يجب أن تساوي 60° والمثلث AFB متساوي الأضلاع، وكذلك $AB = FB$. بما أن $m \angle EAB = 50^\circ$ وأن قياس $\angle ABE = 80^\circ$ ، $m \angle AEB = 50^\circ$ فإن المثلث $\triangle ABE$ سيكون مثلثاً متساوي

إن هذه الوحدة سوف تفتح أنعمان الطلبة على الحقيقة القائلة: بأن ما قد يبدو سهلاً قد يكون في الواقع بالغ الصعوبة.

هدف الأداء Performance Objective

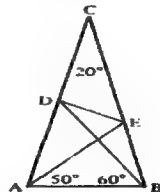
بإعطاء مسألة هندسية من النوع المعروض هنا، سيباشر الطلبة عملية تحليلها، وحلها بصورة صحيحة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على معالجة البراهين الهندسية بسهولة نسبية قبل مباشرة هذه الوحدة. إن المسألة المطروحة هنا تمتاز بصعوبة البرهنة عليها، ولكنها سهلة البيان. ستكون المسألة بمستوى يزيد قليلاً على المستوى المتوسط لهندسة المدارس الثانوية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن المسألة الهندسية التي ستقوم بعرضها على طلبتك، بعد قليل، تبدو واضحة وسهلة، وساذجة إلى حد كبير. مسألة Problem: المثلث $\triangle ABC$ متساوي الساقين: $m \angle ABE = 50^\circ$ ، $m \angle ABD = 60^\circ$ ، $(CA = CB)$ ، $m \angle C = 20^\circ$. جد قياس زاوية $\angle EDB$.



شكل (1)

60° فإن المثلث FBE متساوي الأضلاع وأن

$$(III) \quad \dots \quad EB = FB = FE$$

والآن في المثلث DFB، $m\angle FDB = 40^\circ$

$$m\angle FBD = m\angle ABD - m\angle ABF = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

إذن المثلث DFB هو مثلث متساوي الساقين،

$$(IV) \quad \dots \quad FD = FB$$

بعد ذلك، من المعادلتين (III)، و (IV) نحصل على

$$FE = FD$$

$$m\angle FDE = m\angle FED$$

$$m\angle EFB = 60^\circ \text{ وكذلك } m\angle AFB = 80^\circ$$

بعدئذ سيكون قياس الزاوية $\angle AFE$ ، الزاوية الخارجية

بالمثلث متساوي الساقين FDE، مساوية 140° ، بالإضافة.

وسيتبع ذلك $m\angle ADE = 70^\circ$ ، وعليه،

$$m\angle EDB = m\angle ADE - m\angle FDB = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$$

هناك طرق متنوعة أخرى لحل هذه المسألة، إن مرجعنا لسبعة

حلول تخص هذه المسألة هو:

Challenging Problems in Geometry, by A. S. Posamentier, and C. T. Salkind, pp. 149 – 154 (Dove, 1996).

التقييم اللاحق Postassessment

ليكتشف الطلبة حلاً آخر لهذه المسألة.

الساقين، وان $AB = EB$ وعليه $FB = EB$ (انتقالية)، وان المثلث $\triangle EFB$ متساوي الساقين.

بما أن $m\angle BEF = m\angle BFE = 80^\circ$ ، $m\angle EBF = 20^\circ$

كما أن $m\angle DFG = 60^\circ$ ، $m\angle GFE = 40^\circ$ ، بما أن $GE = EF$

(ضلعاً مثلث متساوي الساقين)، وكذلك $DF = DG$ (أضلاع

مثلث متساوي الأضلاع).

إذن $\triangle DFE$ هو من نوع Kite، يعني، إن مثلثين متساوي

الساقين يشتركان خارجياً بقاعدة مشتركة. \overline{DE} ينصف الزاوية

$\angle GDF$ (من خصائص الـ Kite)، لذا فإن قياس

$$m\angle EDB = 30^\circ$$

إن طريقة أخرى لحل المسألة ستكون كما يأتي: في المثلث

متساوي الساقين $\triangle ABC$ ، $m\angle ACB = 20^\circ$ ، $m\angle CAB = 80^\circ$ ،

$$m\angle EAB = 50^\circ$$

ارسم \overline{BF} بحيث يكون $m\angle ABF = 20^\circ$ بعدئذ ارسم

\overline{FE} (شكل 3).

في المثلث $\triangle ABE$ ، $m\angle AEB = 50^\circ$ (مجموع قياسات زوايا

المثلث تساوي 180°) وعليه $\triangle ABE$ مثلث متساوي الساقين،

وان $AB = FB$ (I)....

بنفس الأسلوب، $\triangle FAB$ مثلث متساوي الساقين، بما أن

$$\angle AFB = m\angle FAB = 80^\circ$$

إذن $AB = EB$ (II).....

من المعادلتين (I)، (II)، $EB = FB$ ، بما أن $m\angle FBE =$

عمل اكتشافات في الرياضيات

Making Discoveries in Mathematics

49

والمصغرة، والتي يتطلب كل منها أن يمارس الطالب اكتشافاً لنمط، أو علاقة، ثم بيان استنتاجه / أو استنتاجها بخصوص ذلك.

1. اختر أي عديدين متتاليين من الأعداد التربيعية (مثال، 4، 9).

أعط أي عدد أولي بين هذين العددين. كرر ذلك بالنسبة

لعشرة أزواج من الأعداد التربيعية المتتالية. والآن حاول

إيجاد زوج من الأعداد التربيعية المتتالية التي لا تحوي على

عدد أولي بينهما. بأي استنتاج ستخرج من هذه التجربة؟

يقصد من هذا النشاط السماح للطلبة بعمل اكتشافات مبنية على الملاحظة، ثم اقتراح استنتاج ما.

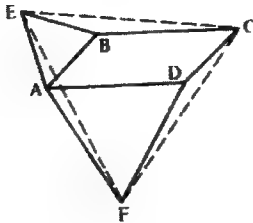
هدف الأداء Performance Objective

بواجهة مجموعة من الأنماط الرياضية، سيبدى الطلبة

اكتشافهم، وبيان استنتاجهم.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

سيألف هذا النشاط من سلسلة من الأنشطة الرياضية -



شكل (2)

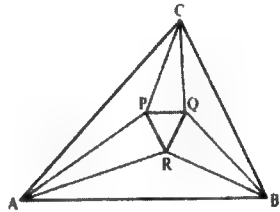
قد تحاول تكرار هذه التجارب مع أمثلة مشابهة لما ورد آنفاً. إن من الضروري، بالنسبة للطلبة، تعلم كيف يتقن بجهدهم، وبديهيتهم في الرياضيات، وأن يكونوا قادرين على إصدار استنتاجات استقرائية صحيحة.

التقييم اللاحق Postassessment

اطلب من الطلبة إيجاد مجموع الأعداد الصحيحة الفردية الأولى 1، 2، 3، 4، 5، 6، ...، 15 وعمل قائمة بـ 15 مجاميع مختلفة بعدئذ ليعمد الطلبة إلى بيان استنتاج منطقي حول ذلك.

2. اختر أي عدد صحيح أكبر من 2. والآن صف هذا العدد الصحيح الزوجي بوصفه مجموعة لعددتين أوليين. على سبيل المثال $8 = 3 + 5$ وكذلك $18 = 7 + 11$. كرر هذه العملية مع 25 عدد صحيح زوجي على الأقل قبل إصدار أي استنتاج.

3. ارسم "أي" مثلث، استخدم المنقلة بعناية في تقسيم كل زاوية من زوايا المثلث إلى ثلاثة أقسام متساوية. حدد مواقع نقاط التقاطع المقسمة الثلاثة للزوايا - المتجاورة كما موضح في الشكل الآتي.



شكل (1)

صل بين هذه النقاط الثلاثة، وتلخص المثلث الناتج عنه. اعد هذا الإنشاء ستة مرات، على الأقل، مع مثلثات أخرى قبل أن تخرج بأي استنتاج.

4. ارسم "أي" متوازي أضلاع، أنشئ مثلثاً متساوي الأضلاع - خارجياً على اثنين من الأضلاع المتجاورة، كما مبين أدناه. ثم صل بين الرأسين البعيدين بالمثلثين متساوي الأضلاع، وكذلك الرأس الأبعد لمتوازي الأضلاع. أي نوع من المثلثات تنتج عن هذا الإنشاء؟ قبل أن تخرج باستنتاج محدد، حاول تكرار هذه التجربة مع ستة متوازيات أضلاع مختلفة.

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على برهنة المثال الأخير. شريطة أن يتركوا الأمثلة الثلاثة الأخرى دون محاولة، لأن المثالين 1، 2 لم يبرهن عليهما أبداً، بينما يمتاز برهان 3 بصعوبة كبيرة جداً^(١).

(١) يمكن إيجاد حلين لهذه النظرية في كتاب:

مرصعات الفسيفساء

Tessellations



بعدد $n = 6$. إذا كانت $m > 3$ ، بعدد $n < 6$ ، وبما أن $n > 2$ فإن القيم التي ينبغي اعتبارها هي $n = 3, n = 4, n = 5$. فإذا كانت $n = 3$ بعدد $m = 6$ ؛ وإذا كانت $n = 4$ بعدد $m = 4$. وإذا كانت $n = 5$ ، فإن m لن تكون عددا صحيحا، لذلك فإن الحلول الوحيدة هي: $n = 3, m = 6$ ؛ $n = 4, m = 4$ ؛ $n = 5, m = 3$. ليتم الطلبة باقتراح طرق أخرى مناسبة لتمييز هذه الترصيعات الفسيفسائية $(3^6, 4^4, 6^3)$. استخدم المخططات التوضيحية الآتية لبيان عدم وجود متعدد أضلاع - منتظم آخر يمتلك زاوية داخلية والتي تقسم 360° (شكل 1 و 2).

سيزداد مدى الترصيع بالفسيفساء من خلال التحريات الإضافية الذي ستقوم بإجرائها. ويمكن أن تعد عملية الترصيع، أيضا، بتبسيط نوعين أو أكثر من متعددات الأضلاع المنتظمة سوية، الرأس مع الرأس، وبطريقة ما بحيث أن نفس متعددات الأضلاع، وينقسم الترتيب الحلقي، تحيط بكل رأس. يطلق على هذه الأنواع من الترصيعات صفة "الترصيع الفسيفسائي - شبه المنتظم Semi-Regular Tessellations" والتي لا يزيد فيها على ثلاثة إلى ستة متعددات أضلاع عند كل رأس.

اسأل الطلبة تأمل الترتيب الثلاثي Ternary Arrangement (ثلاثة متعددات أضلاع تشترك بنقطة واحدة كرأس). ونتيجة لكون مجموع الزوايا المحيطة بأي رأس ينبغي أن تكون 360° ، فإن ترتيبها ثلاثتها من متعددات الأضلاع التي أضلاعها n_1, n_2, n_3 ، على التوالي، سيكون ممكنا فقط إذا كان:

$$\left(\frac{n_1 - 2}{n_1} + \frac{n_2 - 2}{n_2} + \frac{n_3 - 2}{n_3} \right) 180^\circ = 360^\circ$$

ومن هذه العلاقة نحصل على:

$$\left(\frac{n_1}{n_1} - \frac{2}{n_1} + \frac{n_2}{n_2} - \frac{2}{n_2} + \frac{n_3}{n_3} - \frac{2}{n_3} \right) 180^\circ = 360^\circ$$

$$1 + 1 + 1 - 2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right) = 2$$

وعليه سيكون،

أهداف الأداء Performance Objectives

1. لديك متعدد الأضلاع منتظم، وسيتقوم كل طالب بتحديد فيما إذا سيرصع مستويا.
2. لديك مجموعة من متعددات أضلاع منتظمة، وسيتقوم كل طالب بتحديد فيما إذا سترصع هذه المتعددات مستويا.

التقييم السابق Preassessment

قبل البدء بهذا الدرس حاول أن توضح للطلبة بأنه عندما يتم ترتيب متعددات الأضلاع سوية لتغطية مستوى من المستويات دون ترك فراغات فيما بينها، أو تراكب بعضها على بعض يطلق على هذا النمط مرصعات الفسيفساء. (أذكر للطلبة بأن نمط تركيب بلاط أرضية الحمام Bathroom يعد من أكثر الأمثلة شيوعا عن مرصعات الفسيفساء). إن الترصيع بالفسيفساء الذي يصنع بصورة كلية من متعددات أضلاع - منتظمة ومتلائمة، والتي تتلاقى مع بعضها دون أن يقع رأس أحدهما على ضلع من أضلاع متعدد آخر، يطلق عليه ترصيع الفسيفساء المنتظم Regular Tessellation.

وضح إلى مدى أبعد بأن شبكة من المثلثات متساوية الأضلاع، ونمط رقعة الداما المؤلف من مجموعة مربعات، ونمط الأشكال السداسية هي الأمثلة الفريدة المتوفرة عن ترصيع الفسيفساء بالأشكال متعددة الأضلاع المنتظمة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لبيان مبررات اقتصار الترصيع بالفسيفساء على الأنماط الثلاثة السابقة، بأسلوب رياضي، أطلب من الصف اقتراح وجود حاجة إلى m من متعددات الأضلاع المنتظمة ملء الفراغ حول نقطة ما (حيث يوجد رأس زوايا متعدد الأضلاع). وإذا افترض الطلبة بأن كل متعدد أضلاع يحتوي على n من الأضلاع، ستكون الزاوية الداخلية لكل متعدد أضلاع تساوي $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$. وعليه $\frac{m(n-2)180^\circ}{n} = 360^\circ$ وأن $m(n-2) = 4n$.

عند أخذ طبيعة المسألة بعين الاعتبار، فإن العديد من الصحيحين m, n ، سيكونان أكبر من 2. إذا كانت $m = 3$ ،

أنه لا يمكن أن تبسط لتغطية المستوى بكامله). ولقد صنعت من تركيبات متباينة من المثلثات، والمربعات، والمسدسات، والمثلثات، والمثلثات.

إن أيًا من الحلول المتبقية يمكن أن تستخدم بوصفها النوع الوحيد من الترتيب في تصميم يغطي مستويًا كاملاً باستثناء 11#، والذي يجب استخدامه مقرونًا مع أشكال أخرى مثل 5# أو 15#. ليقم الطلبة بتأمل ماذا سيحدث في حل 5#. في هذه الحالة يلتقي شكلان تساعيان، ومثلث عند رأس واحد. إن الشكل المبسوط يمكن أن ينشأ عبر وضع التساعيات بعضها قرب بعضها الآخر juxtaposing كما في شكل 3. وستشكل الفراغات المتبقية المثلثات التي تصاحبها.

يمكن أن يلاحظ بأن 7# يتألف من تساعيات، ومثلثات، ومربعات عند كل رأس، فينشأ عن ذلك نمط بالغ التعقيد (شكل 4). إن وضع ثمانينات، بعضها قرب بعضها الآخر (شكل 5) ينشأ عنه 8#. إن المساحات الفارغة توفر المساحات المطلوبة للمربعات.

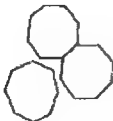
يمكن الحصول على نمطين مختلفين من 12# عبر وضع الأساسيات بعضها قرب بعضها الآخر. وستكون الأساسيات مشتركة بالحافات في إحداها، بينما تكون مشتركة فقط بالرؤوس في الأخرى (شكل 6 وشكل 7). إن المساحات الفارغة ستكون عبارة عن مثلثات، أو أشكال معيَّنة تتكون من أزواج المثلثات. أدع أحد الطلبة إلى تحديد ورسم الحلول المتبقية.

التقييم اللاحق Postassessment

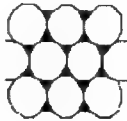
1. أي من الأشكال متعددة الأضلاع - المنتظمة الآتية سوف ترصع مستويًا بالفيوسفات: (أ). مربع، (ب). خماس، (ج). مثلث، (د). سدس.
2. أي من تراكيب متعددة الأضلاع - المنتظمة الآتية سوف ترصع مستويًا بالفيوسفات: (أ). مثلث ومربع، (ب). خماس ومربع، (ج). سدس ومثلث.



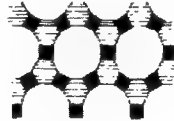
شكل (1)



شكل (2)



شكل (3)



شكل (4)

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

وبنفس الطريقة يستطيع الطلبة إيجاد الشروط الآتية بالنسبة للتراتب المحتملة الأخرى.

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$$

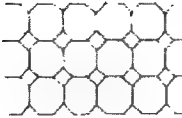
$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} = 2$$

يظهر في الجدول الآتي حلول الأعداد الصحيحة الـ 17 الممكنة والتي ينبغي أن تؤخذ بعين الاعتبار (جدول 1).

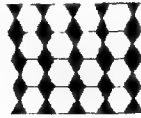
العدد	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
1	3	7	42			
2	3	8	24			
3	3	9	18			
4	3	10	15			
5	3	12	12			
6	4	5	20			
7	4	6	12			
8	4	8	8			
9	5	5	10			
10	6	6	6			
11	3	3	4	12		
12	3	3	6	6		
13	3	4	4	6		
14	4	4	4	4		
15	3	3	3	4	4	
16	3	3	3	3	6	
17	3	3	3	3	3	3

جدول (1)

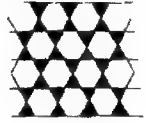
1. (الحلول 10، 14، 17) قد تمت مناقشتها. أما الحلول 1، 2، 3، 4، 5، 6، 9 يمكن إنشاء كل منها عند رأس مفرد بيد



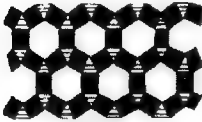
شكل (5)



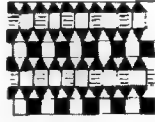
شكل (6)



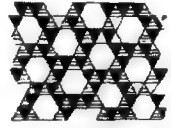
شكل (7)



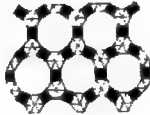
حل 13 #



حل 15 #



حل 16 #



الحلان 11 & 17 #

تقديم نظرية فيثاغورث

Introducing The Pythagorean Theorem

51

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

سهرى الطلبة، فورا، بأن من الممكن تلازم دخول سطح المنضدة خلال الباب فقط إذا تمت إمالة سطحه. ومن أجل هذا، سيكتشف الطلبة حاجتهم إلى تحديد طول وتر المستطيل بضلعيه 6 و 8. في هذه النقطة يجب عليك عرض نظرية فيثاغورث. ويتوفر أكثر من 360 برهان لهذه النظرية، (انظر:

Elisha S. Loomis, The Pythagorean Proposition, National Council of Teachers of Mathematics, Washington D. C. 1968 .

يستطيع المعلم اختيار البرهان الذي يراه مناسباً، ومثيراً للاهتمام بالنسبة لطلبة صفه. ويلاحظ أن بعض البراهين تركز في جزء كبير منها إلى الجبر، بينما يستند بعضها الآخر إلى الهندسة بصورة خالصة.

أعدت هذه الوحدة للطلبة الذين يتلقون مساق الهندسة المنتظمة.

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء مقاييس مناسبة، يستخدم الطلبة نظرية فيثاغورث لحل المسائل الهندسية. وبالإضافة إلى ذلك، يتوقع ازدياد ميل الطلبة نحو نظرية فيثاغورث.

التقييم السابق Preassessment

دع طلبتك الإجابة على السؤال التالي: هل يمكن لسطح طاولة (ممنوعة) مستديرة بقطر 9 أقدام أن تدخل من باب مستطيل الشكل أبعاده 6 أقدام عرضاً و 8 أقدام طولاً؟

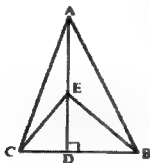
وأن الخطوط المنكسرة قد تم توفيرها لأغراض مناقشة الحلول فحسب.

دع $AB = x$ ، $CD = y$ وأن $OB = R$ (نصف القطر المطلوب لإيجاده). إذن $OD = R - y$ ومن خلال تطبيق نظرية فيثاغورث على $\triangle ODB$

$$(R - y)^2 + \frac{x^2}{4} = R^2, \text{ ومنها } R = \frac{y}{2} + \frac{x^2}{8y}, \text{ ويكون بدلالة قياس المتغيرين } x, y \text{ هو } \frac{x^2}{4y}.$$

ومن خلال نظرة هندسية صارمة، ودقيقة هناك بضعة علاقات مثيرة للاهتمام والتي يمكن البرهنة عليها بتطبيق نظرية فيثاغورث. وقد ترغب بعرض بعضاً من هذه العلاقات على طلبة الصف بوصفها تطبيقات إضافية لهذه النظرية.

1. إذا كانت E هي أية نقطة على الارتفاع \overline{AD} ، بعدئذ $\triangle ACF^2 - (CE)^2 = \triangle AR^2 - (EB)^2$

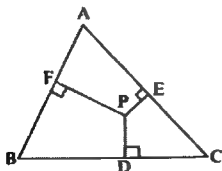


2. إذا كان المستقيمان المتوسطان \overline{BE} و \overline{AD} بالمثلث ABC متعامدان، بعدئذ، $AB = \sqrt{\frac{(AC)^2 + (BC)^2}{5}}$

3. إذا رسم عمود من أي نقطة داخل مثلث إلى أحد أضلاعه، فإن مجموع مربعات قياسات أي قطعة أخرى من الأضلاع التي نجمت عنها، يساوي مجموع مربعات القطع الثلاثة المتبقية.

يعني، في المثلث $\triangle ABC$ أدناه:

$$(BD)^2 + (CE)^2 + (AF)^2 = (DC)^2 + (EA)^2 + (FB)^2$$



بعد اكتمال رحلة البرهنة على نظرية فيثاغورث، سيكون الطالب مهتماً لتطبيق معرفته بالنظرية على بعض المسائل التطبيقية. ولا ريب بأنه يستطيع الآن إيجاد مقدار طول وتر الباب (في المسألة الأصلية) وهو 10 أقدام، وعليه سيستنتج بأن سطح المنضدة سيدخل من فتحة الباب دون أدنى شك.

هناك الكثير من المسائل "التطبيقية" والتي يمكن استخدامها لعرض المزيد من تطبيقات نظرية فيثاغورث. فعلى سبيل المثال، افترض أن طلبتك يرغبون بإيجاد قطر أنبوب. وسيكون كل ما يحتاجون إليه هو وضع مربع قياس النجار Carpenter's Measuring Square كما موضح في الشكل.

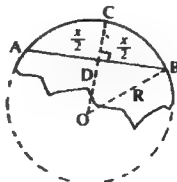
بعدئذ يباشرون بقياس طول x ، وسيكون القطر مساوياً لحوالي $4 \cdot 828x$.

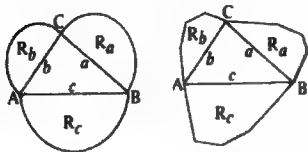
ينبغي أن يطلب من الطلبة، تحليل هذه النتيجة وبيان مورها. إن الخطوط المنكسرة، الظاهرة، في الشكل التوضيحي سوف تساعد على تبرير هذه الحالة. عند تطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم الزاوية، سيظهر:

$$R^2 + R^2 = (R + x)^2, \text{ أو } R = x(1 + \sqrt{2})$$



إن المسألة الأخرى التي يمكن أن تكلف طلبتك بحلها هي إيجاد القطر الأصلي لصفحة مكسورة، حيث يتوفر مقطع من الدائرة فحسب. مرة ثانية، فإن الشكل التوضيحي الآتي سيصف الحالة - أطوال كل من AB ، CD قابلة للقياس،





من علاقة المساحة الأساسية:

$$\frac{R_b}{R_c} = \frac{b^2}{c^2} \quad \text{وكذلك} \quad \frac{R_a}{R_c} = \frac{a^2}{c^2}$$

$$\frac{R_a + R_b}{R_c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}, \quad \text{بعدئذ}$$

ولكن بواسطة نظرية فيثاغورث: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\frac{R_a + R_b}{R_c} = 1 \quad \text{بحيث}$$

$$R_a + R_b = R_c$$

إن الدلالة المثيرة للاهتمام، والتي تكمن بهذا التوسع في نظرية فيثاغورث يجب أن تتألم مزيداً من الضوء لتصبح أكثر وضوحاً. بعدئذ ليجابه الطلبة مزيداً من التوسعات بهذه النظرية. قبل مغادرة المناقشة الهندسية لنظرية فيثاغورث، قد ترغب بأن تعرض على الطلبة كيفية استخدام نقبضها لتحديد فيما إذا كانت زاوية بمثلث ما حادة، أو قائمة، أو منفرجة، إذا توفرت لديك قياسات أضلاع المثلث.

يعني،

إذا كانت $a^2 + b^2 = c^2$ تكون الزاوية $\angle c$ قائمة.

إذا كانت $a^2 + b^2 > c^2$ تكون الزاوية $\angle c$ حادة.

إذا كانت $a^2 + b^2 < c^2$ تكون الزاوية $\angle c$ منفرجة.

ينبغي أن تيرهن هذه العلاقات على إثرائتها، وقائدها الملموسة للطلبة. وبعد معالجة نظرية فيثاغورث واعتبارها من خلال منظور هندسي محكم، فإن من المتع تأمل هذه النظرية عبر أكثر من منظور، ومعالجة نظرية.

إن ثلاثية فيثاغورث التي تكتب بصيغة (a, b, c) ، هي عبارة من مجموعة تتألف من ثلاثة أعداد صحيحة، وموجبة، هي a, b, c ، بحيث يكون $a^2 + b^2 = c^2$. وبالنسبة لأي ثلاثية فيثاغورية (a, b, c) ، وأي أعداد صحيحة موجبة k ، (ka, kb, kc) تعد ثلاثية أيضاً. ينبغي أن يكون طلبتك قادرين على برهنة هذا الأمر.

إن "الثلاثية الفيثاغورية البدائية" Primitive A

4. إذا كانت كل من \overline{AD} ، \overline{BE} ، \overline{CF} مستقيماً متوسطة المثلث $\triangle ABC$.

بعدئذ:

$$(I) \quad \frac{3}{4} [(AB)^2 + (BC)^2 + (CA)^2] \\ = (AD)^2 + (BE)^2 + (CF)^2$$

بعدئذ،

$$(II) \quad 5 (AB)^2 = 4(AE)^2 + (BE)^2$$

إذا كان قياس $\angle C = 90^\circ$.

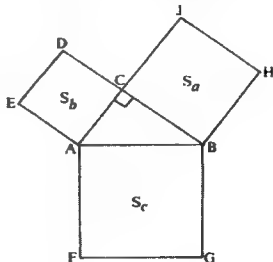
إن الحلول الكاملة لهذه المسائل، ومسائل تحدي من أنواع

أخرى يمكن الحصول عليها في:

Posamentier, Alfred S., and Charles T. Salkind; Challenging Problem In Geometry, (Palo Alto, CA: Seymour, 1988)

بعد أن ينال الطلبة معرفة كافية، ويحكمون السيطرة على هذه النظرية المحتفى بها، سيكونون على استعداد تام لتأمل تعميمها.

لغاية هذه المرحلة الحاسمة لقد تعامل الطلبة مع نظرية فيثاغورث بصيغة $a^2 + b^2 = c^2$ ، حيث تمثل كل من a و b "طولي" كل من ساقي المثلث قائم الزاوية، وتمثل c طول وتر هذا المثلث. ولكن، يمكن لهذه العبارة أن تفسر لكي تعني ما يأتي "مجموع مساحات المربعات المنشأة على ساقي المثلث قائم الزاوية تساوي مساحة المربع المنشأ على الوتر". بالنسبة للمثلث قائم الزاوية الآتي، $(S_a + S_b + S_c)$ (تمثل "مساحة الـ c ").



والآن ليقم الطلبة باستبدال هذه المربعات بأنصاف دوائر وبأقطار \overline{AB} ، \overline{AC} ، \overline{BC} ، أو ليقوموا باستبدال المربعات بأشكال متعددة الأضلاع مقاربة بحيث تكون الأضلاع المتقابلة على أضلاع المثلث ABC.

الثلاثية أن يكون زوجيا ؟. لماذا ينبغي على العضو الزوجي في ثلاثية فيثاغورث البدائية أن يقبل القسمة على 4؟ ماذا سيكون صادقا بعدد m و n بحيث إن العضو الثالث في ثلاثية فيثاغورث البدائية يزيد بمقدار 1 على أحد العضوين الآخرين ؟. لماذا يكون أحد أضلاع ثلاثية فيثاغورث البدائية قابلا للقسمة على 5 دائما؟ ولماذا يكون حاصل ضرب الأعضاء الثلاثة في أي ثلاثية من ثلاثية فيثاغورث البدائية قابلا للقسمة على 60؟.

سيبدأ الطلبة، خلال فترة قصيرة، بجسّ تكافؤ الأعداد والعلاقات الخاصة بثلاثيات فيثاغورث. وسنشأ عن هذا الاهتمام الحقيقي والأصيل تقديم أولي، ومتعمق إلى موضع في نظرية العدد، قد يكون نقطة البداية لبعض الطلبة في البحث والتحري بمبادئ غير مألوفة.

لذا فإن دراسة نظرية فيثاغورث تمتلك أكثر من إمكانية لزيادة مستويات اهتمام الطلبة. ويجب عليك أن تأخذ زمام المبادرة في عرض تقديم لهذه التغييرات على الموضوع. وإذا أحسنت تنفيذ ذلك بدقة، فإن طلبتك سينقلون معهم هذه المحاولة إلى آفاق رحب.

مرجع Reference

Posamentier, A. S., Banks, J. H., and Bannister, R. L., Geometry, Its Elements and Structure, 2nd ed., New York: McGraw – hill, 1977.

Pythagorean Triple هي عبارة عن ثلاثية فيثاغورث التي يكون أول عضوين من أعضائها أعداداً أولية نسبية، أحدهما زوجيا والآخر فرديا.

اعرض ما يأتي:

حيث $a^2 + b^2 = c^2$ (وإن العددين m, n هما عددان طبيعيان وإن $c = m^2 + n^2, b = 2mn, a = m^2 - n^2, (m > n)$.

لتطوير هذه العلاقات انظر:

Sierpinski, W., Pythagorean Triangles, New York, Yeshiva University Press, 1962.

بعد إعداد جدول وفق الآتي، سيبدأ الطلبة بتخمين خصائص m و n التي سينشأ عنها أنواع محددة من ثلاثيات فيثاغورث. وسيبدأ الطلبة، أيضاً، بتقسيم ثلاثيات فيثاغورث إلى مجاميع مختلفة.

m	n	$m^2 - n^2$	$2mn$	$m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	4	9	40	41
3	1	8	6	10
5	2	21	20	29

إن بعض الأسئلة التي يتوقع طرحها هي: ماذا يصح حول m و n لكي تكون (a, b, c) ثلاثية فيثاغورية؟. هل يمكن لـ c في هذه

عودة إلى التقسيم الثلاثي للزوايا

Trisection Revisited

أن يكونوا قد أقتنوا الإنشاءات التي تدرس عادة في هندسة المدارس الثانوية، والبراهين الخاصة بهذه الإنشاءات.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد إكمال عرض، والبرهنة على الإنشاء الآتي، ناقش سبب عدم كونه حلاً للمسألة القديمة الخاصة بتقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية باستخدام الأدوات الاقليدية فحسب. لديك $\angle AOB = x$ والتي قياسها $m \angle AOB = x$.

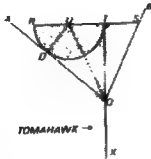
أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتقسيم زاوية محددة إلى ثلاثة أقسام متساوية باستخدام أي من الطرق الأربعة المعروضة.
2. سيبرهن الطلبة على الطرق الأربعة المستخدمة في تقسيم الزوايا إلى ثلاثة أقسام.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يمتلك الطلبة معرفة عملية بمادة الجبر، كما ينبغي

مظهر غريب يطلق عليها فأس التوماهوك Tomahawk (نشرت للمرة الأولى بواسطة Bergery في الطبعة الثالثة من كتاب (Geometrie Appliquee al'Industrie, Metz, 1835).



شكل (2)

لإنشاء فأس التوماهوك، ابداً بقطعة المستقيم \overline{RS} المرسومة إلى ثلاثة أقسام بالنقطتين U و T. ارسم نصف دائرة حول U وينصف قطر مقداره \overline{UT} ، ثم ارسم \overline{TX} عمودياً على RS . أكمل رسم الآلة كما يظهر في الشكل التوضيحي.

لتقسم أي زاوية $\angle AOB$ إلى ثلاثة أقسام متساوية، ضع الأداة على الزاوية بحيث يقع S على \overline{OB} ، ويمر \overline{TX} خلال الرأس O، وتكون نصف الدائرة مماسة لقطعة المستقيم \overline{AO} في نقطة D. بعدئذ، بما أننا نستطيع أن نعرض بسهولة تطابق

$$\triangle ADO \cong \triangle TOU \cong \triangle TOS$$

ويكون لدينا:

$$m\angle DOU = m\angle TOU = m\angle TOS = \frac{1}{3} m\angle AOB$$

إن الإنشاء الثالث يتضمن في النظرية التي اخترعها أرشميدس. ونستخدم فيه المسطرة العدلة، والتي ستؤشر بواسطتها قطعة مستقيم. إن هذا التوسع في أدوات أقليدس سيجعل من التقسيم الثلاثي لبدأ الإقحام Insertion Principle Trisection أمراً ممكناً.

لعرض مبدأ الإقحام Insertion Principle على الطلبة، دعهم يحاولون المسألة الآتية باستخدام أدوات أقليدس.

لديك \overline{MN} مع المنحنيين q و n (بحيث أن أصغر مسافة بين q و n هي $MN \geq$) والنقطة O التي لا تقع على q أو n. أنشئ مستقيماً يمر خلال O ويقطع المنحنيين q و n في النقطتين M_1 و N_1 على التوالي بحيث أن: $M_1N_1 = MN$.

باستثناء بعض الحالات الخاصة، فإن هذه المسألة ستكون مستحيلة باستخدام أدوات أقليدس بمفردها. والآن دع الطلبة يؤشرون قطعة مستقيم على مساطرهم العدلة والتي يكون قياسها مساوياً MN.

$$m\angle ABO_n = \frac{2x}{3} \text{ بحيث أن قياس } \angle AOB_n = \frac{2x}{3}$$



شكل (1)

الإنشاء والبرهان Construction and Proof

1. أنشئ \overline{OB}_1 ، منتصف الزاوية $\angle AOB_0$

$$\text{وبعدئذ } m\angle AOB_1 = x - \frac{1}{2}x$$

2. أنشئ \overline{OB}_2 ، منتصف الزاوية $\angle B_1OB_0$

$$\text{وبعدئذ } m\angle AOB_2 = x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x$$

3. أنشئ \overline{OB}_3 ، منتصف الزاوية $\angle B_2OB_1$

وبعدئذ

$$m\angle AOB_3 = x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x$$

4. أنشئ \overline{OB}_4 ، منتصف الزاوية $\angle B_3OB_2$ وبعدئذ

$$m\angle ABO_4 = x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x$$

5. بالاستمرار على هذا النوال سوف نصل إلى

$$m\angle ABO_n = x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x + \dots \pm \left(\frac{1}{2}\right)^n x$$

بعدها سنقرب في $\left(\frac{1}{2}\right)$ للحصول على $\left(\frac{1}{2}\right) m\angle AOB_n$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}x + \dots \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x$$

والآن سنقوم بإضافة المعادلة الثانية إلى الأولى لتحصل على:

$$\left(\frac{3}{2}\right) m\angle AOB_n = x \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x$$

$$m\angle AOB_n = \frac{2x}{3} \left[1 \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

6. سنلاحظ الآن بأنه مع ازدياد قيمة n باتجاه اللانهاية (والتي

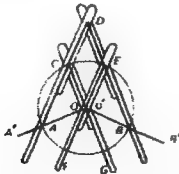
تقابل إجراء عدد غير متناهي من عمليات الإنشاء) فإن الحد

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ سوف يقترب من الصفر، وبعدئذ سيقرب قياس

الزاوية $m\angle AOB_n$ من $\frac{2x}{3}$.

إن الإنشاء الثاني يضيف إلى الأدوات الاقليدية آلة ذات

3. المثلثان $\triangle OBC$ ، $\triangle OCD$ هما مثلثان متساوي الساقين.
4. وعليه، فإن قياس $m \angle DOC = m \angle CDO = x$ وأن $m \angle OCB = m \angle OBC = y$.
5. بما أن $\angle OCB$ هي الزاوية الخارجية بالمثلث $\triangle OCD$ ، فإن $m \angle OCB = m \angle DOC + m \angle CDO = 2x$ أو $y = 2x$.
6. بنفس الطريقة، بما أن $\angle AOB$ هي الزاوية الخارجية بالمثلث $\triangle OBD$ ، $m \angle AOB = m \angle ADB + m \angle OBD = x + 2x = 3x$.
7. إننا، $\frac{1}{3} m \angle AOB = m \angle ADB$ ، تستثمر طريقة سيفا Ceva Method للتتبع الثلاثي (الأخيرة في هذه الوحدة) آلة تتألف من أربعة مساطر عدلة متصلة مع بعضها Hinged.
- وفي الشكل التوضيحي لسلسلة قضبان سيفا، تمثل النقاط C، D، E، O محاور بحيث أن الشكل CDEO سيكون عبارة عن معين.
- لتقسيم الزاوية المحددة $A' O' B'$ ثلاثة أقسام متساوية ينبغي على المرء أن يبدأ أولاً برسم دائرة حول الرأس O' وينصف قطر يساوي طول ضلع المعين CDEO. وتوضع بعد ذلك آلة سيفا على الزاوية بحيث أن النقطتين O، O' تكونان متطابقتين. ويتم تعديلها، بعدئذ، لحيث مرور \overline{DC} ، و \overline{DE} خلال النقاط حيث يقطع المستقيمان $\overline{OA'}$ و $\overline{OB'}$ الدائرة عند النقطتين A، B على التوالي. بعدئذ، $m \angle AOF = m \angle FOG = m \angle GOB = (\frac{1}{3}) m \angle AOB$.

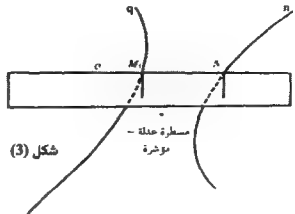


شكل (5)

يستخدم البرهان المعين CDEO للحصول على:

$$m \angle ACG = m \angle COE = m \angle FEB = m \angle CDE = x$$

بعدئذ، $m \angle FOG = x$. وبملاحظة أن النقطتين C، E تقعان على الدائرة، سيكون لدينا الزاويتان $\angle ACG$ ، $\angle FEB$ اللتان تحيط بهما الدائرة. وبعدئذ،



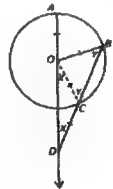
لقد أصبح، الآن، من السهل تثبيت المسطرة العادلة لحيث أن ترسم مستقيماً خلال النقطة O وبمسافة بين نقطتي التقاطع تساوي MN.

والآن سيكون الطلبة على أهبة الاستعداد بالنسبة للتقسيم الثلاثي لبدأ الإحكام.

لديك الدائرة O بالزاوية المركزية $\angle AOB$.

أنشئ $\angle ADB$ بحيث يكون قياسها

$$m \angle ADB = \frac{1}{3} m \angle AOB$$



شكل (4)

الإنشاء Construction

1. أرسم \overline{OA} .
2. عين حدود \overline{OA} على مسطرة عدلة.
3. باستخدام مبدأ الإحكام أرسم \overline{BD} بحيث تكون D على \overline{OA} وأن \overline{BD} يقطع الدائرة O عند النقطة C مع $\overline{AO} \equiv \overline{CD}$. بعدئذ، $\frac{1}{3} m \angle AOB = m \angle ADB$.

البرهان Proof

1. أرسم \overline{OC} .
2. بواسطة الإنشاء $\overline{AO} \equiv \overline{BO} \equiv \overline{CO} \equiv \overline{DC}$ (نظراً لأن الثلاثة الأولى هي أنصاف أقطار الدائرة O، وأن الأخير قد أنشئ ليكون متطابقاً مع \overline{AO}).

ويبدو واضحاً بأن:

$$m\angle AOF = m\angle FOG = m\angle GOB = \frac{1}{3} m\angle AOB.$$

التقييم اللاحق POSTASSESSMENT

1. برهن صلاحية طريقة تثليث فاس التوماهورك.
2. قم بتقسيم أية زاوية اختيارية إلى ثلاثة أقسام متساوية باستخدام أي طريقتين من الطرق التي عرضت في هذه الوحدة.

$$m\angle ACG = x = \frac{1}{2} m\angle AOG$$

وأن:

$$m\angle FEB = x = \frac{1}{2} m\angle FOB$$

والتي ستعطينا $2x = m\angle AOG$ ، وكذلك:

$$2x = m\angle FOB.$$

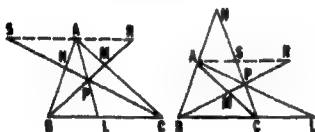
البرهنة على تلاقي المستقيمات في نقطة واحدة

Provina Lines Concurrent

نشرت هذه النظرية للمرة الأولى في عام 1678 بواسطة الرياضي الإيطالي جيوفاني سيفا، وقد نصت على ما يأتي:

رسمت ثلاثة مستقيمات من الرؤوس A، B، C بالمثلث ΔABC ، فالتقت الأضلاع المقابلة في النقاط L، M، N، على التوالي، ستلتقي في نقطة واحدة إذا، فقط إذا:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$



ملاحظة Note: هناك حالتان: المستقيمات الثلاثة تلتقي داخل المثلث أو خارجه.

قبل تطبيق هذه النظرية على المسائل المطروحة مبكراً، فإن من الحكمة أن تبرهن النظرية.

المعطي: المثلث ΔABC ، والنقطة N على \overline{AB} ، و M على \overline{AC} ، و L على \overline{BC} ، وكذلك يلتقي كل من \overline{AL} ، و \overline{BM} ، و \overline{CN} في نقطة واحدة P.

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \quad \text{برهن Prove}$$

ستعرض هذه اللحظة على الطلبة نظرية، والتي ستكون ذات أهمية بالغة في بعض الحالات عند البرهنة على تلاقي المستقيمات في نقطة واحدة.

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء مسائل مناسبة، سيعمد الطلبة إلى تطبيق نظرية سيفا Ceva Theorem للبرهنة على تلاقي المستقيمات في نقطة واحدة.

التقييم السابق Preassessment

ليتم الطلبة بمحاولة برهنة أي مما يأتي:

1. برهن على أن المستقيمات المتوسطة المثلث تلتقي في نقطة واحدة.
2. برهن أن منصفات زوايا المثلث تلتقي في نقطة واحدة.
3. برهن أن ارتفاعات المثلث تلتقي في نقطة واحدة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن طالباً يرتقي مستواه بالهندسة فوق حد الوسط، ويتوفر لديه وقت كاف، ينبغي أن يكون قادراً على برهنة بعض هذه النظريات.

يجب أن يلاحظ بأن البراهين التي يحاول الطلبة عليها (تركيبياً) هي الأكثر صعوبة، وتعيدنا في مساق الهندسة بالمدارس الثانوية. إن تحدي الطلبة بهذه المسائل بالغة الصعوبة سيحدد المرحلة بالنسبة لتقديم النظرية التي ستوفر فرصة لحل هذه المسائل بصورة بالغة السهولة.

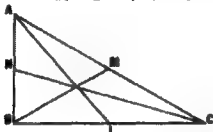
وعليه سيكون، $\frac{AN'}{N'B} = \frac{AN}{NB}$ ، مما يؤكد تطابق النقطتين N،

N'، وعليه فإن المستقيمتان الثلاثة تلتقي في نقطة واحدة.

ينبغي أن يكون الطلبة، الآن، جاهزين لتطبيق نظرية سيفا على المسائل الثلاثة التي طرحتم مكرراً.

1. برهن على أن المستقيمتان المتوسطة في مثلث تلتقي فلال نقطة واحدة.

البرهان Proof: في المثلث $\triangle EBC$ ، \overline{CN} ، \overline{BM} ، \overline{AL} هي مستقيمتان متوسطة (انظر الشكل التام).



وعليه فإن $AN = NB$ ، و $BL = LC$ ، و $CM = MA$ وبضرب هذه العلاقات نحصل:

$$(AN) \cdot (BL) \cdot (CM) = (NB) \cdot (LC) \cdot (MA)$$

$$\text{أو } \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

إذن بواسطة نظرية سيفا كل من \overline{AL} ، و \overline{BM} ، و \overline{CN} مستقيمتان تلتقي في نقطة واحدة.

2. برهن بأن منصفات زوايا المثلث تلتقي في نقطة واحدة.

البرهان Proof:

في المثلث $\triangle ABC$ ، \overline{CN} ، \overline{BM} ، \overline{AL} هي منصفات داخلية لزوايا المثلث (انظر الشكل التام).



بما أن منصف زاوية مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين تتناسب بنسبة الضلعين الآخرين بالمثلث، فإنها نستطيع ما يأتي:

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{CM}{MA} = \frac{BC}{BA}$$

بعدئذ وباستخدام الضرب:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} = 1$$

إذن بواسطة نظرية سيفا فإن منصفات الزوايا الثلاثة في مثلث تلتقي في نقطة واحدة.

البرهان Proof:

ارسم مستقيماً يمر بالنقطة A، موازياً لـ \overline{BC} ويلتقي \overline{CP} في النقطة S و \overline{BP} بالنقطة R.

$$\triangle AMR \sim \triangle CMB$$

وعليه،

$$(I) \dots \frac{AM}{MC} = \frac{AR}{CB}$$

$$\triangle BNC \sim \triangle ANS$$

وعليه،

$$(II) \dots \frac{BN}{NA} = \frac{CB}{SA}$$

$$\triangle CLP \sim \triangle SAP$$

وعليه،

$$(III) \dots \frac{CL}{SA} = \frac{LP}{AP}$$

$$\triangle BLP \sim \triangle RAP$$

وعليه،

$$(IV) \dots \frac{BL}{RA} = \frac{LP}{AP}$$

من المعادلتين (III) و (IV) سنحصل على $\frac{CL}{SA} = \frac{BL}{RA}$ أو

$$(V) \dots \frac{CL}{BL} = \frac{SA}{RA}$$

والآن بضرب (I)، و (II)، و (V) ينتج:

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AR}{CB} \cdot \frac{CB}{SA} \cdot \frac{SA}{RA} = 1$$

وبما أن نظرية سيفا تمتاز بكونها ثنائية الشروط Biconditional، فإن من الضروري أن نبرهن نقيض القضية التي أكلنا البرهنة عليها. الآن.

المعطى Given: المثلث ABC والنقطة N على \overline{AB} ، و M،

على \overline{AC} ، و L على \overline{BC} ، وكذلك $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$

برهن Proof: النقطة \overline{AL} ، و \overline{BM} ، و \overline{CN} في نقطة واحدة.

البرهان Poof:

لنفرض التقاء كل من \overline{AL} و \overline{BM} في النقطة P. وافترض

التقاء \overline{CP} و \overline{AB} في N'. بما أن \overline{AL} ، و \overline{BM} ، و \overline{CN} هي

مستقيمتان تلتقي في نقطة واحدة، وباستخدام قسم من نظرية

سيفا التي برهننا على صحتها لاحقاً حصلنا على:

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN'}{N'B} = 1$$

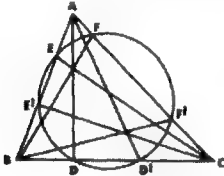
$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$$

ولكن المعطى هو

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليمستخدم الطلبة نظرية سيفا للبرهنة على أنه عندما تكون النقاط P، Q، و R على الأضلاع \overline{AB} ، \overline{AC} ، \overline{BC} ، على التوالي بالمثلث ABC، وعندما يكون $\frac{AQ}{QC} = \frac{BR}{RC} = 2$ وأن $AP = PB$ سينشأ عن ذلك بأن \overline{CP} ، \overline{BQ} ، \overline{AR} تلتقي في نقطة واحدة.

2. يقطع المثلث ABC دائرة في النقاط E، E'، D، D'، F، F' (أنظر الشكل الآتي). برهن أنه في حالة التقاء \overline{CE} ، \overline{BF} ، \overline{AD} في نقطة واحدة، بعدئذ ستلتقي المستقيمات $\overline{CE'}$ ، $\overline{BF'}$ ، $\overline{AD'}$ في نقطة واحدة أيضاً.

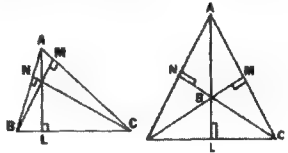


مرجع Reference

Posamentier, A-S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing – 2002.

3. برهن أن ارتفاعات المثلث تلتقي في نقطة واحدة.

البرهان Proof: في المثلث ABC، تمثل \overline{CN} ، \overline{BM} ، \overline{AL} الارتفاعات بالنسبة للأضلاع الثلاثة (أنظر الشكلين التاليين).



$$\triangle ANC \sim \triangle AMB \quad \frac{AN}{MA} = \frac{AC}{AB}$$

$$\triangle BLA \sim \triangle BNC \quad \frac{BL}{NB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\triangle CMB \sim \triangle CLA \quad \frac{CM}{LC} = \frac{BC}{AC}$$

بضرب هذه النسب الثلاثة، نحصل على:

$$\frac{AN}{MA} \cdot \frac{BL}{NB} \cdot \frac{CM}{LC} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = 1$$

إن بواسطة نظرية سيفا فإن الارتفاعات تلتقي في نقطة واحدة.

هذه هي بعض التطبيقات الأكثر بساطة حول نظرية سيفا. إن أحد المراجع الذي يمهّد الحصول على تطبيقات إضافية لهذه النظرية هو:

Challenging Problems in Geometry, Vol II, by A. S. Posamentier and C. T. Salkind, Macmillan, 1970.

مربعات



Squares

للمربع، وإن تكون لديهم خبرة مبكرة في البرهنة على أن الأشكال رباعية الأضلاع تكون مربعات.

استراتيجيات التعليم Teaching strategies

ليقم الطلبة بإنشاء مربع خارجي على كل ضلع من أضلاع متوازي أضلاع (انظر الشكل الآتي). وليقوموا بتحديد مركز كل مربع يرسم قطريه. اسأل طلبة الصف عن ماهية الشكل الذي يعتقدون الحصول عليه عندما سيعمدون إلى وصل مراكز المربعات

ستعمل هذه الوحدة على تعميق، وتقوية مهارات الطالب في البرهنة على أن الأشكال الرباعية تكون مربعات، بالإضافة إلى معاودة مراجعة موضوع الالتقاء عند نقطة واحدة.

هدف الأداء Performance Objective

سيوضح الطلبة طريقة للبرهنة على التطابق.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالخصائص المختلفة

بما أن $\angle DQR \equiv \angle AQP$ ، $\angle RDQ \equiv \angle PAQ$ ، عليه فإن $\angle PQR \equiv \angle DQA$ (بالإضافة).

وبما أن $\angle DQA \equiv \angle PQR$ قائمة، $\angle PQR \equiv \angle PQR$ قائمة، وأن الشكل PQRS هو مربع.

إن رسم الشكل السابق بعناية سوف يظهر بوضوح التقاء قطري المربع PQRS، وقطري متوازي الأضلاع ABCD في نقطة واحدة. إن هذا البرهان يستحق اهتماما من نوع خاص نظرا لأنه يوضح المهارة المناسبة على الدوام، وهي الالتقاء عند نقطة واحدة. للبرهنة على أن قطري المربع PQRS تلقي بنقطة واحدة مع قطري متوازي الأضلاع ABCD، ينبغي أن نبرهن أن قطري المربع، وقطري متوازي الأضلاع ينصف بعضهما الآخر. بعبارة أخرى، سنبرهن بأن قطري المربع، وقطري متوازي الأضلاع يشتركان بنفس نقطة المنتصف (يعني، النقطة O).

$$\angle BAC \equiv \angle ACD, m\angle PAB = m\angle RCD = 45^\circ$$

وعليه ستكون $\angle RCA \equiv \angle PAC$.

بما أن $\angle COR \equiv \angle AOP$ وأن $AP = CR$ ،

$$\triangle AOP \equiv \triangle COR \text{ (SAA)}.$$

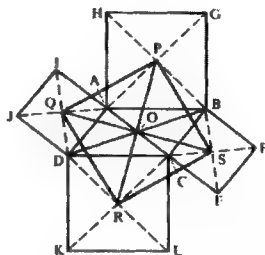
إن، $AO = CO$ وكذلك $PO = RO$.

بما أن \overline{DB} يمر خلال نقطة منتصف \overline{AC} (الأقطار تنصف بعضها الآخر)، وبفرض الطريقة، \overline{QS} يمر خلال نقطة منتصف \overline{PR} ، وكذلك بما أن \overline{PR} ، \overline{AC} يشتركان بنفس النقطة (يعني النقطة O) فقد عرضنا التقاء المستقيمتين \overline{QS} ، \overline{DB} ، \overline{PR} ، \overline{AC} تلقي في نقطة واحدة (يعني، أن جميعها تمر خلال النقطة O).

التقييم اللاحق Postassessment

أسأل الطلبة توضيح طريقة البرهنة على أن المستقيمتين تلقي في نقطة واحدة. من المتوقع أنهم سيعمدون إلى بيان الطريقة التي استخدمت خلال هذا الدرس.

التجاورة. إن الفضول القطري الذي يقيم في نقوسهم سيكون دافعا كافيا لتحفيزهم على محاولة البرهنة بأن الشكل PQRS هو مربع.



البرهان Proof:

ABCD هو متوازي أضلاع، النقاط P، Q، R، S هي مراكز المربعات الأربعة: ABGH، DAJI، DCLK، CBFE، على التوالي. $AQ = QD$ ، $PA = DR$ (كل منهم هو نصف قطعة قطر مربع).

الزاوية $\angle ADC$ هي زاوية مكمل للزاوية $\angle DAB$ ، والزاوية $\angle IAH$ هي زاوية مكمل للزاوية $\angle DAB$ (نظرا لأن الزاويتين $\angle IAH$ و $\angle HAB$ هما زاويتان قائمتان). وعليه $\angle ADC \equiv \angle IAH$.

بما أن:

$$m\angle RDC = m\angle QDA = m\angle HAP = m\angle QAI = 45^\circ$$

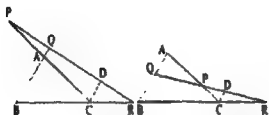
$\angle RDQ \equiv \angle QAP$ (SAS) إذن $\angle RDQ \equiv \angle QAP$ و $QR = QP$ وبفرض الأسلوب، يمكن البرهنة على أن:

$$QP = PS, PS = RS.$$

وعليه فإن الشكل PQRS هو مربع.

برهنة تسامت (استقامة) النقاط

Proving Points Collinear



بما أن $\frac{DC}{QB} = \frac{RC}{BR}$ ، $\triangle DCR \sim \triangle QBR$ أو

$$(a) \dots DC = \frac{(QB)(RC)}{BR}$$

بنفس الطريقة، بما أن $\frac{DC}{AQ} = \frac{CP}{PA}$ ، $\triangle PDC \sim \triangle PQA$ ، أو :

$$(b) \dots DC = \frac{(AQ)(CP)}{PA}$$

من المعادلتين (a)، (b) نحصل على :

$$\frac{(QB)(RC)}{BR} = \frac{(AQ)(CP)}{PA}$$

$$(QB)(RC)(PA) = (AQ)(CP)(BR)$$

وعليه فإن ،

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

والذي يؤشر بأن

القسم الثاني **Part II**: يتضمن برهنة نقض القضية التي

برهنت في القسم الأول نظرا لأن هذه النظرية ثنائية الشرط

البرهان **Proof**: في الأشكال السابقة، ليلتق المستقيم المار

بالنقطتين R، Q المستقيم AC في P'. بعدد وبواسطة النظرية

التي تمت النظرية عليها قبل قليل :

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP'}{PA} = 1$$

ولكن بالفرضية ،

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

وعليه فإن $\frac{CP'}{PA} = \frac{CP}{PA}$ وينبغي أن تتطابق النقطتان P'، P.

في هذه النقطة، يجب أن يكون الطالب متأهبا لتطبيق نظرية

مينيلاوس على المسألة التي عرضت في التقييم السابق.

المعطى: المثلث $\triangle ABC$ ، حيث أن كل من \overline{CN} ، \overline{BM} هما

المنصفان الداخليان للزاويتين، وأن \overline{AL} ينصف الزاوية

الخارجية بالنقطة A.

ستعرض هذه الوحدة للطلبة النظرية التي تعد ذات أهمية بالغة في بعض الحالات، عندما يراد البرهنة على تسامت النقاط

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء مسائل مناسبة سيعمد الطلبة إلى تطبيق نظرية مينيلاوس Menelaus' Theorem للبرهنة على تسامت النقاط

التقييم السابق Preassessment

ليحاول الطلبة البرهنة على أن منصفي الزاويتين الداخليتين يمثلان متساوي الساقين، ومنصف الزاوية الخارجية للزاوية الثالثة يلتقون مع الأضلاع المقابلة في ثلاثة نقاط متسامتة (على استقامة واحدة).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن الطالب المتوسط بهندسة المدارس الثانوية لم يتلق تدريبا كافيا، أو لا يكون مجهزا على برهنة تسامت النقاط إذن، في معظم الحالات سوف تجد أن مسألة التقييم السابق تقع بعيدا عن متناول قابلية الطالب.

ولكن هذه الوحدة سوف تزودك باهتمام كاف من الطالب لكي تعرض له النظرية التي ستوفر حلا سهلا للمسألة.

نسبت هذه النظرية بالأساس إلى مينيلاوس بالإسكندرية (حوالي 100 بعد الميلاد)، وتتماز بفائدة خاصة في مضمار البرهنة على تسامت النقاط تنص النظرية على: أن النقاط P، Q، و R على الأضلاع \overline{BC} ، \overline{AB} ، \overline{AC} بالمثلث $\triangle ABC$ تكون متسامتة إذا و فقط إذا:

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

إن هذا البرهان يتألف من قسمين (ثنائي الشرط).

القسم الأول **Part I**: البرهنة على أن :

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

البرهان **Proof**:

النقاط P، Q، و R هي نقاط متسامتة. تأمل المستقيم المار

بالنقطة C، موازيا لـ \overline{AB} ، وليلتقي \overline{PQR} عند النقطة D.

ولكن :

$$(II)..... (BQ)^2 = (AQ)(CQ)$$

بتعويض (II) في (I) ينتج :

$$(III)..... \frac{AQ}{CQ} = \frac{(BA)^2}{(BC)^2}$$

بنفس الطريقة ،

$$m \angle BCR = \frac{1}{2} m \widehat{BC} = m \angle BAC$$

وعليه ، $\Delta ARC \sim \Delta CRB$ وان $\frac{CR}{AR} = \frac{BC}{AC}$ ، أو

$$(IV)..... \frac{(CR)^2}{(AR)^2} = \frac{(BC)^2}{(AC)^2}$$

ولكن :

$$(V).... (CR)^2 = (AR)(RB)$$

بتعويض (IV) في (V) ينتج :

$$(VI).... \frac{RB}{AR} = \frac{(BC)^2}{(AC)^2}$$

ينبغي أن يكلف الطلبة الآن باستخدام نفس الأسلوب للبرهنة أن $\Delta ABP \sim \Delta CAP$ ، وإنا بنفس الطريقة سنحصل على :

$$(VII).... \frac{PC}{BP} = \frac{(AC)^2}{(BA)^2}$$

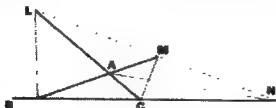
والآن بضرب هذه النسب (يعني ، (III) ، و (VI) ، و (VII)) سينتج :

$$\frac{AQ}{CQ} \cdot \frac{RB}{AR} \cdot \frac{PC}{BP} = \frac{(BA)^2}{(BC)^2} \cdot \frac{(BC)^2}{(AC)^2} \cdot \frac{(AC)^2}{(BA)^2} = 1$$

إن ، بواسطة نظرية مينلاوس ، فإن النقاط P ، Q ، و R هي نقاط متسامة (على استقامة واحدة) .

التقييم اللاحق Postassessment

ليستخدم الطلبة نظرية مينلاوس في البرهنة على أن المنصفات الخارجية للزاوية بأي مثلث غير متساوي الساقين تلقي الأضلاع المقابلة في ثلاثة نقاط متسامة. إن الشكل الآتي سيكون مفيداً لحل المسألة .

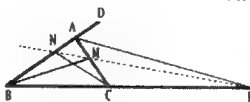


مرجع Reference

- Posamentier, A. S., and C.T.Salkind, Challenging Problems in Geometry, New York: Dove, 1996
Posamentier, A. S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

برهن: النقاط N و M و L هي نقاط متسامة (على استقامة واحدة) .

ليعمد الطلبة إلى استذكار نظرية التناسب المهمة حول منصفات زوايا المثلث .



البرهان **Proof**: بما أن \overline{BM} ينصف الزاوية $\angle ABC$ ،

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{CL}{BL} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

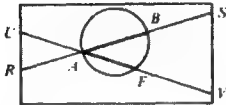
$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

56

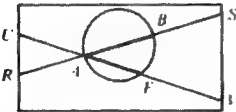
قياس الزاوية بواسطة دائرة

Angle Measurement with a Circle



$$m \angle BFA = \frac{1}{2} m \widehat{BF}$$

والآن ليعمل الطلبة على انزلاق الدائرة إلى الموقع المبين أدناه، حيث يكون شعاعي الزاوية $\angle BAF$ موازيين، على التوالي، لشعاعي "سلك الزاوية"، $\angle NMQ$ ، وحيث تكون الزاوية مماسة لـ \widehat{UQV} عند النقطة M.



ينبغي أن يدرك الطلبة بأن $m \widehat{FM} = m \widehat{AM}$ ، وأن $m \widehat{AM} = m \widehat{BN}$ (بسبب المستقيمتين المتوازيين). وعليه $m \widehat{FM} = m \widehat{BN}$ بما أن $m \angle NMQ = m \angle BAF$ وان:

$$\begin{aligned} m \angle BAF &= \frac{1}{2} m \widehat{BF} = \frac{1}{2} (m \widehat{BN} + m \widehat{NF}) \\ &= \frac{1}{2} (m \widehat{FM} + m \widehat{NF}) = \frac{1}{2} m \widehat{MN} \\ m \angle NMQ &= \frac{1}{2} m \widehat{MN} \end{aligned}$$

إن هذا يبرهن على أن نظرية "قياس الزاوية التي تنشأ بالماس ووتر زاوية يساوي نصف قياس قوسها المتقاطع".

والآن ليعمل الطلبة على انزلاق الدائرة إلى الموقع حيث يقع رأس زاوية السلك على AF، وحيث يكون $AB \parallel RS$.

ستعرض هذه الوحدة طريقة غير تقليدية، لحد ما، لتطوير النظريات حول قياس الزاوية بواسطة دائرة، والتي تعالج عامة في المرحلة العاشرة من منهج الهندسة.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء مواد مناسبة، سيقوم الطلبة بتوليد نظريات متعددة لقياس الزاوية بالأسلوب الذي عرض في هذه الوحدة.
2. إعطاء مسائل تتطلب استخدام النظريات التي توفقت في هذه الوحدة، وسيصبح الطلبة قادرين على حل هذه المسائل بنجاح.

التقييم السابق Preassessment

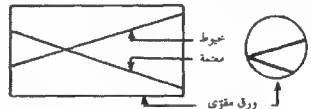
ينبغي أن يمتلك الطلبة معرفة كافية بالزاوية المحاطة وعلاقة قياسها بقوسها المتقاطع.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بالإضافة إلى استخدام مواد الصف التقليدية، ينبغي أن تهيئ ما يأتي:

أ. قطعة ورق مقوى بقطعتين ملونتين بلون غامق وبسلك مثبت، مكونا زاوية بمقاس مناسب.

ب. بدائرة من ورق مقوى وبزاوية محاطة متطابقة "بزاوية السلك Strings Angle".

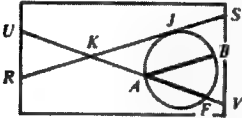


إن من الأفضل بالتمهية لكل طالب أن يقوم بإعداد مجموعته الخاصة من هذه المواد لكي ينجز الأنشطة الآتية بمفرده.

حاول أن تنشط ذاكرة طلبتك ليسترجعوا ما يستقر بها من معلومات حول علاقة الزاوية المحاطة بدائرة مع قوسها المتقاطع. وليمم الطلبة بوضع الدائرة تحت الأسلاك بحيث إن الزاويتين تتطابقان.

والذي يبرهن النظرية التي تنص على أن "قياس الزاوية التي نشأت عن قاطعين يتقاطعان في نقطة خارج دائرة يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المتقاطعين".

إن الموقع التالي للدائرة سوف يمكن الطلبة من تأمل الزاوية التي نشأت عن مماس، وقاطع يتقاطعان خارج دائرة. ليعمل الطلبة على انزلاق الدائرة إلى الموقع المبين في الشكل التوضيحي الآتي.



هنا $\overline{AB} \parallel \overline{KJS}$ وأن \overline{AF} في \overline{KV} وأن الدائرة تمس \overline{KS} في J.

نظراً لأن $\widehat{JA} = \widehat{JB}$ ، $\overline{AB} \parallel \overline{KJS}$ ، وأن:

$$m\angle BAF = m\angle JKF.$$

ومنذ الآن سيكون الطلبة قادرين على إصدار ما يأتي، وبدون صعوبة كبيرة:

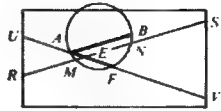
$$\begin{aligned} m\angle BAF &= \frac{1}{2} m\widehat{BF} = \frac{1}{2} (m\widehat{BF} + m\widehat{JB} - m\widehat{JB}) \\ &= \frac{1}{2} (m\widehat{BF} + m\widehat{JB} - m\widehat{JA}) \\ &= \frac{1}{2} (m\widehat{JBF} - m\widehat{JA}). \end{aligned}$$

بمدها ينبغي أن يستنتجوا بأن :

$$m\angle JKF = \frac{1}{2} (m\widehat{JBF} - m\widehat{JA})$$

والذي يبرهن النظرية التي تنص على أن "قياس الزاوية التي نشأت عن قاطع، ومماس لدائرة، بحيث يتقاطعان في نقطة خارج الدائرة يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المتقاطعين".

إن النوع الأخير من الزاوية التي ستؤخذ بعين الاعتبار هي تلك التي تنشأ من مماسين. ولغرض إنشاء هذه الزاوية ينبغي أن توضع الدائرة بتماس مع كل من السلكين، وبحيث أن كلا منهما يوازي أحد شعاعي الزاوية في الدائرة.



ومرة ثانية بسبب وجود الخطوط المتوازية في هذا المكان

$$m\angle BAF = m\widehat{AB} = m\widehat{BN} \quad (\overline{AB} \parallel \overline{MN}) \quad \text{وأن}$$

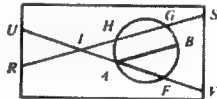
$m\angle NEF$. والآن، ينبغي أن يلاحظ الطالب بأن:

$$m\angle BAF = \frac{1}{2} m\widehat{BF} = \frac{1}{2} (m\widehat{BN} + m\widehat{NF}) = \frac{1}{2} (m\widehat{AM} + m\widehat{NF})$$

ويستطيع الطلبة استنتاج بأن:

$$m\angle NEF = \frac{1}{2} (m\widehat{AM} + m\widehat{NF}).$$

إن هذا الأمر يبرهن النظرية التي تنص على أن "قياس الزاوية الناتجة عن وترين يلتقيان عند نقطة داخل دائرة يساوي نصف مجموع قياس الأوتار المتقاطعة بالزاوية وزاويتيها الممودة". ولتأمل النوع الثاني من الزاوية، ادع الطلبة إلى انزلاق الدائرة للموقع الموضح أدناه، حيث تبدو زاوية السلك، الآن، بوصفها تلك الزاوية التي نشأت عن قاطعين.



في هذا الموقع الجديد، $\overline{GT} \parallel \overline{AB}$ وأن \overline{AF} في \overline{IF} . ونتيجة

لكون $m\widehat{BG} = m\widehat{HA}$ ، $\overline{GT} \parallel \overline{AB}$ ، وأن:

$$m\angle BAF = m\angle GIF.$$

ليتبع الطلبة للمرة الثانية الاستدلال القائل بأن :

$$\begin{aligned} m\angle BAF &= \frac{1}{2} m\widehat{BF} \\ m\angle BAF &= \frac{1}{2} (m\widehat{BF} + m\widehat{BG} - m\widehat{BG}) \\ &= \frac{1}{2} (m\widehat{BF} + m\widehat{BG} - m\widehat{HA}) \\ &= \frac{1}{2} (m\widehat{GBF} - m\widehat{HA}) \end{aligned}$$

والآن يستطيع الطلبة استنتاج بأن :

$$m\angle GIF = \frac{1}{2} (m\widehat{GBF} - m\widehat{HA})$$

يوجد الدائرة في الموقع أعلاه سيكون $\overline{AB} \parallel \overline{LJ}$ ، وأن

$\overline{AF} \parallel \overline{LMV}$. والآن لن يكون الطلبة قادرين على إكمال هذا

البرهان بصورة مستقلة. وينبغي أن يستدلون على أن

$m \angle JB = m \angle JA$ ، وكذلك $m \angle MF = m \angle MA$ ، وكذلك

$m \angle BAF = m \angle JLM$. وعليه فإن :

$$\begin{aligned} m \angle BAF &= \frac{1}{2} m \widehat{BF} \\ &= \frac{1}{2} (m \widehat{BF} + m \widehat{JB} + m \widehat{MF} - m \widehat{JB} - m \widehat{MF}) \\ &= \frac{1}{2} (m \widehat{BF} + m \widehat{JB} + m \widehat{MF} - m \widehat{JA} - m \widehat{MA}) \\ &= \frac{1}{2} (m \widehat{JMB} - m \widehat{JAM}) . \end{aligned}$$

إذن :

$$m \angle JLM = \frac{1}{2} (m \widehat{JBM} - m \widehat{JAM})$$

والذي يبرهن النظرية التي تنص على أن "قياس الزاوية التي نشأت عن مماسين، تساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المتقاطعين".

لاختصار هذا العرض اجعل الطلبة يدركون بأن :

(1) قياس الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة يساوي نصف قياس القوس المتقاطع.

(2) قياس الزاوية التي يقع رأسها داخل الدائرة يساوي نصف مجموع قياس القوسين المتقاطعين.

(3) قياس الزاوية التي يقع رأسها خارج الدائرة يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المتقاطعين.

انظر إلى الكتاب الآتي بوصفه طريقة بديلة لاستخدام هذه التقانة مع طلبة صفوفك :

Geometry, Its Elements and Structure, 2nd ed., by A. S. Posamentier, J. H. Banks, and R. L. Bannister, (McGraw Hill, 1977), PP. 396 – 402

التقييم اللاحق POSTASSESSMENT

ليقم الطلبة بإعادة تطوير بعض النظريات الواردة أعلاه باستخدام الطرق المعروضة في هذه الوحدة.

التقسيم الثلاثي للدائرة

Trisecting a Circle

الهندسية البسيطة باستخدام المسطرة العدلة والفرجار. كذلك ينبغي أن يكونوا على معرفة كافية بنظرية فيثاغورس وصيغة حساب مساحة الدائرة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

اسأل الطلبة تقسيم دائرة إلى منطقتين متساويتين بالمساحة.

ويبدو بأن الحل الذي سيبدو واضحاً لديهم، سيشمل رسم قطر الدائرة الذي يقسمها وفق ما أردت منهم. والآن اسأل الطلبة تقسيم الدائرة إلى ثلاثة مناطق متساوية المساحة (يشار إليها منذ الآن بالتقسيم الثلاثي للدائرة "Trisecting a Circle").

ينبغي أن لا تؤثر هذه المسألة أية عقبة لأن الطلبة سوف يدركون بأنه يتوجب عليهم إنشاء (باستخدام المسطرة العدلة

تعد مسألة تجزئة دائرة إلى منطقتين متساويتين المساحة، مسألة بالغة البساطة. ولكن، مسألة تقسيم الدائرة إلى ثلاثة مناطق متساوية المساحة تعد مثيرة للاهتمام. وسيعمل الطلبة في هذه الوحدة على بحث جملة من الطرق التي تحقق ذلك.

هدف الأداء Performance objective

سيصبح الطلبة قادرين على تقسيم الدائرة إلى ثلاثة مناطق متساوية بالمساحة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على إنجاز بعض الإنشاءات

شكل (6)

في شكل 6 تم تقسيم قطر الدائرة الأصلية إلى ثلاثة أقسام متساوية عند النقطتين C و D. بعد ذلك ترسم أربعة أنصاف دوائر كما يظهر في الشكل. تمثل كل من المساحتين المظلتين $\frac{1}{3}$ مساحة الدائرة الأصلية. وعليه فإن المساحة غير المظلة يجب أن تساوي مساحتها $\frac{1}{3}$ مساحة الدائرة الأصلية. وبذلك تكون الدائرة قد تم تقسيمها إلى ثلاثة أقسام متساوية.

لليزينة على صلاحية هذا التقسيم، يجب على الطلبة بيان إن مساحة إحدى المنطقتين المظلتين تساوي $\frac{1}{3}$ مساحة الدائرة الأصلية.

مساحة المنطقة المظلة "الغلي" = مساحة نصف الدائرة AB - مساحة نصف الدائرة BC + مساحة نصف الدائرة AC. إذا كان $BD = 2r$ و $AO = 3r$ ، $AE = r$ المنطقة المظلة "الغلي" تساوي:

$$= \frac{1}{2}\pi(3r)^2 - \frac{1}{2}\pi(2r)^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$$

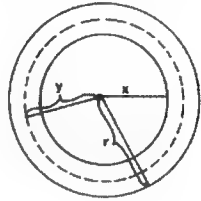
$$= \frac{9\pi^2}{2} - \frac{4\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} = 3\pi^2$$

ولكن مساحة الدائرة الأصلية، والتي يراد تقسيمها إلى ثلاثة أقسام متساوية تساوي $9\pi^2 = \pi(3r)^2$. إذن. مساحة كل منطقة من المناطق المظلة تساوي $\frac{1}{3}$ مساحة الدائرة الأصلية. والتي تم تقسيمها بعدئذ.

التقييم اللاحق Postassessment

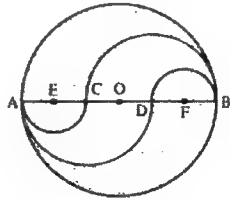
قدم للطلبة دائرة محددة، واطلب منهم تقسيمها إلى ثلاثة مناطق بمساحات متساوية.

مساحة الدائرة التي نصف قطرها r . وعليه فإن، $\pi r^2 = \frac{2}{3}\pi^2$ ، وان $y = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{6}}{3}$. ليقيم الطلبة بإنشاء y بأسلوب مماثل إنشاء x . ثم رسم دائرة متحدة المركز مع البقية (انظر الدائرة بالخط المنقط في شكل 5).



شكل (5)

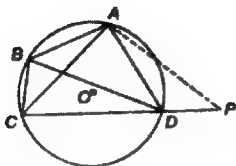
إن الشكل الناتج يظهر دائرة مقسمة إلى ثلاثة أقسام متساوية. إن تقسيماً ثلاثياً أكثر إثارة للاهتمام لدائرة ما يتضمن أسلوب تقسم غير مألوف.



نظرية بطليموس

58

Ptolemy's Theorem



بما أن الشكل الرباعي ABCD دائري، فإن الزاوية $\angle ABC$ مكملة للزاوية $\angle ADC$. ولكن الزاوية $\angle ADP$ هي زاوية مكملة للزاوية $\angle ADC$. وعليه فإن :

$$m \angle ABC = m \angle DAP.$$

بعدئذ يمكننا البرهنة على أن $\triangle ABC \sim \triangle DAP$ ، وأن

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DP} \quad \text{أو} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DP}$$

وبما أن $m \angle BAD = m \angle CAP$ ، و $m \angle ABC = m \angle DAP$ ،

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AP} \quad \text{و} \quad \triangle BAC \sim \triangle DAP$$

فإن $\triangle ABD \sim \triangle ACP$

$$\text{إذن} \quad \frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC} \quad \text{أو} \quad CP = \frac{(AC)(BD)}{AB}$$

ولكن $CP = CD + DP$ و

$$\frac{(AC)(BD)}{AB} = CD + \frac{(AD)(BC)}{AB}$$

والآن بتبسيط هذه الصيغة سنحصل على النتيجة المطلوبة.

$$(AC)(BD) = (AB)(CD) + (AD)(BC)$$

والتي تعكس نظرية بطليموس.

أعرض للطلبة كيفية استخدام نظرية بطليموس في حل مسألة

التقييم السابق. وبما أن شبه المنحرف متساوي الساقين يعد شكلاً

رباعياً حلقياً، يمكن استخدام نظرية بطليموس للحصول على

$$d^2 = (6)(8) + (5)(5) = 73$$

سنعرض هذه الوحدة للطلبة نظرية ذات إمكانيات متميزة حول الأشكال الرباعية المحاطة بدائرة.

هدف الأداء Performance Objective

إعطاء مسائل مناسبة، سيُباشر الطلبة تطبيق نظرية بطليموس لحل المسألة بصورة ناجحة.

التقييم السابق Preassessment

أعرض للطلبة شبه منحرف متساوي الساقين، Isosceles

oidTrapezoid طول قاعدتيه 6، 8 وكل من ساقيه 5.

أسأل الطلبة إيجاد طول قطر شبه المنحرف.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن الطلبة الذين يمتلكون معرفة كافية بنظرية فيثاغورث

سيكونون قادرين على حل هذه المسألة من خلال ممارسة تطبيقات

عليها ولكن معظم الطلبة، بعد أن تعرض عليهم هذه الطريقة،

سوف يرحبون بلا شك بالطريقة الأقل إثارة للضجر عند ممارسة

الحل وسيحصل هذا عندما ستقوم بعض نظرية بطليموس.

نظرية بطليموس Ptolemy's Theorem: في الشكل

الرباعي الحلقى (محاط بدائرة مماسية)، يكون حاصل ضرب طول

قطره مساوياً لحاصل ضرب طول زوجي الضلعين المقابلين.

قبل البرهنة على هذه النظرية تأكد من فهم الطلبة عبارة

النظرية. وفهم المقصود من الشكل الرباعي الحلقى. وسيت

استعراض بعض النظريات الأكثر شيوعاً حول الشكل الرباعي

الحلقى خلال هذه الوحدة. يجب أن تعطى أمثلة عن الأشكال

الرباعية - غير الحلقية Non Cyclic quadrilaterals، بحيث

يقبل الطلبة على الأشكال الرباعية - الحلقية بصورة أفضل.

البرهان Proof:

تأمل الشكل الرباعي ABCD المحاط بالدائرة O. ارسم مستقيماً

يمر بالنقطة A ويلتقي مع \overline{CD} عند النقطة P، بحيث يكون

$$m \angle BAC = m \angle DAP$$

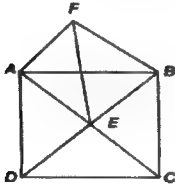
الحل Solution: دع t تمثل طول ضلع في الشكل الرباعي ABCP. بما أن الشكل الرباعي ABCP هو شكل دائري، تستطيع تطبيق نظرية بطليموس عليه، فينجم عن تطبيقها ما يأتي:

$$(CP)(t) = (AP)(t) + (BP)(t) \\ CP = AP + BP = 3 + 4 = 7$$

وعليه سيكون: $CP = AP + BP = 3 + 4 = 7$ ينبغي أن يشجع الطلبة على تحري مسائل مشابهة حيث يستبدل المثلث متساوي الأضلاع مع متعددات أضلاع أخرى - منتظمة.

غالباً ما تبدو المسائل أسهل بكثير مما هي عليه في الواقع. إن المسألة التالية التي سنشجعها بالدراسة هي تلك التي تبدو سهلة الحل بواسطة تطبيق نظرية فيثاغورث. ولكن، أثناء الحل سيبدو واضحاً بأن من الأفضل توظيف نظرية بطليموس.

مسألة Problem: على الضلع AB في المربع ABCD، تم رسم المثلث قائم الزاوية $\triangle ABF$ ، والذي وتره \overline{AB} بصورة خارجية على المربع. إذا كان $AF = 6$ ، $BF = 8$ ، جد EF ، حيث تمثل E نقطة تقاطع وتري المربع.



الحل Solution

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث قائم الزاوية $\triangle AFB$ ، نحصل على $AB = 10$ ، وبالنسبة للمثلث قائم الزاوية $\triangle AEB$ ، نحصل على $AE = BE = 5\sqrt{2}$. وبما أن:

$$m \angle AFB = m \angle AEB = 90^\circ$$

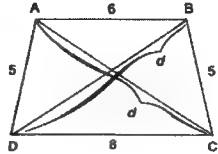
فإن الشكل الرباعي AFBE هو شكل دائري. والآن تستطيع تطبيق نظرية بطليموس على الشكل الرباعي AFBE، لنحصل على $(AB)(EF) = (AF)(BE) + (AE)(BF)$.

بتعويض القيم المناسبة نحصل على:

$$(10)(EF) = (6)(5\sqrt{2}) + (5\sqrt{2})(8)$$

$$EF = 7\sqrt{2} \text{ أو}$$

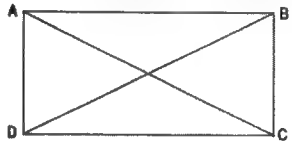
ينبغي أن يشجع الطلبة على تأمل هذه المسألة بالمثلث قائم



وعليه فإن طول قطر شبه المنحرف (d) هو $\sqrt{73}$.

غالباً ما يرغب الطلبة بمعرفة إذا كانت هناك ثمة نظرية "جديدة" متوافقة مع النظرية التي درسوها سابقاً. ليقيم الطلبة بتطبيق نظرية بطليموس على مستطيل (والذي لا يختلف في هذه شكلاً رباعياً حلقياً).

بالنسبة للمستطيل ABCD تبدو نظرية بطليموس كما يأتي $(AC)(BD) = (AD)(BC) + (AB)(DC)$



ولكن، في المستطيل $AC=BD$ ، $AD=BC$ ، $AB=CD$ ، وعليه، بالتعويض نحصل على:

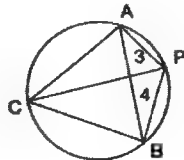
$$(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$$

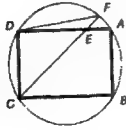
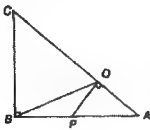
والتي تمثل نظرية فيثاغورث.

والآن دع الطلبة يتأملون تطبيقاً أكثر سهولة لهذه النظرية المحتق بها.

مسألة Problem:

إذا وقمت النقطة P على القوس AB الدائرة المحيطة بالشكل الرباعي ABCP، وكانت $AP = 3$ بينما $BP = 4$ ، جد طول CP .





الزاوية $\triangle ABF$ مرسوماً من داخل المربع. في تلك الحالة سيكون $EF = \sqrt{2}$

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بحل لكل من المسائل الآتية:

1. تقع النقطة E على الضلع \overline{AD} في المستطيل ABCD، بحيث أن $DE = 6$. بينما $DA = 8$. $DC = 6$. إذا كان امتداد \overline{CE} يلتقي الدائرة المحيطة بالمستطيل في النقطة F، جد قياس الوتر \overline{DF} .

2. تقع النقطة P على الضلع \overline{AB} في المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ الذي وضع بحيث أن $BP = AP = 2$. النقطة Q على الوتر AC بحيث أصبح \overline{PQ} عمودياً على \overline{AC} . إذا كان $CB = 3$. جد قياس \overline{BQ} باستخدام نظرية بطليموس

مرجع Reference

Posamentier, A. S., and Charles T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, New York: Dove, 1996.

Posamentier, A. S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

إنشاء π

59

Constructing π

أن يكون الجميع قد وجدوا بأن قطر فئة الـ 25 سناً يبلغ 2.4 ملم وإن محيطها يبلغ حوالي 7.8 ملم. بعد ذلك دع الطلبة يمثلون بقية الجدول بالنسبة للأشياء التي قاموا بقياسها. اطلب منهم أن يلاحظوا فيما إذا ظهر بأن أي عمود ينتج فيه قيمة مقارنة بالنسبة لكل شيء تمت عملية قياسه، آنذاك عليهم أن يأخذوا متوسط الأعداد الموجودة في ذلك العمود. كما ينبغي أن تقارب متوسطات الأعداد لديهم 3.14 (يعني $\frac{C}{D} = 3.14$). ينبغي أن يؤكد على أن جميع الأعمدة الأخرى سينتج عنها نتائج متباينة. باستثناء عمود C/D الذي قد ثبتت قيمته مهما كان مقدار الشيء المقاس.

في عام 1737م، تم إطلاق تسمية خاصة على هذه النسبة هي " π " بواسطة ليونارد إيولر Leonard Euler، وهو رياضي سويسري ذائع الصيت. إن القيمة الدقيقة لهذه النسبة لا يمكن حسابها، ويمكن تقريبها فقط

هدف الأداء Performance Objective

1. سيظهر الطلبة معرفة واضحة بالنسبة π والعلاقات التي تربطها مع الدائرة.
2. سيقوم الطلبة بإنشاء π بأكثر من طريقة.

التقييم السابق Pressessment

فيل بدء بمناقشة π . استعرض مع الطلبة معنى القطر، والمحيط ثم ليقوموا بقياس قطر ومحيط قطعة نقود فئة 25 سنتاً. كذلك اسألهم الحصول على قياسات ماثلة لأشياء دائرية، وحاول أن تؤكد على أهمية دقة القياس.

استراتيجية التعليم Teaching Strategies

ابدأ الدرس بكتابة الجدول الآتي على السبورة.

الشيء	C	D	C+D	C-D	C/D

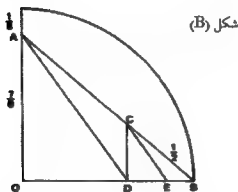
قم بتسجيل بعض القياسات التي حصل عليها الطلبة. ينبغي

وندرج أدناه قيمة π مقربة إلى 50 مرتبة عشرية:

$$\pi = 3.141592653589793238462643 \\ 3832795028841971693993751 \dots\dots\dots$$

سيرى الطلبة الآن بأنهم قادرين على إنشاء قطعة مستقيمة الذي يقرب طولها من π ، وطور الإنشاء في منتصف الـ 1800 ويحتوي على النسبة $\frac{355}{113}$ (والتي سبق أن اكتشف بواسطة فلكي صيني في القرن الخامس الميلادي) $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3.1415929\dots$ الذي هو تقريب لقيمة π إلى ستة خانات عشرية.

يبدأ الإنشاء بربع دائرة Quadrant نصف قطرها وحدة واحدة. يبلغ طول AO حوالي $\frac{7}{8}$ نصف القطر. رسم \overline{AB} وتم تأشير النقطة C بحيث $CB = \frac{1}{2}$ نصف القطر. رسم \overline{CD} موازياً للمستقيم \overline{AO} ، ورسم \overline{CE} موازياً للمستقيم \overline{AD} .



لقيم الطلبة بإيجاد $AB^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 + 1^2$ ، إذن $AB = \frac{\sqrt{113}}{8}$. باستخدام نفس المثلثات، يمكن الحصول بسهولة على العلاقات الآتية (ليوضح الطلبة لماذا $\triangle CDB \sim \triangle AOB$ و $\triangle CEB \sim \triangle ADB$).

$$\frac{CB}{AB} = \frac{DB}{OB} \text{ وكذلك } \frac{CB}{AB} = \frac{EB}{DB}$$

بضرب هذه الصيغ، نحصل على:

$$\frac{EB}{OB} = \frac{CB^2}{AB^2} = \frac{1/4}{113/64} = \frac{16}{113}$$

ولكن، بما أن $OB = 1$ ، سنحصل على:

$$EB = \frac{16}{113} \approx 0.141592904\dots \text{ أو } EB = \frac{16}{113}$$

وبما أن $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113}$ ، يمكن أن نرسم، الآن، قطعة مستقيم يبلغ طولها ثلاثة أضعاف نصف القطر وممتداً بالأسافة EB. إن هذا سيعطينا قطعة مستقيم تختلف عن π بأقل من

أجريت محاولات عديدة، غير سنون عدة، لحساب قيمة π . بالأسلوبين الجبري والهندسي، وستعرض هذه الوحدة بعضاً منها في الإنشاءات الهندسية التي تتضمن π .

إن إحدى أولى المحاولات الجادة لحساب π بمستوى محدد من الدقة الموضوعية تعود بنا إلى الوراء إلى عصر أرخميدس، الذي حاول احتسابها بدقة كبيرة. استندت طريقته إلى حقيقة أن محيط الشكل متعدد الأضلاع المنتظم الذي يحوي على n من الأضلاع يكون أصغر من محيط الدائرة التي تحيط به، بينما يكون محيط متعدد الأضلاع المنتظم أكبر من محيط الدائرة التي يحتويها. وبإعادة هذه الحالة، على التماثل، لقيم n أكبر، سيصل المحيطين إلى قيمة محيط الدائرة من الجهتين.

ابتدأ أرخميدس بحسب منتظم. وحاول في كل مرة مضاعفة عدد أضلاعه لحين حصوله على متعدد أضلاع بـ 96 ضلعاً. بعدئذ كان أرخميدس قادراً على تحديد أن نسبة محيط الدائرة إلى قطرها، أو π ، يكون أقل من $\frac{10}{70}$ 3 ولكنه أكبر من $\frac{10}{71}$ 3. تستطيع كتابة هذا الرقم برموز عشرية كما يأتي $\pi < 3.14085$ 3.142857 .

ولمساعدة الطلبة على فهم هذه الطريقة، فإن من المفيد قيامك بوضوحها عبر مجموعة من الأشكال. وسيساعد الجدول الآتي، أيضاً، في توضيح هذا المفهوم. حيث سيرى الطلبة بوضوح بأنه مع ازدياد عدد الأضلاع، سوف تصبح قيمة π أكثر دقة في قمتها التقريبية.

عدد الأضلاع	محيط متعدد الأضلاع المطوق	محيط متعدد الأضلاع المحيط بدائرة
4	4.0000000	2.8284271
8	3.3137085	3.0614675
16	3.1825979	3.1214452
32	3.1517249	3.1365485
64	3.1441184	3.1403312
128	3.1422236	3.1412773
256	3.1417504	3.1415138
512	3.1416321	3.1415729
1024	3.1416025	3.1415877
2048	3.1415951	3.1415914

شكل A

وكذلك،

$$\frac{b}{b+c} = \frac{d}{3} \dots\dots\dots (3)$$

من معادلة (2) نحصل على $3a = ad + 2d$ أو $a = \frac{2d}{3-d}$

$$\text{ولكن } \tan 30 = \frac{d}{1} = d = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ وعليه}$$

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}} \text{ أو } a = \frac{2\sqrt{3}/3}{3-\sqrt{3}/3} \dots\dots\dots (4)$$

وبنفس الطريقة، من معادلة (3) نحصل على،

$$b = \frac{cd}{3-d} = \frac{c\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}} \dots\dots\dots (5)$$

بتعويض معادلة (4) ومعادلة (5) في معادلة (1) نحصل الآن

$$\text{على } \left(\frac{2\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}} + 2 \right)^2 + 9 = \left(\frac{c\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}} + c \right)^2$$

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حل هذه المعادلة بالنسبة

$$\text{للمتغير } c, \text{ وسيحصلون على الناتج } c = \sqrt{\frac{40}{3}} - 2\sqrt{3}$$

ليتم الطلبة بتبسيط هذا الجذر للحصول على 3.141533 قيمة مقربة للمتغير c . ينبغي أن يؤكد خلال هذا الدرس بأن جميع القيم المستحصلة هي عبارة عن "تقريبات" لقيمة π ، نظرا لاستحالة إنشاء π بواسطة مسطرة عدلة وفرجار.

Posamentier, A.S., and Gordon, Naom, "An Astounding Revelation On The History of π ", the Mathematics Teaches Vol.77, No.1, Jan. 1984, NCTM.

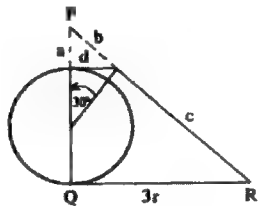
التقييم اللاحق Postassessment

1. جد قطر الدائرة التي يبلغ محيطها 471 قسما.
2. أنشئ تقريبا هندسيا لـ π بأكثر من طريقة.

واحد بالمليون من الوحدة. إن تقريبا هندسيا، أكثر صعوبة، لـ π قد طور عام 1685 بواسطة التيسيس آدم كوخانيسكي Father Adam Kochansky، وهو أمين مكتبة الملك جون الثالث ببولندا.

ارسم دائرة بنصف قطر مقداره وحدة واحدة، بعدئذ ارسم قطعة مستقيمة مماسة \overline{QR} يساوي ثلاثة أمثال القطر. ارسم قطرا عموديا على \overline{QR} عند النقطة Q ، نقطة التماس. والآن ارسم مستقيما d ، مماسا للجهة الثانية من القطر بحيث أن قياس الزاوية المركزية يساوي 30° . صل بين النقاط ومد قطعة المستقيم لكي تكون الشكل الآتي.

وسيصبح الطلبة جاهزين لحساب قيمة π . (سوف يعرض انه في حالة كون طول نصف القطر يساوي 1، فإن المستقيم C يقارب π).



شكل (C)

إذا كان $r=1$ ، في المثلث PGR،

$$(a+2)^2 + (3)^2 = (b+c)^2 \dots\dots (1)$$

كذلك، باستخدام مثلثات مماثلة، سيكون لدينا

$$\frac{d}{3} = \frac{a}{a+2} \dots\dots\dots (2)$$

الاربييلوس

The Arbelos



والآن يجب أن توجه انتباه الطلبة نحو الشكل التوضيحي. حاول أن تستخرج من طلبتك الخاصية الآتية للاربييلوس: والتي $AB = AC + CB$ وعندما يفهم الطلبة هذه الخاصية، ينبغي أن يعد برهان عليها.

في دائرة ما، فإن طول القوس $= \frac{n}{360} \times 2\pi r$ (حيث n عدد درجات القوس، r طول نصف القوس)، وسيكون لدينا:

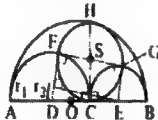
$$\widehat{AB} = \frac{180}{360} \times 2\pi R = \pi R$$

$$\widehat{AC} = \frac{1}{2} \times 2\pi r_1 = \pi r_1$$

$$\widehat{CB} = \frac{1}{2} \times 2\pi r_2 = \pi r_2$$

كذلك $R = r_1 + r_2$ ، وعليه عند ضرب هذه المعادلة بـ π ، نحصل على $\pi R = \pi r_1 + \pi r_2$ أو $\widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{CB}$. ليتأمل الطلبة الحالة حيث تستقر ثلاثة أنصاف دوائر على المستقيم AB (بدلاً من الثنتين). فهل ستصح نفس العلاقة؟

ينبغي أن يرسم الطلبة، الآن، عموداً على المستقيم AB في النقطة C ، والذي يلتقي مع الدائرة عند النقطة H . كذلك ارسم المماس المشترك Common Tangent للدائرتين D ، E وأطلق على نقطتي التماس F ، G ، على التوالي. ارمز إلى نقطة تقاطع



شكل (2)

قطعتي المستقيم بالرمز S (انظر الشكل 2). بما أن قطعة المستقيم المرسومة عمودياً على القطر هي التوسط الهندسي بين قطعتي القطر، سيكون لدينا $(HC)^2 = 2r_1 \cdot 2r_2 = 4r_1 r_2$. كذلك $FG = JE$ (ليوضح الطلبة ذلك سبب ذلك على الشكل التوضيحي).

تمتاز المنطقة التي تحيط بها ثلاثة أنصاف دوائر (بطريقة تشابه سكين صانع الأحذية Shoemaker) بخصائص مثيرة للاهتمام. وغالباً ما يطلق على هذه المنطقة اسم الاربييلوس Arbelos، وهي موضوع هذه الوحدة.

سنقدم للطلاب في هذه الوحدة، هذا الشكل الهندسي مع قصد متابعة خواصه بصورة أكثر شمولاً.

أهداف الأداء Performance Objective

1. سيميز الطلبة الاربييلوس.
2. سيمعد الطلبة إلى حل مسائل تتضمن الاربييلوس.

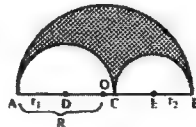
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن تعرض هذه الوحدة على الطلبة الذين اكملوا دراسة الهندسة (أو قد سجلوا بالوقت الحالي في الفصل الأخير لمساق الهندسة الدراسي). وينبغي أن يكونوا قادرين على حساب أطوال الأقواس، ومساحات المثلثات، والدوائر.

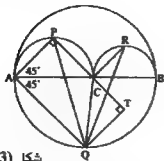
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليرسم الطلبة نصف دائرة مركزها O ، وقطرها AB . دع $AB = 2R$. ليقيموا بعد ذلك بتأشير النقطة C بين النقطتين A و B . بعدئذ ليقيموا بجعل AC ، و CB أقطاراً للدائرتين D ، E . على التوالي. (انظر شكل 1).

دع $AC = 2r_1$ وكذلك $BC = 2r_2$. إن الجزء المؤشر في الشكل يعرف بالاربييلوس، أو سكين صانع الأحذية. يمتلك هذا الجزء، بعضاً من الخصائص المثيرة والتي عالجهها العالم الرياضي الشهير أرخميدس.



شكل (1)



شكل (3)

إن مساحة هذا الشكل الرباعي تساوي مجموع مربعات أنصاف الأقطار r_1, r_2 لنصفي الدائرة الصغيرين.

سيتم البرهان كما يأتي: يمكن تقسيم الشكل الرباعي إلى مثلثين برسم CQ . ويمكن أن تعرض مساحة $AQCP$ بأن تكون مساوية لمساحة المثلث قائم الزاوية ΔAPC . ويشارك المثلثان بقاعدة مشتركة CP ، لذا ينبغي البرهنة على تساوي ارتفاعيهما.

لتحقيق ذلك، ارسم \overline{AQ} ، وارسم \overline{QT} عمودياً على امتداد PC . (انظر شكل 3). بما أن Q هي نقطة منتصف الدائرة AB ، وعليه فإن: $\angle QAB = 45^\circ$. كذلك بما أن المثلث ΔAPC هو مثلث قائم الزاوية - متساوي الساقين. $\angle PAB = 45^\circ$ ، والتي ستعني بأن $\angle PAQ = 90^\circ$. ولكن بما أن: $\angle APC = 90^\circ$ وأن قياس $\angle PTQ = 90^\circ$ أيضاً، فإن الشكل الرباعي $APTQ$ هو مستطيل وأن $AP = QT$.

$$\frac{CP \cdot PA}{2} = \Delta QCP \text{ مساحة المثلث}$$

بما أنه في المثلث القائم الزاوية - متساوي الساقين ΔAPC ،

$$(CP)^2 + (PA)^2 = (2r_1)^2 \text{ أو } 2(CP)^2 = (2r_1)^2.$$

$$\frac{CP \cdot PA}{2} = r_1^2 \text{ أو } (CP)^2 = 2r_1^2 \text{ وعليه فإن}$$

$$\Delta QCP = r_1^2 \text{ وعليه سيكون لدينا بأن مساحة المثلث } \Delta QCP = r_1^2 \text{ ونفس الطريقة، يمكن أن يعرض بأن مساحة } \Delta QCR = \frac{CR \cdot RB}{2} = r_2^2 \text{ وعليه فإن، مساحة الشكل الرباعي } r_2^2 + r_1^2 =$$

التقييم اللاحق Postassessment

1. إذا كان $r_1=16$ ، $r_2=4$. برهن على أن $\widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{CB}$. ثم جد نصف قطر الدائرة S ، وجد مساحة الأربيلوس.

2. صف نصف الدائرة D تحت AB (شكل 4). اجعل \widehat{AN} مماساً للدائرة E . بين أن مساحة المنطقة المظلة تساوي مساحة الدائرة التي قطرها \widehat{AN} .

بما أن $JD = r_1 - r_2$ وكذلك $DE = r_1 + r_2$ ، بعدئذ

$$(JE)^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 - r_1^2 + 2r_1 r_2 - r_2^2 = 4r_1 r_2$$

وعليه فإن $(FG)^2 = 4r_1 r_2$ أو $(HC)^2 = (FG)^2 = 4r_1 r_2$.

اسأل طلبتك إذا كانوا قادرين على اقتراح علاقة أخرى قد تكون قائمة بين \overline{HC} وكذلك \overline{FG} . ومتى اظهر احدهم استجابة بأن \overline{HC} و \overline{FG} ينصف أحدهما الآخر عند النقطة S ، حاول أن نجعل الطلبة يحاولون البرهنة عليها بأنفسهم. SC هو المماس الداخلي - المشترك لكل من الدائرتين، وعليه فإن $FS = SC$ ، $HS = SG$ والذي سيمعنا $FS = SG$. ولكن، بما أن $HC = FG$ (لقيم الطلبة بيان سبب ذلك)، ونحن نعلم كذلك بأن $HS = SC$ كذلك بما أن $FS = SG = HS = SC$ ، فإن النقاط C, G, H, F تحدد دائرة مركزها S .

إن إحدى الخصائص المثيرة للاهتمام في الأربيلوس هي تلك التي تتضمن هذه الدائرة التي تحوي \overline{HC} و \overline{FG} كأقطار لها. ليحاول الطلبة وصف مساحة الأربيلوس بدلالة r_1, r_2 . مساحة الأربيلوس = مساحة نصف الدائرة AHB - (مساحة نصف الدائرة AFC + مساحة نصف الدائرة CGB).

بما أن مساحة نصف الدائرة $\frac{\pi R^2}{2}$ ، سيكون لدينا مساحة الأربيلوس $= \frac{\pi R^2}{2} - \left(\frac{\pi r_1^2}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2} \right) = \frac{\pi}{2} (R^2 - r_1^2 - r_2^2)$. ونحن على علم بأن $R = r_1 + r_2$ ، وبالتعويض سنحصل على:

$$\begin{aligned} \text{مساحة الأربيلوس} &= \frac{\pi}{2} ((r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2) \\ &= \frac{\pi}{2} (r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 - r_1^2 - r_2^2) \\ &= \frac{\pi}{2} (2r_1 r_2) = \pi r_1 r_2 \end{aligned}$$

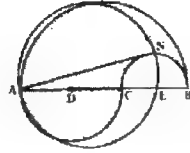
ليتم الطلبة الآن بإيجاد مساحة الدائرة S . القطر $HC = 2\sqrt{r_1 r_2}$ ، لذا فإن نصف القطر $= \sqrt{r_1 r_2}$. بعدئذ ستكون مساحة الدائرة تساوي $\pi (\sqrt{r_1 r_2})^2 = \pi r_1 r_2$. يبدو واضحاً الآن بأن على الطلبة أن يبرهنوا بأن مساحة الأربيلوس تساوي مساحة الدائرة S .

قد ترغب بتقديم أربيلوس آخر يثير الاهتمام افترض النقطتين R, P نقطتين منتصف القوسين \widehat{AC} ، \widehat{CB} على التوالي. لتكن Q نقطة منتصف نصف الدائرة AB . صل كل من النقاط R, P إلى C وإلى Q . وسيتشأ الشكل الرباعي المحدب $PQRC$ (انظر شكل 3).

3. جد مساحة الشكل الرباعي PQRC (انظر شكل 3). إذا كانت $r_1 = 8$ ، $r_2 = 5$.
4. ما هي العلاقة بين الأربيلوس في شكل 3 وأعداد فايبوناتشي. (انظر الدرس الإثرائي 53)

مرجع Reference

Gardner, Martin, "The Diverse Pleasures of Circles that Are Tangent to One Another", Scientific American, 240 (1), January, 1979

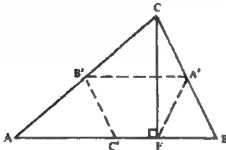


شكل (4)

دائرة بتسعة نقاط

61

The Nine-Point Circle



شكل (1)

الشكل الرباعي $A'B'C'F$ هو شبه منحرف متساوي الساقين. لتحقيق ذلك ينبغي على الطلبة إدراك أن كون $\overline{A'B'}$ قطعة مستقيم تصل بين نقطتي منتصف ضلعين بمثلث، يجعله موازيا للضلع الثالث بالمثلث. وبما أن $\overline{B'C'}$ يصل بين نقطتي منتصف \overline{AB} و \overline{AC} فإن $\overline{B'C'} = \frac{1}{2}(\overline{BC})$. بما أن المستقيم المتوسط لوتر المثلث قائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر، ولقيم $\overline{A'F} = \frac{1}{2}(\overline{BC})$ وعليه سيكون $\overline{B'C'} = \overline{A'F}$ ويعد شبه المنحرف $A'B'C'F$ متساوي الساقين.

وليتم الطلبة الآن بالبرهنة على أن شبه المنحرف متساوي الساقين يكون حلقيا على الدوام (باستخدام النظرية 2، أعلاه). ولتجاوز الارتباك اعد رسم المثلث ΔABC بالارتفاع \overline{AD} كما يظهر في الشكل الآتي.

غالبًا ما يهمل مفهوم إنشاء نقاط متحدة دائريا (على نفس الدائرة) في المنهج الدراسي للهندسة بالمدارس الثانوية. وتعرض هذه الوحدة أكثر مجاميع النقاط المتحدة دائريا.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيعرف الطلبة وينشئوا دائرة بتسعة نقاط
2. سيحدد الطلبة مركز دائرة بتسعة نقاط

التقييم السابق Preassessment

- ينبغي أن يكون الطلبة على دراية كافية بالطرق الأولية للبرهنة على أن نقاطا أربعة متحدة دائريا. على سبيل المثال، يجب أن يكونوا مطلعين على هاتين النظريتين، كحد أدنى:
1. إذا مر ضلع من أضلاع شكل رباعي بزاويتين في الرأسين غير المتجاورين، بعدئذ يعد الشكل الرباعي دائريا (قد يكون محاطا بدائرة).
 2. إذا كان زوج الزاويتين المتقابلتين متكاملتين، بعدئذ يعد الشكل الرباعي دائريا.

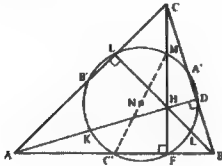
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

اعرض للطلبة المثلث ΔABC ونقاط منتصف أضلعه A' ، B' ، C' (انظر شكل 1). ارسم الارتفاع \overline{CF} . ثم اطلب من الطلبة البرهنة على أن:

مكملتين. إن هذه الحالة تشابه الدائرة التي أنشئت أعلاه، وبما أن الرؤوس الثلاثة (B' ، و C' ، و F) مشتركة مع النقاط الستة للحدثة دائريا، وأن النقاط الثلاثة تحدد دائرة فريدة. إذن، فقد تم إنشاء دائرة بتسعة نقاط

لتعزيز هذا البرهان، ينبغي أن يبرهن الطلبة، الآن، بأن K ، L (نقاط منتصف المستقيمين AH ، BH ، على التوالي) تقع أيضا على هذه الدائرة.

لإنجاز ذلك سيكون الطلبة بحاجة إلى إعادة طريقة العمل السابقة بالنسبة للنقاط K ، و C' ، و A' ، و D وكذلك بالنسبة للنقاط L ، و C' ، و B' ، و E . إن استعراضا مختصرا للبرهان الكلي، حتى هذه النقطة، سوف يظهر "دائرة بتسعة نقاط".



شكل (4)

ليتأمل الطلبة $\overline{MC'}$ في شكل 4. بما أن قطعة المستقيم هذه تقع قبالة الزوايا القائمة في النقطتين B' ، و F ، ينبغي أن يمر قطر الدائرة خلال B' ، و C' ، و F ، و M . ولتثبيت مركز الدائرة N ، اخبر الطلبة، ببساطة، بضرورة إيجاد نقطة منتصف $\overline{MC'}$. وهي نقطة مركز دائرة بتسعة نقاط

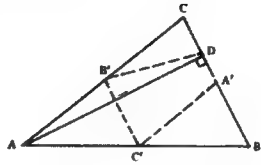
التقييم اللاحق Postassessment

لاستثمار الدرس أسأل الطلبة إنجاز ما يأتي:

1. عرف الدائرة بتسعة نقاط
 2. أنشئ دائرة بتسعة نقاط مستخدما مسطرة عدلة وفرجار.
 3. حدد موقع مركز دائرة بتسعة نقاط
- يمكن العثور على علاقات مثيرة للاهتمام تتضمن الدائرة بتسعة نقاط في الوحدة الرفافة، مستقيم أويلر Euler Line. وهناك الكثير من العلاقات المثيرة للاهتمام والتي تتضمن الدائرة بتسعة نقاط يمكنك العثور عليها في:

مرجع Reference

Posamentier, A. S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

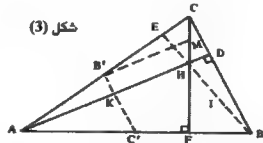


شكل (2)

بنفس الطريقة كما في الارتفاع \overline{CF} ، ثم ليقم الطلبة بصورة مستقلة في البرهنة على أن النقاط B' ، و C' ، و A' وكذلك D متحدة دائريا. يمكن أن ينجز ذلك بالبرهان السابق كدليل يسترشد بخطواته.

ينبغي أن يتهيا الطلبة الآن لتعميم عبارة حول النقاط B' ، و C' ، و A' . وكذلك E بالنسبة للارتفاع \overline{BE} . إن هذا سيؤدي إلى استنتاج أن كل من النقاط D ، و F ، و E تقع على الدائرة المنفردة المحددة بالنقاط A' ، و B' ، و C' .

إن، يستطيع الطلبة تلخيص بأن قاعدة ارتفاعات المثلث متحدة دائريا مع نقاط منتصفات أضلاعه. وبهذا الأسلوب يكونوا قد انشأوا "دائرة بتسعة نقاط Six-point Circle". خلال هذا الوقت، ينبغي أن يكون الطلبة قد برهنوا على أن ارتفاعات المثلث تلتقي بنقطة واحدة. تدعى هذه النقطة "المركز التمامد



شكل (3)

Orthocenter". ليتأمل الطلبة المركز التمامد H بالمثلث $\triangle ABC$ ، ونقطة منتصف \overline{CH} ، M .

$\overline{B'M}$ هي قطعة المستقيم التي تصل بين نقطتي منتصف ضلعي الزاوية $\angle ACH$. وعليه $\overline{B'M} \parallel \overline{AH}$. وبنفس الأسلوب، في الزاوية $\angle ABC$ ، لدينا $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$. بما أن الارتفاع $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{B'M} \perp \overline{B'C'}$ ، أو قياس $\angle MB'C' = 90^\circ$.

تذكر بأن $\angle AFC = 90^\circ$. وعليه فإن الشكل الرباعي $MB'C'F$ هو شكل دائري، نظرا لأن الزاويتين المتقابلتين

مستقيم أويلر

62

The Euler Line

وينبغي أن يرسم الطلبة الآن \overline{OH} ، قطعة المستقيم التي تصل مركز التعامد (نقطة تقاطع الارتفاع) ومركز المحيط، (نقطة تقاطع المنصفات العمودية لأضلاع المثلث). وهذا هو مستقيم أويلر. ليقيم الطلبة بتحديد مركز الدائرة بتسعة نقاط بإيجاد نقطة منتصف $\overline{MC'}$ ، (تمت البرهنة على هذه الفقرة في وحدة دائرة بتسعة نقاط). إن إنشاء دقيقاً يجب أن يضع هذه النقطة على نقطة منتصف مستقيم أويلر \overline{OH} . إن فضول الطالب سوف يطلب برهاناً لهذه الحادثة المذهلة:

1. ارسم \overline{OA} بحيث يقطع الدائرة O عند النقطة R.
2. $\overline{AB} \perp \overline{OC'}$ (بما أن O تقع على العمود المنصف لقطعة المستقيم \overline{AB} وأن C' هي نقطة منتصف \overline{AB}).
3. $m\angle ABR = 90^\circ$. (زاوية محاطة في نصف دائرة).
4. وعليه فإن $\overline{OC'} \parallel \overline{RB}$ (كلاهما عمودي على \overline{AB}).
5. ونفس الأسلوب، وكذلك $\overline{RC'} \parallel \overline{BE}$.
6. $\triangle AOC' \sim \triangle ARB$ (بنسبة تماثل مقدارها $\frac{1}{2}$).
7. وعليه فإن $OC' = \frac{1}{2}(RB)$.
8. الشكل الرباعي RBHC هو متوازي أضلاع (كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين).
9. لذا فإن $RB=HC$ ، وكذلك $OC' = \frac{1}{2}(HC) = HM$.
10. الشكل الرباعي OCHM هو متوازي أضلاع (كل زوج من أضلاعه متقابلين ومتوازيين).
11. وعليه بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف أحدهما الآخر، (نقطة منتصف $\overline{MC'}$)، هي نقطة منتصف \overline{OH} .

ينبغي أن تعرض هذه الوحدة على الطلبة بعد دراستهم للوحدة التي تخص الدائرة بتسعة نقاط وتستخدم هذه الوحدة بعض المواد التي تم تطويرها في وحدة دائرة بتسعة نقاط، وتحاول أن تربطها بنقاط أخرى في المثلث.

أهداف الأداء Performance Objectives

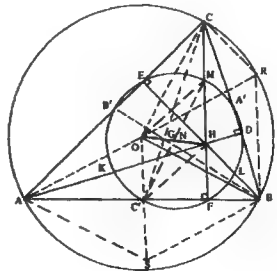
1. سيتوّم الطلبة بتحديد موقع مستقيم أويلر بمثلث.
2. سينشئ الطلبة علاقة بين محيط المركز Circumcenter، ومركز التعامد Orthocenter، ومركز الثقل Centroid، ومركز دائرة بتسعة نقاط.

التقييم السابق Preassessment

ليرسم الطلبة مثلثاً مختلف الأضلاع، وينشئوا دائرة بتسعة نقاط، بالإضافة إلى الدائرة المحيطة بالمثلث.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لتيسير هذه المناقشة، ينبغي أن يؤشر الطلبة رموز إنشائهم كما في شكل 1 الآتي.



شكل (1)

مناقشة مستقيم أولير، ينبغي تأمل تطبيق ممّتع للمتجه Vector. استعرض مفهوم المتجه ومتوازي أضلاع القوى. ينبغي أن نعرض بأن OH هي محصلة كل من OA، OB، OC. لقد نشرت هذه المعلومات للمرة الأولى بواسطة جيمس جوزيف سيلفيستر James Joseph Sylvester (1814-1897).

تأمل النقطة S على $\overline{OC'}$

حيث $OC' = SC'$

بما أن $\overline{OC'S}$ هو العمود النصف للمستقيم \overline{AB} ، فإن الشكل الرباعي AOB'S هو متوازي أضلاع (معين). وعليه فإن، $\overline{OC'} = 1/2 (\overline{OA} + \overline{OB})$ أو $\overline{OS} = \overline{OA} + \overline{OB}$ وبما أن $\Delta OGC' \sim \Delta HGC$ ، $\overline{CH} = 2(\overline{OC'})$ إذن $\overline{CH} = \overline{OB} + \overline{OA}$ بما أن \overline{HO} هي محصلة $\overline{CH}, \overline{OC}$ $\overline{HO} = \overline{OC} + \overline{OH}$ وعليه فإن $\overline{OB} + \overline{OA} + \overline{OC} = \overline{HO}$ (بالتعويض).

التقييم اللاحق Postassessment

عند استكمال هذا الدرس اسأل الطلبة:

1. إنشاء مستقيم أولير لثلث معلوم مختلف الأضلاع، وكذلك.
2. بين العلاقة التي توجد بين مركز المحيط، ومركز التماس، ومركز الثقل، ومركز الدائرة بتسعة نقاط لثلث معلوم مختلف الأضلاع.

مرجع Reference

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

بعد أن اتعمنا البرهنة على أن مركز دائرة بتسعة نقاط ينصف مستقيم أولير. نستطيع عند هذه النقطة أن نبرهن بسهولة على أن نصف قطر الدائرة بتسعة نقاط يساوي نصف طول نصف قطر الدائرة المحيطة.

بما أن \overline{MN} هي قطعة المستقيم التي تصل نقطتي منتصف ضلعي المثلث ΔCOH ، وهي نصف طول الضلع الثالث \overline{OC} . إذن، فإن نصف قطر الدائرة بتسعة نقاط، \overline{MN} ، يساوي نصف طول نصف قطر الدائرة المحيطة، \overline{OC} .

في عام 1765م، برهن ليونارد أولير Leonard Euler بأن مركز ثقل المثلث (نقطة تقاطع المستقيمات المتوسطة) يقسم قطعة المستقيم التي تصل مركز التماس ومركز المحيط (مستقيم أولير) إلى ثلاثة أقسام متساوية. بما أن $\overline{OC'} \parallel \overline{CH}$ ، $\Delta OGC' \sim \Delta HGC$

كما قد برهنا في مرحلة سابقة على أن $OC' = \frac{1}{2}(HC)$

وعليه فإن $OG = \frac{1}{3}(OH)$ أو $OG = \frac{1}{2}(GH)$

إن الشيء الوحيد الذي تبقى علينا هو بيان أن G هي مركز ثقل المثلث. بما أن $\overline{CC'}$ هو مستقيم متوسط وأن $GC' = \frac{1}{2}(GC)$

ينبغي أن تكون G مركز الثقل لأنها تقسم بصورة دقيقة المستقيم المتوسط إلى ثلاثة أقسام متساوية. إذن G تقسم المستقيم \overline{OH} إلى ثلاثة أقسام متساوية. اسأل الطلبة لماذا يقسم المستقيم المتوسط $\overline{BB'}$ المستقيم \overline{OH} إلى ثلاثة أقسام متساوية (لأنه يحتوي G، مركز الثقل).

عند هذه النقطة نكون قد قمنا بتقسيم مستقيم أولير إلى قسمين متساويين. أو ثلاثة أقسام متساوية مع نقاط مثلث. قبل إنهاة

مستقيم سيمسون

63

The Simson Line

الأعمدة القائمة من أية نقطة على الدائرة المحيطة بمثلث معلوم إلى أضلاع ذلك المثلث تقع على استقامة واحدة".
المعطى: المثلث $\triangle ABC$ تحيط به الدائرة O .

تقع P على الدائرة O .

$PY \perp AC$ عند النقطة Y ، $PZ \perp AB$ عند النقطة Z ،

$PX \perp BC$ عند النقطة X .

برهن: أن النقاط X, Y, Z تقع على استقامة واحدة.

البرهان Proof:

1. زاوية $\angle PYA$ تكمل الزاوية $\angle PZA$ (كلاهما زاوية قائمة).

2. الشكل الرباعي $PZAY$ هو شكل دائري (الزوايا المتقابلة متكاملة).

3. ارسم \overline{PA} ، \overline{PB} ، \overline{PC} .

4. $\angle PYZ = \angle PAZ = m$ (كلاهما محاط بنفس القوس).

5. زاوية $\angle PYC$ تكمل الزاوية $\angle PXC$ (كلاهما زاوية قائمة).

6. الشكل الرباعي $PXC Y$ هو شكل دائري (الزوايا المتقابلة متكاملة).

7. $\angle PYX = \angle PCB = m$ (كلاهما محاط بنفس القوس).

8. $\angle PCB = \angle PAB = m$ (يحيط بها جميعا نفس قوس الدائرة O).

9. $\angle PYZ = \angle PYX = m$ (الانتقالية مع الخطوات 4، 7، 8).

10. بما أن كل من الزاويتين $\angle PYZ$ ، و $\angle PYX$ تشتركان بنفس الشعاع \overline{PY} ، ويمتلكان نفس القياس، فإن شعاعيهما المتبقيان ينبغي أن يتطابقان. وعليه، فإن النقاط X, Y ، و Z تقع على استقامة واحدة.

إن إحدى أكثر مجاميع النقاط التي تقع على استقامة واحدة هي تلك التي تعرف بـ "مستقيم سيمسون Simson Line". ورغم أن هذا المستقيم قد اكتشفه وليام والاس William Wallace عام 1797. فإن الاقتباس غير الدقيق، في هذه الأوقات، يعزبه إلى روبرت سيمسون Robert Simson، (1687-1768). سنعرض في هذه الوحدة: ونبرهن، ثم نطبق نظرية سيمسون Simon Theorem.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سينشئ الطلبة مستقيم سيمسون.
2. سيبرهن الطلبة بأن النقاط الثلاثة التي تحدد مستقيم سيمسون هي، بالواقع، تقع على استقامة واحدة.
3. سيطبق الطلبة خصائص مستقيم سيمسون على مسائل محددة.

التقييم السابق Preassessment

عندما تعرض هذه الوحدة على الطلبة، سيكونون قد أدركوا جزءا لا بأس به من مساق الهندسة بالمدارس الثانوية، وقد أنموا دراسة قياس الزاوية بواسطة الدائرة.

يجب أن يستعرض الطلبة، أيضا، الأشكال الرباعية الدائرية (الأشكال الرباعية التي تحاط بدائرة) قبل البدء بهذه الوحدة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليتم كل طالب بإنشاء مثلث محاط بدائرة. بعدئذ، من أي نقطة مناسبة على الدائرة (شريطة أن لا تكون على رأس المثلث)، لينشئ الطلبة قطعة مستقيم عمودية على كل من الأضلاع الثلاثة بالمثلث. والآن، أسأل طلبة الصف عن ماهية العلاقة التي تصح بخصوص قاعدة الأعمدة الثلاثة. إننا تم إعداد الإنشاء بصورة دقيقة. سيلاحظ كل واحد منهم بأن هذه النقاط الثلاثة تحدد "مستقيم سيمسون".

إن السؤال الأكيد الذي سيبرز على الفور هو "لماذا تقع هذه النقطة الثلاثة على استقامة واحدة؟". وهي النقطة التي سيبدأ عندها برهانك. "نظرية سيمسون Simson Theory": إن قواعد

References مراجع

Posamentier, A-S., Advanced Euclidean Geometry
Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

Posamentier, A-S., and C. T. Salkind, Challenging
Problems in Geometry, New York: Dover, 1996.

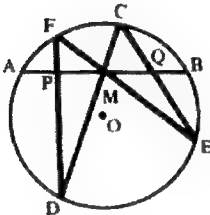
3 برهن نظرية سيمسون.

4 رسمت ثلاثة أوتار من النقطة P التي تقع على الدائرة المحيطة O، فالتقت مع الدائرة بالنقاط A، B، وC. برهن أن نقاط التقاطع الثلاثة للدوائر مع PA، PB، PC. كأقطار، تقع على استقامة واحدة.

مسألة الفراشة

HA

The Butterfly Problem



شكل (1)

إن من أكثر العلاقات الهندسية التي تثير الاهتمام هي تلك التي تتضمن شكلا يشبه فراشة. وسيفهم معظم الطلبة المسألة بسهولة ويسود لديهم اعتقاد بسهولة البرهنة عليها. ولكن هذا الأمر حيث تبدأ المسألة بتكوين اهتمام إضافي، نظرا لأن البرهان يمتاز بكونه محيرا لحد ما. ستقترح هذه الوحدة جملة طرق لعرض المسألة على طلبتك، وتوفر مجموعة مختلفة من البراهين لهذه النظرية المحتفى بها.

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1 سيبين الطلبة مسألة الفراشة.
- 2 سيبرهن الطلبة على صحة مسألة الفراشة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد أتعنوا جل المساق الدراسي لمادة الهندسة (وبخصوص دراسة الدوائر والتشابه).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

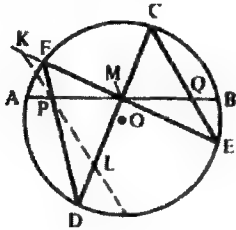
استخدم جهاز الاستنساخ لتهيئة صحيفة من الورق لكل طالب مع دائرة كبيرة تحتوي على وتر، \overline{AB} (وليس القطر)، ونقطة منتصفه، M، مؤشرا بصورة واضحة. أسأل الطلبة رسم أي وترين، \overline{CE} ، \overline{FD} يحتويان النقطة M. ولأن ليقوموا برسم الوترين \overline{CE} ، \overline{FD} واللذين يقطعان \overline{AB} عند النقطتين P، و Q على التوالي. ينبغي أن تشابه رسومهم الشكل الآتي.

أسأل طلبة صفك قياس أية قطعة مستقيم، والتي تبدو متطابقة في أشكالهم، وإعداد قائمة بالأزواج. ينبغي أن تجد بأن معظم الطلبة قد ضمنوا في قائمتهم قطع المستقيمت $\overline{AP} \cong \overline{BQ}$ وكذلك $\overline{MP} \cong \overline{MQ}$.

ذكر الطلبة بأنهم قد ابتدأوا جميعا أشكالهم بقطع مستقيم مختلفة \overline{CE} و \overline{FD} ، وأنه بالرغم من كون أشكالهم تشابه فراشة تستقر في دائرة، فإن قانونهم قد تختلف اختلافا ملموسا عن بقية زملائهم بالصف.

إن هذا الأمر سوف يمسح أكثر النتائج إبداعا لهذه الحالة. وهي أن كل واحد منهم لديه $\overline{MP} \cong \overline{MQ}$!

وسيرغب الطلبة الآن بأن يبرهنوا هذه النتيجة الاستثنائية. باتجاه هذه النهاية ستعرض هنا جملة من براهين هذه النظرية المحتفى بها.



شكل (3)

البرهان II Proof:

مد \overline{EF} عبر F.ارسم $\overline{KPL} \parallel \overline{LE}$. $m\angle PLC = m\angle ECL$ (زاويتان داخليتان متناظرتان).وعليه فإن، $\triangle PML \sim \triangle QMC$ (A.A.) وأن $\frac{PL}{CQ} = \frac{MP}{MQ}$. $m\angle K = m\angle E$ (زاويتان داخليتان متناظرتان).وعليه فإن، $\triangle KPM \sim \triangle EMQ$ (A.A.) وأن $\frac{KP}{QE} = \frac{MP}{MQ}$.

بواسطة الضرب

$$(I) \dots\dots\dots \frac{(PL)(KP)}{(CQ)(QE)} = \frac{(MP)^2}{(MQ)^2}$$

بما أن $m\angle D = m\angle E$ (زاوية مماسة)، وأن $m\angle K = m\angle E$ ،
زاويتان داخليتان متناظرتان، $m\angle D = m\angle K$ ، كذلك، $m\angle KPF = m\angle DPL$ (زاويتان قائمتان). وعليه يكون: $\triangle KFP \sim \triangle DLP$ (A.A.) وأن $\frac{PL}{DP} = \frac{FP}{KP}$ ، وسيكون:

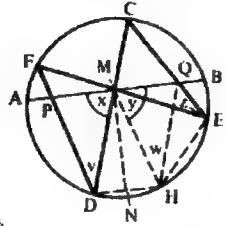
$$(II) \dots\dots\dots (PL)(KP) = (DP)(FP)$$

$$\frac{(MP)^2}{(MQ)^2} = \frac{(PL)(KP)}{(CQ)(QE)}$$

(I) في معادلة

عوضنا بمعادلة (II) للحصول على

$$\frac{(MP)^2}{(MQ)^2} = \frac{(DP)(FP)}{(CQ)(QE)}$$

بما أن $(DP)(FP) = (AP)(PB)$ وكذلك: $(CQ)(QE) = (BQ)(QA)$ (حاصل ضرب أطوال قطعالأوتار المتقاطعة)، $\frac{(MP)^2}{(MQ)^2} = \frac{(AP)(PB)}{(BQ)(QA)}$ 

شكل (2)

برهان I Proof:

بوجود النقطة M، نقطة منتصف \overline{AB} والوترين المرسومين \overline{FME} ، \overline{CMD} ، نبدأ برسم $\overline{DH} \parallel \overline{AB}$ ، $\overline{MN} \perp \overline{DH}$ ،وقطع المستقيمت \overline{MH} ، \overline{QH} ، \overline{EH} .بما أن $\overline{MN} \perp \overline{DH}$ ، وأن $\overline{DH} \parallel \overline{AB}$ ، $\overline{MN} \perp \overline{AB}$.العمود النصف \overline{MN} للمستقيم \overline{AB} ، ينهي أن يمر خلالمركز الدائرة. وعليه فإن \overline{MN} هو العمود النصف للمستقيم \overline{DH} . ونظرا لكون المستقيم المار بمركز الدائرة وعمودي على

وترها. ينصف المستقيم.

إذن $MD = MH$ وأن $\triangle DMN \cong \triangle HMN$ (H.L.).لذا $m\angle x = m\angle y$ ، $m\angle DMN = m\angle HMN$ (الزاويتانالمعتمتان للزاويتان المتطابقتان). بما أن $\overline{AB} \parallel \overline{DH}$ ، $m\angle AD =$ $m\angle BH$ (زاوية نشأت عنوترين). $m\angle x = \frac{1}{2}(m\angle AD + m\angle CB)$ (بالتعويض).لذا $m\angle x = \frac{1}{2}(m\angle BH + m\angle CB)$ (بالتعويض).ولكن $m\angle y = \frac{1}{2}(m\angle BH + m\angle CB)$ فإن $m\angle CEH = \frac{1}{2}(m\angle CAH)$ (زاوية محاطة). إذن، $m\angle BH +$ $m\angle CEH = \frac{1}{2}m\angle CB + m\angle CAH$ وبما أن $m\angle y + m\angle CEH = \frac{1}{2}m\angle CB + m\angle CAH$ $m\angle y + m\angle CEH = 180$ ، $m\angle BH + m\angle CB + m\angle CAH = 360^\circ$

بعدئذ سينتج عن ذلك بأن الشكل الرباعي MQEH قابل

للإحاطة Inscrutable، أي أن الدائرة يمكن أن تحيط به.

تخيل رسم هذه الدائرة، وأن الزاويتان $\angle w$ ، $\angle z$ تقاسان بنفسالقوس \widehat{MQ} (زاوية مماسة)، وبذلك سيكون $m\angle w = m\angle z$.والآن تأمل دائرتنا الأصلية $m\angle v = m\angle z$ ، بما أن الزاويتانتقاس بنفس القوس \widehat{FC} (زاوية مماسة). وعليه، بواسطةالانتقالية. $m\angle v = m\angle w$ ، وأن: $\triangle MPD \cong \triangle MQH$ (A.S.A). إذن، $MP = MQ$.

دوائر متساوية

65

Equicircles

مباشرة العمل عليها غالباً ما يكون غير مألوف ويورث الطلبة بعض المشاكل. إن النظرية الوحيدة التي يفكرون إلى تذكرها هي تلك التي تنص على أن قطعتي مماس الدائرة المرسومة من نقطة خارجية تكونان متطابقتين. ويتطبيق هذه النظرية على المسألة أعلاه، نحصل على:

$$CM' = CL' \text{ وكذلك } BN' = BL'$$

محيط المثلث $\triangle ABC$:

$$= AC + BC + AB = AC + (BL' + CL') + AB$$

والتي بالتعويض ينتج عنها:

$$AB + BN' + CM' + AC$$

$$AN' + AM'$$

أو
ولكن $AN' = AM'$ (وهما أيضاً مماسان من نفس النقطة الخارجية لنفس الدائرة). وعليه فإن

$8 = \frac{1}{2}$ (نصف محيط) $AN' = \frac{1}{2}$. باختصار هذه الحقيقة الآسرة، فإن الطلبة سوف يحفظون نحو متابعة المزيد من العلاقات القائمة في هذا الشكل. بعد ذلك، دع

$$s = \text{نصف محيط المثلث } \triangle ABC$$

$$AB = c, AC = b, BC = a$$

بالاعتماد على إرشادك وتوجيهك المستمر، سيكون الطلبة قادرين على إنشاء العلاقات الآتية:

$$BN' = BL' = AN' - AB = s - c$$

$$CM' = CL' = AM' - AC = s - b$$

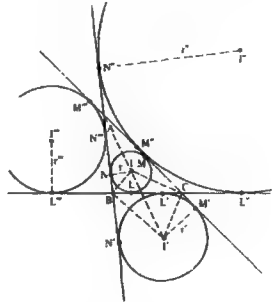
عند هذه النقطة ينبغي عليك أن تبين للطلبة بأن هذه هي بعض القطع التي سوف توصف بدلالة أطوال أضلاع المثلث ABC . وهنا يجب أن تعرف علاقة الدائرتين بالمثلث. سوف يدرك الطلبة بأن الدائرة I بوصفها دائرة مماسة للمثلث ABC . وغالباً ما يكون الطلبة محدودي الاطلاع على الدائرة I . هذه الدائرة، والتي تكون مماسة لمستقيمتي الأضلاع الثلاثة بالمثلث ABC ، وعلى الرغم من ذلك، لا تحتوي على نقاط داخلية بالمثلث، تدعى دائرة محوطة من الخارج.

يحتوي مثلث على أربعة دوائر متساوية، أحدها مماسة من الداخل، والثلاثة (محوطة) مماسة من الخارج. يدعى مركز الدائرة المماسية من الخارج المركز الخارجي Excenter، وهي

الدوائر المتساوية اصطلاحاً استخدم للإشارة إلى كل من الزوايا المماسية Inscribed والدائرة المحاطة من الخارج Escribed. نلث. ستمسهم هذه الوحدة في تطوير عدد من العلاقات الآسرة بين هذه الدوائر.

هدف الأداء Performance Objective

- 1 سيعرف الطلبة الدوائر المتساوية.
- 2 سيبين الطلبة أربعة خواص، على الأقل، والتي تتصف بها الدوائر المتساوية.
- 3 سيبين الطلبة ويبرهنوا إحدى خواص الدوائر المتساوية.



التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد أتقنوا موضوع الدوائر في المساق الدراسي للهندسة بالمدارس الثانوية.

اعرض الشكل الآتي على طلبتك واطلب منهم إيجاد طول AN' . إذا كان محيط المثلث ABC يساوي 16. (النقاط L', M' هي نقاط التماس).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بالرغم من أن المسألة المروضة أعلاه تتسم ببساطة شديدة، فإن

ونستطيع، أيضاً، عرض أن طول كل من قطع المماس الداخلي-المشترك بين دائرتين معاصتين من الخارج لمثلث تساوي طول الضلع المقابل للرأس الذي ينشأ عنهما. إن هذا البرهان بسيط لحد كبير:

$$L'L'' = BL'' - BL' = BL'' - BN' = s - (s-c) = c$$

شجع الطلبة على التقريب في الشكل السابق للعنصر على علاقات أخرى. إن أخذ نصف قطر الدوائر المتساوية بعين الاعتبار سوف ينتج عنه مجموعة من النتائج الممتعة. يطلق على أنصاف الأقطار هذه "أنصاف الأقطار المتساوية Equiradii".

وتنص النظرية على أن نصف قطر الدائرة الماسة من الداخل لمثلث يساوي نسبة المساحة إلى نصف المحيط أي:

$$\mathcal{A} \triangle ABC = \mathcal{A} \triangle BCI + \mathcal{A} \triangle CAI + \mathcal{A} \triangle ABI$$

(لاحظ أن \mathcal{A} تقرأ مساحة إلى)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \triangle ABC &= \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) = sr \end{aligned}$$

$$r = \frac{\mathcal{A} \triangle ABC}{s} \quad \text{وعليه فإن :}$$

إن الامتداد الطبيعي لهذه النظرية ينص على أن نصف قطر الزاوية الماسة-الخارجية لمثلث تساوي نسبة المساحة إلى الفرق بين نصف المحيط وطول الضلع الذي تكون الدائرة مماسة له. للبرهنة على ذلك، لنتأمل الطلبة ما يأتي:

$$\mathcal{A} \triangle ABC = \mathcal{A} \triangle ABC' + \mathcal{A} \triangle ABI' - \mathcal{A} \triangle BCI'$$

$$= \frac{1}{2}r'c + \frac{1}{2}r'b + \frac{1}{2}r'a$$

$$= \frac{1}{2}r'(c+b-a) = r'(s-a)$$

$$r = \frac{\mathcal{A} \triangle ABC}{s-a} \quad \text{وعليه فإن :}$$

وبنفس الأسلوب، ينبغي على الطريقة عرض أن:

$$r^m = \frac{\mathcal{A} \triangle ABC}{s-c} \quad \text{وكذلك} \quad r^b = \frac{\mathcal{A} \triangle ABC}{s-b}$$

لإنهاء هذه المناقشة، كلف الطلبة بإيجاد حاصل ضرب جميع أنصاف الأقطار المتساوية بدائرة. وكل ما سيحتاجون إلى عمله هو ضرب بعض الصيغ الأخيرة:

$$r^a r^b r^c = \frac{(\mathcal{A} \triangle ABC)^3}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ولكن بواسطة صيغة هيرون Heron's formula سيكون لدينا:

$$\mathcal{A} \triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$r^a r^b r^c = (\mathcal{A} \triangle ABC)^2$$

وعليه فإن $r^a r^b r^c = (\mathcal{A} \triangle ABC)^2$ وعند هذه النقطة أسأل الطلبة اختصار النظريات والعلاقات التي تم تطويرها في هذا النموذج.

نقطة تقاطع منصفات الزوايا الخارجية مع منتصف زاوية داخلية. ينبغي أن يكتسب الطلبة المزيد من المعرفة والاطلاع بهذه الدوائر عن طريق وصف قطع أخرى بدلالة أطوال أضلاع المثلث $\triangle ABC$. مرة ثانية. حاول أن تزود الطلبة بالإرشاد المناسب في ضوء منطلقاتهم:

$$\begin{aligned} AN + AM &= (AB-NB) + (AC-MC) \\ &= (AB-LB) + (AC-LC) \\ &= (AB+AC) - (LB+LC) \\ &= c + b - a \end{aligned}$$

تحدى طلبتك حول إمكانية بيان ما يأتي:

$$c + b - a = 2(s-a)$$

وعليه : $AN + AM = 2(s-a)$

ولكن : $AN = AM$ ، إذن $AN = s-a$

وليحاول طلبتك بيان كيفية وصف CL , BL بدلالة أطوال أضلاع المثلث $\triangle ABC$.

$$BN = s-b$$

$$CL = s-c$$

والآن أصبحنا على أهبة الاستعداد لتطبيق بعض هذه الصيغات لإنشاء علاقاتين تثيران الاهتمام، وهما:

$LL' = b-c$, $BL = CL'$ بالمثلث $\triangle ABC$.

وبما أن كلا من CL' , BL قد عرضا بأنهما مساويان لـ $s-b$, $BL = CL'$.

تأمل LL' والذي يساوي $BC-BL-CL'$.

$$LL' = a - 2(s-b) = b-c$$

ونستطيع الآن البرهنة، بسهولة، بأن طول قطعة المماس الخارجي-المشترك لكل من الدائرة الماسة الداخلية و الخارجية لمثلث تساوي طول الضلع الموجود في المستقيم الذي يقطع قطعة المماس.

$$NN' = AN' - AN$$

لقد عرضنا مبركاً بأن $AN' = s$ وأن $AN = s-a$.

$$NN' = s - (s-a) = a$$

وبالتعويض، $NN' = s - (s-a) = a$.

وتصح نفس القضية بالنسبة لـ MM' .

إن نظرية مثيرة، أخرى، تنص على أن طول قطعة المماس الخارجي-المشترك بين دائرتين معاصتين من الخارج لمثلث تساوي مجموع طول الضلعين اللذان يتقاطعان مع هذا المماس.

لبرهنة هذه النظرية، ادع الطلبة إلى استذكار العلاقة:

$$s = BL'' + CL'''$$

لقد برهن على ذلك عندما تم حل مسألة التقييم السابق وعليه، فإن:

$$\begin{aligned} L'''L'' &= BL'' + CL''' - BC \\ &= s + s - a \\ &= b + c \end{aligned}$$

مرجع

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

التقييم اللاحق Postassessment

إنهاء هذا الدرس، ادع الطلبة إلى إكمال التمارين الآتية:

1. عرف الدوائر المتساوية وأنصاف الأقطار المتساوية.
2. بين أربعاً من خصائص الدوائر المتساوية.
3. بين وبرهن خاصية واحدة للدوائر المتساوية.

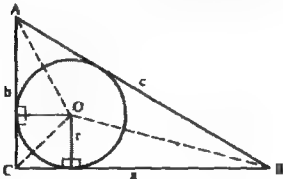
66

الدوائر المحاسة الداخلية والمثلث القائم الزاوية

The Inscribed Circle and The Right Triangle

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد إكمال المسائل أعلاه، إما بصورة فردية، أو بصورة جماعية مع طلبة الصف، سيريد الطلبة اخذ السؤال الآتي بعين الاعتبار "كذلك" مثلث قائم الزاوية وبأضلاع صحيحة، فهل سيضمن هذا بأن نصف قطر الدائرة المحاسة-الداخلية سيكون عدد صحيحاً أيضاً؟". لفرض البرهنة أن الجواب إيجابي، تأمل المخطط الآتي. وهنا، r تمثل نصف القطر الداخلي، (يعني، نصف قطر الدائرة المحاسة - الداخلية)، وأن المثلث ABC زاوية قائمة عند النقطة C، وأن أطوال أضلاع المثلث هي a ، b ، c . وسيضمن البرهان إيجاد علاقة بين كل من a ، b ، c . إذا تم وصل مركز الدائرة بكل من رؤوس المثلث الثلاثة، سينشأ عن ذلك ثلاثة مثلثات.



إن مساحة المثلث الأول تساوي $\frac{1}{2}ra$ ، ومساحة المثلث الثاني $\frac{1}{2}rb$ ، ومساحة المثلث الثالث $\frac{1}{2}rc$. إن مساحة المثلث ABC تساوي $\frac{1}{2}ab$. تحدى الطلبة بإيجاد علاقة بين a ، b ، c .

بعد إنهاء وحدة حول الدوائر، ووحدة أخرى منفصلة تعالج المثلثات قائمة الزوايا، سوف يستمتع الطلبة بملاحظة بعض العلاقات التي تؤدي إلى تكامل هذه الوحدات. وستستعمل هذه الوحدة مع بعض الخصائص الممتعة لنصف قطر الدائرة المحاسة الداخلية لمثلث قائم الزاوية.

هدف الأداء Performance Objective

1. بإعطاء مثلث قائم الزاوية، وبأطوال أضلاع صحيحة، سيكون الطلبة قادرين على عرض أن القطر الداخلي هو عدد صحيح.
2. سيكون الطلبة قادرين على توضيح كيف أن الارتفاع المرسوم على وتر المثلث القائم الزاوية ذو صلة بنصف القطر الداخلي للمثلثات المتكونة.
3. سيريد الطلبة وسيكونون قادرين على اشتقاق صيغة تربط بين نصف القطر الداخلي بمساحة، ومحيط المثلث قائم الزاوية.
4. بإعطاء نصف القطر الداخلي محدد، سيكون الطلبة قادرين على تحديد عدد المثلثات قائمة الزاوية مع الأضلاع الأولية التي تمتلك نصف القطر الداخلي المعطى.
5. سيكون الطلبة قادرين على إعطاء ثلاثي محتمل واحد لأطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية عند إعطاء قيمة صحيحة-موجبة لنصف القطر الداخلي.

التقييم السابق Preassessment

ليحاول الطلبة العمل على المسائل الآتية:

1. جد نصف قطر دائرة محاسة داخلية لمثلث قائم الزاوية، أطوال أضلاعه 3، 4، 5.
2. كرر هذه المسألة بالنسبة لمثلث أطوال أضلاعه 5، 12، 13.

دع المثلث ΔADC يطلق عليه ΔI وينصف قطر داخلي r_I . بنفس الأسلوب، المثلث ΔDCB (ΔII) وفيه نصف قطر داخلي r_{II} ، والمثلث ΔABC (ΔIII) وفيه نصف القطر الداخلي r_{III} . يمكن أن يعرض بأن مجموع أنصاف الأقطار الداخلية للمثلثات ΔI ، ΔII ، ΔIII يساوي أيضا الارتفاع من نقطة C ، والذي سيطلق عليه h_c . لاحظ بأن $\Delta ADC \sim \Delta DCB \sim \Delta ABC$. وبما أن نصف القطر الداخلي الذي يوافق المثلثات المشابهة يكون بنفس النسبة كأي نقطة في زوج الأشلاع المقابلة، $\frac{r_I}{r_{III}} = \frac{b}{c}$ أو $r_I = \frac{b}{c} r_{III}$ بنفس الأسلوب، $r_{II} = \frac{a}{c} r_{III}$ وعليه فإن

$$r = \frac{a + b + c}{c} r_{III} \quad \text{بإستدعاء أن } r_I + r_{II} + r_{III} = \frac{a + b + c}{c} r_{III}$$

$$\frac{a + b + c}{c} r_{III} = \left(\frac{a + b + c}{c} \right) \left(\frac{2(\Delta III)}{p} \right)$$

$$= \left(\frac{2(\Delta III)}{c} \right) \quad \text{حيث أن } m < n \text{ وأن } n \text{ تمثل أعدادا أولية صحيحة نسبيا وموجبة. ويتكافؤ مختلف.}$$

$$\text{باستخدام } r(a+b+c) = ab \text{ وتعويض قيم } a, b, c. \text{ إذن،}$$

$$r = n(m-n) \text{ أو } 2r(m^2 + mn) = 2mn(m^2 - n^2)$$

$$\text{وبما أن } m \text{ و } n \text{ أعداد صحيحة، و } n < m \text{، وعليه}$$

سيكون r عدد صحيح.

ولكن، $\frac{\Delta III}{c} = h_c$ ، إذن $\frac{\Delta III}{c} = h_c$ ، والتي تجعل من $r_I + r_{II} + r_{III} = h_c$ وهو ما طلب البرهنة عليه.

يستطيع المرء أن يستخدم ما ورد أعلاه في البرهنة على أن مساحة الدائرة الماسة من الداخل في ΔI زائدا مساحة الدائرة الماسة من الداخل في ΔII تساوي مساحة الدائرة الماسة من الداخل في ΔIII . يمكن ملاحظة هذا بإستدعاء ما تم عرضه سابقا بكون

$$r_I = \frac{b}{c} r_{III} \quad \text{وكذلك } r_{II} = \frac{a}{c} r_{III} \quad \text{إذن.}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2} r_{III}^2 = r_I^2 + r_{II}^2 = \frac{b^2}{c^2} r_{III}^2 + \frac{a^2}{c^2} r_{III}^2 =$$

$$\text{(نظرا لأن } a^2 + b^2 = c^2 \text{). وبالضرب بـ } \pi \text{ نحصل على}$$

$\pi r_I^2 + \pi r_{II}^2$ وهي النظرية المطلوب البرهنة عليها. إن العلاقة المثيرة، الأخرى، التي تخص نصف قطر الداخلي هي: "عدد الثلاثيات الفيثاغورية الأولية هو 2ℓ ، حيث ℓ هو عدد التقسيمات الأولية الفردية لـ ℓ ($0 \leq \ell$)، وإن r هو طول نصف القطر الداخلي المقابل". إن المعنى التام لهذه النظرية ينبغي أن يكون واضحا للطلبة قبل مباشرة العمل على البرهان. وضع للطلبة بأن لكل عدد طبيعي r يوجد على الأقل مثلث قائم الزاوية بأضلاعه:

$$2r^2 + 2r + 1, \quad 2r^2 + 2r, \quad 2r + 1$$

حيث تمثل r نصف القطر الداخلي. وينبغي أن يكون الطلبة قادرين على تفحص بأن هذا الأمر يفي بنظرية فيثاغورث. على سبيل المثال، ليحاول الطلبة قيما مختلفة لـ ℓ . بالنسبة لـ $\ell = 1$ ، ستكون أضلاع المثلث 3، 4، 5.

وبجمع المساحات سنحصل على $\frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2}ab$ والتي تمثل مساحة المثلث ΔABC . إذن $r = \frac{ab}{a+b+c}$. ولكن هذا يبدو فقط لجعل r عدد نسبي للأعداد الصحيحة a, b, c عند هذه النقطة حاول أن تذكر الطلبة (أو اعرض لهم في المرة الأولى) كيف أن القيم الصحيحة a, b, c يمكن الحصول عليها من الصيغة. يعني، وضع لهم الصيغة التي تم توليدها لأضلاع المثلث قائم الزاوية.

$$a = (m^2 - n^2)$$

$$b = 2mn$$

$$c = (m^2 + n^2)$$

حيث $n < m$ وأن n و m تمثل أعدادا أولية صحيحة نسبيا وموجبة. ويتكافؤ مختلف.

$$\text{باستخدام } r(a+b+c) = ab \text{ وتعويض قيم } a, b, c. \text{ إذن،}$$

$$r = n(m-n) \text{ أو } 2r(m^2 + mn) = 2mn(m^2 - n^2)$$

$$\text{وبما أن } m \text{ و } n \text{ أعداد صحيحة، و } n < m \text{، وعليه}$$

سيكون r عدد صحيح.

إذن، "متى كانت أضلاع المثلث قائم الزاوية صحيحة فإن القطر الداخلي سيكون عددا صحيحا أيضا".

وكنيجة لما سبق. يمكن إنشاء صيغة مختصرة تقيم علاقة بين نصف القطر الداخلي، ومساحة، ومحيط المثلث قائم الزاوية.

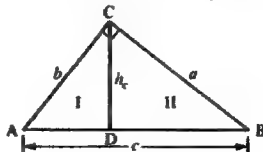
$$\text{بما أن } r = \frac{ab}{a+b+c} \text{ وذلك بتعويض } p \text{ (المحيط) عوضا عن}$$

$$a+b+c. \text{ كذلك لاحظ بأن مساحة المثلث } \Delta ABC = \frac{ab}{2}$$

$$(a+b+c) \text{ (حيث تمثل } \ell \text{ "مساحة الـ"). إذن}$$

$$r = 2(\Delta ABC) / p. \text{ ولأجل التطبيق والتدريب ليقم الطلبة بإيجاد نفس القطر الداخلي، بعد إعطائهم قيما معلومة كل من } \ell \text{ و } \Delta. \text{ وكذلك } p.$$

لاحظ أن الطلبة قد عملوا بعضا من وقتهم على المثلث قائم الزاوية الذي رسم ارتفاعه باتجاه الوتر (انظر الشكل الآتي). والآن ستوفر لديهم فرصة مناسبة لربط نصف القطر الداخلي بهذا المخطط المؤلف.



يكون أحدهما فرديا. إن أعداد مثل هذه المثلثات هو $2, p$. وهذا يكمل البرهان.

إن الطلبة الذين يرغبون بالنظر إلى الموضوع بصورة أكثر عمقا يمكن أن يحاولوا برهنة إذا كانت r عددا صحيحا زوجيا موجبا، فإن عدد المثلثات قائمة الزاوية وبأضلاع أطوالها أعداد صحيحة والتي ليس من الضروري أن تكون أولية نسبيا، وفيها r هو نصف قطر داخلي، يمكن وضعها بالصيغة

$(2x_1 + 1), (2x_2 + 1), \dots, (2x_r + 1)$ حيث تمثل x و ℓ الأعداد التي نحصل عليها من تحليل r إلى $2^x p_1^{\ell_1} p_2^{\ell_2} \dots p_r^{\ell_r}$ ، $\ell \geq 0, x \geq 0$ ويكون P_r عددا أوليا فرديا، $p_1 < p_2 < \dots < p_r$. إن أي عدد صحيح موجب يجب تحليله بنفس الأسلوب.

يمكن أن يباشر الطلبة بحثوا تخص علاقات مثيرة أخرى حول نصف القطر الداخلي لفرض الكشف عن مزيد من خصائصها. فعلى سبيل المثال، يستطيع الطلبة محاولة برهنة الصيغة (لأي مثلث) التي تخص نصف القطر الداخلي r لأي مثلث Δxyz (الأضلاع x, y, z وان $s = \frac{x+y+z}{2}$) هي $r = \sqrt{\frac{(s-x)(s-y)(s-z)}{s}}$. إن التحريات الأخرى يجب أن تبهرن على قدرتها بتحدي طلبة الصف.

التقييم اللاحق Postassessment

1. إذا كانت أضلاع المثلث قائم الزاوية 5، 12، 13، فهل يضمن هذا أن تكون r عددا صحيحا؟ وإذا كانت كذلك، فأي عدد صحيح ستكون؟ وإذا لم تكن كذلك، وضح سبب ذلك؟
2. إذا نشأ عن الارتفاع المرسوم إلى وتر مثلث قائم الزاوية ثلاثة مثلثات متشابهة بأنصاف أقطار داخلية 2، 3، 4. جد طول هذا الارتفاع.
3. جد عدد المثلثات قائمة الزاوية المحددة والتي تمتلك أضلاعها أطوالا كأعداد أولية صحيحة نسبيا لديها 70 بوصفه نصف قطرها الداخلي.
4. إذا كان نصف القطر الداخلي يساوي 3، جد أطوال أضلاع المثلث قائم الزاوية مع نصف القطر الداخلي المذكور.
5. تبلغ مساحة المثلث xyz 6، وحيطه 12. جد طول نصف قطره الداخلي.

وبالعودة للوراء إلى برهنة النظرية أعلاه، لنكن a, b, c أضلاع المثلث قائم الزاوية وبأطوال صحيحة، حيث يكون b عددا زوجيا، بينما a, c هي أعداد أولية نسبيا. إن نصف القطر الداخلي لهذا المثلث هو العدد الصحيح الموجب r ، استدع العلاقة التي تنص على أن $r = \frac{ab}{a+b+c}$ ، ويمكن كتابتها أيضاً بصورة $\frac{1}{2}(a+b-c) = \frac{ab}{a+b+c}$ وبملاحظة أن $\frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2}$ هي عبارة عن هوية. ينبغي أن يشجع الطلبة على تبرير هذه الهوية متذكّرين أن: $c^2 = a^2 + b^2$. ومن الصيغة المولدة الأولية، عوض بالنسبة لكل من a, b, c . لكي يحصل الطلبة $(m-n)$. $r =$ وما أن كل من m, n أعداد أولية نسبيا، بعدد $(m-n)$ وكذلك n سيكونان أعداد أولية نسبيا، كذلك (ملاحظة: $(m-n)$ تمثل عددا فرديا لأن كل من m, n هما عددان أوليان نسبيا ويتكافؤ معاكس). إذن، نصف القطر الداخلي يمكن تحليله إلى حاصل ضرب عددين صحيحين موجبين، والذي يكون كل منهما عددا أوليا نسبيا ويكون العامل $(m-n)$ فرديا. والآن، تأمل r بوصفه أي عدد صحيح موجب، حيث $r = xy$ هو أي تحليل للقيمة r إلى حاصل ضرب أي عددين أوليين نسبيا، موجبين وصحيحين، ويكون أحدهما فرديا. دع $m = x+y, n = y$. بعدد، يكون كل من m, n أعداد أولية نسبيا. كذلك، بما أن x عدد فردي، إذا كان $n = y$ فرديا، بعدد $m = x+y$ سيكون زوجيا. بنفس الأسلوب، إذا كان m فرديا، يجب أن يكون n زوجيا. إذن أحد العددين m, n هو زوجي.

استدع الصيغة $n > m$. بفرض $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$ نستطيع الحصول على نوع المثلث المطلوب ونصف قطر داخلي $r = (m-n) nab$ ، وعليه، فإن أي تحليل لعدد r إلى حاصل ضرب عددين أوليين نسبيا، بحيث يكون أحدهما فرديا، سوف يحدد نوع المثلث المطلوب ونصف قطر داخلي r . يمكن عرض بأنه إذا كان $0 \leq \ell$ حيث

$r = 2p_1^{\ell_1} p_2^{\ell_2} p_3^{\ell_3} \dots p_r^{\ell_r}$ بشرط أن تكون p_i عددا أوليا فرديا (أي عدد صحيح موجب)، بعدد سيكون عدد التحليلات لـ r مساويا لـ 2^{ℓ} . إذن 2^{ℓ} ، يجب أن يكون عدد التحليلات، أو r إلى عاملين أوليين نسبيا حيث يكون أحدهما فرديا.

إذن، لكل عدد صحيح موجب r ، يوجد بضعة مثلثات محددة قائمة الزاوية، والتي تمتلك أضلاعاً أطوالها أعداد صحيحة أولية نسبيا، ونصف قطر داخلي r ، كما توجد تحليلات محددة لـ r إلى حاصل ضرب عاملين أوليين نسبيا

مرة ثانية، باستخدام (6)، (12)،

$$\phi^2 - \phi' = \phi + 1 - \frac{1}{\phi} = \frac{\phi^2 + \phi - 1}{\phi} = \frac{\phi + 1 + \phi - 1}{\phi} = 2 \quad (14)$$

لهذا السبب، من المعادلتين (13) و (14)

$$(\phi')^2 + \phi = \phi^2 - \phi' \quad (15)$$

أسمس ϕ : إن وجوداً ممتعاً ومشوقاً لسلسلة فايبوناشي يمكن الحصول عليه إذا قمنا باشتقاق أسمس ϕ بدلالة ϕ وملاحظة العوامل والثوابت التي تظهر.

على سبيل المثال، باستخدام (12)،

$$\phi^3 = \phi^2 \cdot \phi = (\phi + 1)\phi = \phi^2 + \phi = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \phi^4 &= \phi^3 \cdot \phi = (2\phi + 1)\phi = 2\phi^2 + \phi = 2(\phi + 1) + \phi \\ &= 2\phi + 2 + \phi = 3\phi + 2 \end{aligned} \quad (17)$$

وكذلك

$$\begin{aligned} \phi^5 &= \phi^4 \cdot \phi = (3\phi + 2)\phi = 3\phi^2 + 2\phi = \\ &= 3(\phi + 1) + 2\phi = 3\phi + 3 + 2\phi = 5\phi + 3 \end{aligned} \quad (18)$$

ليتم الطلبة بتوليد المزيد من أسمس ϕ :

$$\begin{aligned} \phi^1 &= 1\phi + 0 \\ \phi^2 &= 1\phi + 1 \\ \phi^3 &= 2\phi + 1 \\ \phi^4 &= 3\phi + 2 \\ \phi^5 &= 5\phi + 3 \\ \phi^6 &= 8\phi + 5 \\ \phi^7 &= 13\phi + 8 \\ \phi^8 &= 21\phi + 13 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (19)$$

دعنا نعود إلى شكل 1. إذا تم تأشير $\phi' = DE$ على طول \overline{CD} ، سنحصل على المربع $DEGH$ ، يساوي طول كل ضلع من أضلاعه ϕ' ، إذن، $CH = 1 - \phi'$ (تذكر بأن في الأصل $CD =$ وحدة واحدة).

$$1 - \phi' = 1 - \frac{1}{\phi} = \frac{\phi - 1}{\phi} = \frac{1/\phi}{\phi} = \frac{1}{\phi^2} = (\phi')^2 = \frac{1}{\phi^2}$$

مع CF (أو GH) $\phi' = \frac{1}{\phi}$ ، $\frac{CH'}{CF} = \frac{(\phi')^2}{\phi'} = \phi'$ ، إذن $CFGH$ هو أيضاً مستطيل ذهبي.

من (2). $\phi = r_1$ وعندما تحتسب r_2 تكون مساوية إلى -0.61803. إن علاقة بين ϕ و r_2 ، سوف تصبح واضحة للعيان إذا بدأنا أولاً بتقدير معكوس ϕ ، يعني احتساب $\frac{1}{\phi}$ من (2).

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803...$$

إن الكسر $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ يرمز له بالرمز ϕ' ، إذن، من المعادلة (3)، $r_2 = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$ هو المعكوس الجمعي لـ ϕ' ويرمز له بالرمز $\phi' - r$. باختصار، يلي ذلك:

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803... \quad (4)$$

$$-\phi = \frac{2}{-\sqrt{5}+1} = -1.61803... \quad (5)$$

$$\frac{1}{\phi} = \phi' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803... \quad (6)$$

$$-\phi' = \frac{-\sqrt{5}+1}{2} = -0.61803... \quad (7)$$

وعند العبور، ينبغي أن يبقى حاضراً في الذهن بأن نسبة العرض إلى الطول بالمستطيل الذهبي هي ϕ' ، في حين أن نسبة الطول إلى العرض هي ϕ . إذن، في شكل (1)، $\phi' = \frac{DE}{DC}$ ، بحيث أن CDEF يكون مستطيلاً ذهبياً.

إن علاقات فريدة لحد ما، يمكن اشتقاقها من (4)–(7). على سبيل المثال، باستخدام (4) و (6).

$$\phi \cdot \phi' = 1.0 \quad (8)$$

$$\phi - \phi' = 1.0 \quad (9)$$

إن ϕ و ϕ' هما العددان الوحيدان في الرياضيات اللتان يتميزان بكون حاصل ضربهما والفرق بينهما يساوي 1.

$$\phi^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^2 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (10)$$

ولكن:

$$\phi + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (11)$$

إذن، من المعادلتين (10) و (11)،

$$\phi^2 = \phi + 1 \quad (12)$$

يضاف إلى ذلك باستخدام (6) و (12)

$$\begin{aligned} (\phi')^2 + \phi &= \\ \frac{1}{\phi^2} + \phi &= \frac{1}{\phi+1} + \phi = \frac{1+\phi^2+\phi}{\phi+1} = \frac{\phi^2+\phi-1}{\phi^2} = \frac{2\phi^2}{\phi^2} = 2 \end{aligned} \quad (13)$$

إن هذا جزء من حلزون من تساوي الزوايا، والذي لا يمكن مناقشته بإسهاب في هذا الوقت.

التقييم اللاحق Postassessment

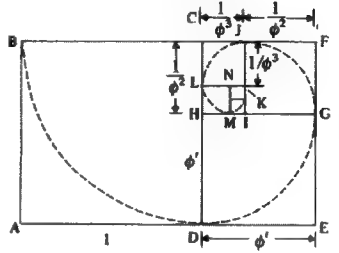
1. وصفت قطعة المستقيم \overline{AE} بكونها قابلة للتقسيم إلى نسبة متوسطة، وفائدة إذا يمكن تحديد موقع نقطة D على \overline{AE} بحيث يكون

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{DE} \quad \dots\dots(20)$$

في شكل (1)، دع $AE = X$ وكذلك $AD = 1$. بمدئ (20)، اشتق المعادلة التربيعية التي استخدمت لتحديد قيمة ϕ في (3).

مراجع References

- Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002
- Richard A. Dunlap, the Golden Ration and Fabionacci Numbers, River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., 1997.
- Hans Wasler, The Golden Section, Washington D.C: Mathematical Association of America, 2001.



شكل (2)

وبنفس الأسلوب، يمكن تقسيم مربع، طول كل ضلع من أضلاعه $(\phi')^2$ وحدة طول، على طول الضلع CF بالمستطيل CFGH، حيث سنحصل على مستطيل ذهبي آخر هو CJIH. ويمكن تقسيم CJIH بنفس الطريقة للحصول على المربع GJKL، تاركين وراءنا المستطيل الذهبي IKLH. إن عملية تقسيم المربعات، هذه، من المستطيلات الذهبية للحصول على مستطيلات ذهبية أخرى، يمكن الاستمرار بها إلى ما لا نهاية بالأسلوب المقترح في شكل 2.

إذا وصلت النقاط B, D, G, L, M بمنحنى سلس Smooth (انظر شكل 2)، سينشأ منحنى ذو شكل حلزوني.

68

المثلث الذهبي

The Golden Triangle

ينبغي أن تعد ملاحظة محدودة للمثلثين المتشابهين BED و DEF نظرا لاختيارهما بصورة اختيارية من مجموعة من المثلثات المتشابهة في شكل 1، لغرض المناقشة التي ستأتي. بوجود \overline{DF} منصف $\angle BDE$ ، والمثلثين متساوي الساقين BDF، DEF، بحيث:

$$ED = DF = FB = \phi \quad (1)$$

دع $BE = BD = x$ ، بعدد $x - \phi$ وكذلك:

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BD}{ED}, \frac{\phi}{x - \phi} = \frac{x}{\phi} \quad (2)$$

بحيث أن

$$x^2 - \phi x - \phi^2 = 0 \quad (3)$$

إن الجذر الموجب للمعادلة (3) من الصيغة التربيعية، هو:

$$x = \phi \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \quad (4)$$

ولكن بواسطة التعريف، $\phi = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ وعليه من معادلة (4)

$$x = \phi, \phi = \phi^2 = BE \quad (5)$$

وكذلك

$$EF = x - \phi = \phi^2 - \phi = \phi + 1 - \phi = 1 \quad (6)$$

إذن، في المثلث $\triangle BED$ ، نسبة الساق إلى القاعدة، باستخدام معادلة (5) هي:

$$\frac{BE}{ED} = \frac{\phi^2}{\phi} = \phi$$

وكذلك في المثلث $\triangle DEF$ ، نسبة الساق إلى القاعدة هي ϕ ثانية.

$$\frac{DE}{EF} = \frac{\phi}{1} = \phi, \quad \text{بما أن،}$$

لذا في أي مثلث متساوي الساقين $72^\circ - 72^\circ - 36^\circ$ (يرمز إليه فيما بعد بوصفه المثلث الذهبي The Golden Triangle) تكون نسبة،

$$\phi = \frac{\text{القاعدة}}{\text{الساق}} \quad (7)$$

تكافئ هذه النسبة نسبة الطول إلى العرض التي تم تعريفها بالنسبة للمستطيل الذهبي.

ستساعد هذه الوحدة على تطوير فهم الطلبة في موضوعات بالرياضيات لا يكثر التعامل معها.

أهداف الأداء Performance Objectives

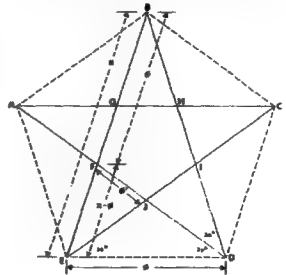
- 1 سوف يعرض الطلبة فهمهم لجملة علاقات بين الخمس، والشكل الخماسي، والنسبة الذهبية.
- 2 سينشئ الطلبة مثلثا ذهبيا.
- 3 سوف يعرض الطلبة بعض خصائص المثلث الذهبي مع دوال مثلثية

التقييم السابق Preassessment

إن بعض المعرفة بالهندسة، والجبر المتوسط تعد ضرورية لهذه الوحدة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليقم طليتك بإنشاء خمس منتظم ABCDE بأي طريقة، بعد ذلك ينبغي، أن يقوموا بوضع شكل خماسي، ACEBD (انظر شكل 1).



شكل (1)

ليكن طول كل ضلع من أضلاع الخمس مساويا لـ ϕ وحدة طول. استعرض مع طليتك قياسات الزوايا المختلفة والمثلثات متساوية الساقين التي نشأت بواسطة الشكل الخماسي والخمس.

خلال الرؤوس B, D, E, F, J, K, L, لكل مثلث من المثلثات الذهبية.

إن عدداً من الخصائص الإضافية للمثلث الذهبي تستحق أن يشار إليها هنا:

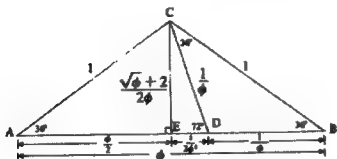
1. في شكل 2، ليكن طول ML وحدة واحدة. بعدئذ من معادلة (7)،

$$\begin{aligned} LK &= \phi = 1\phi + 0 \\ KJ &= \phi^2 = 1\phi + 1 \\ JF &= \phi^3 = 2\phi + 1 \\ FE &= \phi^4 = 3\phi + 2 \\ ED &= \phi^5 = 5\phi + 3 \\ DB &= \phi^6 = 8\phi + 5 \end{aligned} \quad (9)$$

فينشأ عن ذلك سلسلة فايبوناتشي.

2 يقسم منتصف زاوية الرأس بالمثلث الذهبي منصف زاويتي القاعدة في النسبة الذهبية (انظر الشكل 1). وبما أن منصفات زوايا المثلث تلتقي بنقطة واحدة، فإن منتصف الزاوية $\angle EBD$ ينبغي أن يمر خلال النقطة J. ولكن، من (6)، إذن $FJ = \phi'$ ومن معادلة (8) $EF = 1 = EJ = JD$

$$\frac{JD}{ET} = \frac{1}{\phi'} = \phi$$

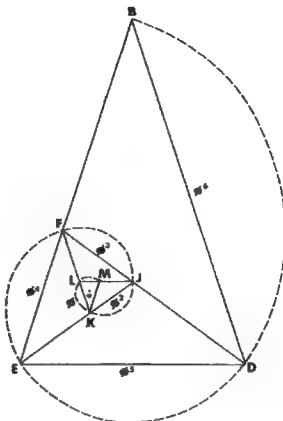


شكل (3)

3. يمكن أن يستخدم المثلث الذهبي في عرض دوال مثلثية محددة بدلالة ϕ (انظر الشكل 3). ليكن المثلث $\triangle ABC$ متساوي الساقين $108^\circ - 36^\circ - 36^\circ$ ، وفيه $AC=CB=1$. ليلتق أحد المنصفات الثلاثية للزاوية C مع قطعة المستقيم AB عند النقطة D. بعدئذ، المثلث $\triangle ACD$ هو مثلث ذهبي، وفيه $\angle CDA = \angle DCA = 72^\circ$. بما أن $AC=1$ بعدئذ $AD=1$ ، ومن المعادلة (7)، $CD = \frac{1}{\phi}$.

بالإضافة إلى ذلك، المثلث متساوي الساقين $\triangle BCD$ ، وفيه $\angle BCD = \angle DBC = 36^\circ$ ، إذن،

$$CD = DB = \frac{1}{\phi}$$



شكل (2)

في المثلث متساوي الساقين $\triangle EFJ$ ، $FJ = \phi'$ ، ونظراً، لاستخدام المادلتين (6) و (7)، $\frac{EF}{FJ} = \frac{1}{FJ} = \phi$ والذي يدل ضمناً على أن

$$FJ = \frac{1}{\phi} = \phi' \quad (8)$$

إذن، الخمس المنتظم FGHJL يحوي ضلعا طول ϕ' . بالعودة إلى المثلث متساوي الساقين $\triangle DEF$ ، يبدو واضحا بأن EJ هو منتصف الزاوية $\angle DEF$.

في الشكل (2)، ليكن FK منتصف الزاوية $\angle EFK$. بعدئذ $FJ = FK = \frac{1}{\phi}$ وان القاعدة $JK = \frac{1}{\phi^2}$. بالإضافة إلى ذلك، $\overline{FK} \parallel \overline{BD}$ نظراً لأن $\angle KKFJ = \angle KJDB$.

وبنفس الأسلوب، يكون منتصف الزاوية $\angle FJK$ موازيا للمستقيم ED ويلتقي FK عند النقطة L، مكوناً مثلثاً ذهبياً آخر $\triangle JKL$. إن عملية تنصيف زاوية القاعدة هذه بمثلث ذهبي يمكن أن تستمر إلى ما لا نهاية لإنتاج سلسلة من المثلثات الذهبية الأصغر، فالأصغر، والتي تتجمع إلى نقطة نهاية، 0 الصفر كنقطة محددة Limiting Point.

إن هذه النقطة، بالمقارنة مع تلك التي حصلنا عليها في المستطيل الذهبي، هي عمود حلزون متساوي الزوايا والذي يمر

التقييم اللاحق Postassessment

1. باستخدام مقلوب المتطابقات المثلثية، جد القيم بدلالة ϕ لكل من \cot ، \sec ، \tan لقياسات الزوايا المبينة في (10)، (11) و (13) أعلاه.
 2. باستخدام صيغة نصف - زاوية، حدد قيم الدوال المثلثية لكل من 18° و 27° بدلالة ϕ .
- ينبغي أن تستخدم هذه الوحدة بصحبة "المستطيل الذهبي".

مراجع References

- Huntley, H.E., The Divine Proportion, New York: Dover, 1970.
- Richard A. Dunlap, The Golden Ration and Fibonacci Numbers, River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., 1997.
- Hans Wasler, The Golden Section, Washington, DC: Mathematical Association of America, 2001

$$AB = AD + DB = 1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

وأن

من النقطة C. اسقط عمودا لكي يلتقي مع \overline{AB} عند النقطة E. ينتج عن هذا:

$$AE = EB = \frac{\phi}{2}$$

بصورة مباشرة في المثلث قائم الزاوية، $\triangle ACE$,

$$\cos 36^\circ = \frac{\phi}{2}$$

(10)

والذي يدل ضمنا على

$$\sin 45^\circ = \frac{\phi}{2}$$

(11)

بالإضافة إلى ذلك

$$ED = AD - AE = 1 - \frac{\phi}{2} = \frac{2 - \phi}{2} = \frac{1}{2\phi^2}$$

(12)

والآن في المثلث قائم الزاوية $\triangle CED$.

$$\cos 72^\circ = \frac{ED}{CD} = \frac{1/2\phi^2}{1/\phi} = \frac{1}{2\phi} = \sin 18^\circ$$

(13)

مغالطات هندسية

69

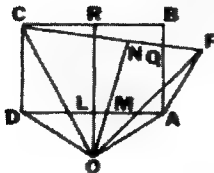
Geometric Fallacies

اعرض لطلابك البرهان الآتي، وسيدركون بسهولة احتوائه على مغالطة. اطلب منهم محاولة تحديد مواطن ظهور الخطأ.

المعطى Given:

المستطيل ABCD.

$$\overline{FA} \cong \overline{FB}$$

R هي نقطة منتصف \overline{BC} N هي نقطة منتصف \overline{CF} 

إن طلبة الهندسة الذين يستمرون بدراسة البراهين، مستخدمين مجموعات إضافية، يتساءلون عن الحاجة إلى تبرير صارم لوجود تلك المجموعات. ولا يفضل الطلبة غالبا الحاجة للبرهنة على وجود، وتفرد هذه المجموعات. بيد أنهم في نفس الوقت يميلون إلى تطوير الاعتماد على شكل تخطيطي دون إجراء تحليل لصحته. تقدم هذه الوحدة براهين مغلوطة إلى الطلبة على أمل نشوء قدرة إضافية لديهم لفهم الحاجة القائمة إلى مثل هذه الصرامة.

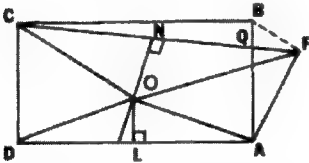
هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء مغالطة هندسية، سيحدد الطلبة مواطن ظهورها.

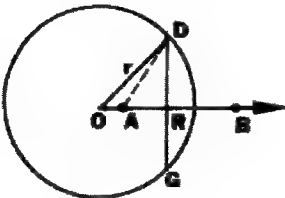
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على إلمام كاف بالبراهين الهندسية لكل من المثلثات المتطابقة، والمتشابهة.

النقطة O لا يمكن أن تقع على العمود النصف للضلع \overline{AD} .
 افترض أن النقطة O هي نقطة تقاطع العمودين النصفين. (كما يأتي الشكل التوضيحي الأصلي). بما أن $\overline{CD} \parallel \overline{AQ}$ ،
 $\angle DCF \equiv \angle AQF$ في المثلث متساوي الساقين $\triangle ABF$.
 $m\angle AFB > m\angle AFC$ ولكن $\angle ABF \equiv \angle AFB$
 وبالتعميم $m\angle ABF > m\angle AFC$ وبما أن $\angle AQF$ هي
 زاوية خارجية للمثلث $\triangle BQF$ ، $\angle ABF > m\angle AQF$
 وعليه، $m\angle AQF > m\angle ABF > m\angle AFC$ أو
 $m\angle DCF > m\angle AFC$ بالتعميم $m\angle AQF > m\angle AFC$
 بما أن $\angle OCF \equiv \angle OFC$ وبالطرح سيكون لدينا
 $m\angle DCO > m\angle OFA$ إذن: $DO > OA$. وهذا تناقض لأن
 $DO = OA$ إذا كان O منتصف \overline{DA} على العمود. لذا لا يمكن أن تكون O
 على العمود النصف للضلع \overline{DA} لأي نقطة O بحيث تكون
 $\angle OAF$ منفرجة.
 ويصح البرهان أعلاه بالنسبة للشكل التوضيحي الآتي
 والذي يظهر بأن $\angle OAF$ لا يمكن أن تكون حادة.



والآن اعرض لطلبك البرهان الآتي وهو أن أي نقطة في
 داخل دائرة تقع أيضا على الدائرة.
 المعطى Given: الدائرة O بنصف قطر r
 لكن A أي نقطة داخل الدائرة ومستقلة عن O
 برهن Prove: A تقع على الدائرة.



لبرهنة أن To Prove: الزاوية القائمة تساوي بقياسها زاوية
 منفرجة $(\angle CDA \equiv \angle FAD)$.

ارسم \overline{RL} عموديا على \overline{CB} .

ارسم \overline{MN} عموديا على \overline{CF} .

يتقاطع \overline{RL} و \overline{NM} عند النقطة O. وإذا لم يتقاطع هذان
 المستقيمان، يمكن أن يكون \overline{RL} ، \overline{NM} متوازيان، وهذا
 يعني بأن \overline{CB} يوازي \overline{CF} وهو امر مستحيل.

ارسم \overline{AO} ، \overline{FO} ، \overline{CO} ، \overline{DO} .

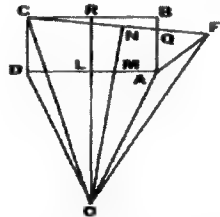
بما أن \overline{RO} هو العمود النصف هو العمود النصف لكل من
 \overline{CB} ، \overline{DA} ، $\overline{DO} \equiv \overline{AO}$ بما أن \overline{NO} هو العمود النصف
 $\overline{CO} \equiv \overline{FO}$ ، \overline{CF} .

وبما أن $\overline{FA} \equiv \overline{BA}$ وكذلك $\overline{BA} \equiv \overline{CD}$ ، سيكون لدينا
 $\overline{FA} \equiv \overline{CD}$ إذن $\triangle FAO \equiv \triangle CDO$ ($SSS \equiv SSS$) لذا
 $\angle ODC \equiv \angle OAF$.

بما أن $\overline{OD} \equiv \overline{OA}$ ، سيكون لدينا $\angle ODA \equiv \angle OAD$.
 والآن، $m\angle ODC - m\angle ODA = m\angle OAF - m\angle OAD$
 أو $m\angle CDA = m\angle FAD$.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

عندما يقوم الطلبة بفحص البرهان ولا يجدوا ثمة خطأ
 فيه، اطلب منهم استخدام المساطر والفرجار لإعادة إنشاء
 الشكل التخطيطي. إن الشكل التخطيطي الصحيح يبدو كما
 يأتي:



ورغم تطابق المثلثات، فإن قدرتنا على طرح زوايا محددة لم
 تعد موجودة الآن. إذن، فإن صعوبة هذا البرهان تكمن في
 اعتماده على شكل تخطيطي رسم بصورة خاطئة.

ولنفرض بيان أن $\angle OAF$ لا يمكن أن تكون زاوية منفرجة،
 ينبغي أن نبين بأنه عندما يقطع \overline{OF} كل من \overline{AB} و \overline{AD} ،
 فإن النقطة O تقع على العمود النصف للضلع \overline{CF} ، فإن

هنا يوجد لدينا "مثلث" يتألف من أربعة مثلثات قائمة الزاوية، وأربعة مستطيلات، وثغرة "Hole".

1. ليتم طلبك بحساب مساحة المناطق الثمانية (دون الثغرة) [416].

2. والآن ليقوموا بحساب المساحة الكلية للشكل. [بما أن $PQ = 32$ والارتفاع $h = 26$ ، $\frac{1}{2}PQ \cdot h = 416$].

سنجابه الآن هذه المسألة: كيف توصلنا إلى نفس المساحة مع الثغرة وبدونها؟

لقد حدثت المغالطة نتيجة للخطأ في 2. إن الشكل ليس مستطيلاً نظراً لعدم وقوع النقاط P, N, M على استقامة واحدة.

إذا كانت النقاط P, N, M تقع على استقامة واحدة، بما أن $\angle RNO$ هي زاوية قائمة، الزاوية $\angle PNR$ مكملة للزاوية $\angle MNT$.

وبما أن $\angle NRP$ هي زاوية قائمة، الزاوية $\angle PNR$ مكملة للزاوية $\angle RPN$.

$$\therefore \angle MNT \cong \angle RPN$$

$$\therefore \triangle MNT \sim \triangle NRP$$

ولكن، ليست هذه هي الحالة.

تنطبق نفس القضية بالنسبة للنقاط Q, O, M . لذا فإن الشكل هو مخمس، وعليه فإن الصيغة التي استخدمناها في 2 ليست صحيحة.

التقييم اللاحق Postassessment

ليتم الطلبة باختيار مغالطة هندسية من أحد الكتب الآتية وبينان "الخطأ" الموجود في البرهان.

مراجع References

- Maxwell, E.A., Fallacies in Mathematics, Cambridge University Press, 1963.
- Northrop, E.P., Riddles in Mathematics, D.Van Nostrand Co., 1944.
- Posamentier, A.S., J.H. Banks, and R.L. Bannister. Geometry, It's Elements and Structure, 2nd ed., McGraw-Hill, 1977, PP. 240-244, 270-71.
- Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursion for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

افترض وقوع B على امتداد \overline{OA} خلال A بحيث : $r^2 = OA \cdot OA$ (يبدو واضحاً بأن OB أكبر من r نظراً لأن OA أقل من r) ليلتق العمود المنصف لـ \overline{AB} في النقطتين D ، و G ، حيث R هي نقطة منتصف \overline{AB} .
وأصبح لدينا الآن $OA = OR - RA$ وكذلك :
 $OB = OR + RB = OR + RA$

$$\therefore r^2 = (OR - RA)(OR + RA)$$

$$r^2 = OR^2 - RA^2$$

$$r^2 = (r^2 - DR^2) - (AD^2 - DR^2)$$

$$r^2 = r^2 - AD^2$$

$$\therefore AD^2 = 0$$

إذن تتطابق A مع D ، وتقع على الدائرة.

إن المغالطة في هذا البرهان تمكن في الحقيقة بقيامنا برسم مستقيم إضافي (\overline{DRG}) مع شرطين هما: إن \overline{DRG} هو العمود المنصف لـ \overline{AB} ، وأنه يقطع الدائرة. في حين بالواقع، فإن جميع النقاط الموجودة على العمود المنصف لـ \overline{AB} تقع خارج الدائرة. وعليه لا تقطع الدائرة.

$$r^2 = OA(OB)$$

$$r^2 = OA(OA + AB)$$

$$r^2 = OA^2 + (OA)(OB)$$

والآن. يفترض البرهان أن

$$OA + \frac{AB}{2} < r$$

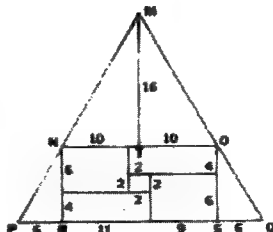
$$2(OA) + AB < 2r$$

$$4(OA)^2 + 4(OA)(AB) + AB^2 < 4r^2$$

$$r^2 = OA^2 + (OA)(AB) \quad \text{بما أن}$$

سيكون لدينا، $AB^2 < 0$ وهو أمر مستحيل.

إن هذا البرهان يؤشر إلى الحرس والاهتمام الذي ينبغي الاعتناء به عند رسم مجموعات إضافية، وعند استخدام شرط "واحد" فقط.



متعدد السطوح المنتظم

Regular Polyhedral



الطلبة بأن هناك t من الحافات عند كل رأس أيضاً. افترض عند إحصاء عدد الحافات (E) لمتعدد سطوح معلوم، بأن عدد الحافات عند كل رأس قد تم إحصائها، ثم ضربت بعدد الرؤوس (V). إن هذا سينتج ضعف عدد الحافات ($2E$) بمتعدد السطوح، لأن كل حافة قد تم عدّها مرتين، مرة عند كل رأسين تصل بينهما. وعليه:

$$tV = 2E \quad \text{أو} \quad \frac{V}{1/t} = \frac{E}{1/2}$$

بنفس الطريقة، عند إحصاء عدد حافات متعدد السطوح، فإن عدد أضلاع (S) كل وجه قد تم إحصاؤها ثم ضربت بعدد وجوه (F) متعدد السطوح. وهذا الأمر سينتج عنه أيضاً ضعف عدد حافات متعدد السطوح، لأن كل ضلع (حافة) قد عدت بكونها تعود إلى وجهين، وعليه:

$$sF = 2E \quad \text{أو} \quad \frac{F}{1/s} = \frac{E}{1/2}$$

$$\frac{V}{1/t} = \frac{E}{1/2} = \frac{F}{1/s}$$

إذن

ينبغي أن يتذكر الطلبة النظرية الآتية حول النسب:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

بمعدّد، دعهم يطبقونها على ما يأتي:

$$\frac{V}{1/t} = \frac{-E}{-1/2} = \frac{F}{1/s} = \frac{V-E+F}{1/t - 1/2 + 1/s}$$

ولكن، بواسطة نظرية أويلر ($V-E+F=2$)

$$\frac{V}{1/t} = \frac{E}{1/2} = \frac{F}{1/s} = \frac{2}{1/t - 1/2 + 1/s}$$

والآن ليقوم الطلبة بحل المعادلة بالنسبة لـ F, E, V :

$$V = \frac{4s}{2s + 2t - st}$$

$$E = \frac{2st}{2s + 2t - st}$$

$$F = \frac{4t}{2s + 2t - st}$$

ينبغي أن يكلف الطلبة بفحص طبيعة كل من: F, E, V . إن

ستعرض هذه الوحدة طريقة يمكن استخدامها للبرهنة على عدم وجود أكثر من خمسة متعددات السطوح المنتظمة.

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بتعريف متعدد السطوح المنتظم، وتمييز جميع أنواع متعددات السطوح، مع بيان سبب عدم وجود أكثر من خمسة متعددات السطوح المنتظمة.

التقييم السابق Preassessment

اعرض نماذجاً فيزيائية لجملة من متعددات السطوح، ولقم الطلبة بإحصاء عدد الرؤوس (V)، وعدد الحافات (E)، وعدد الوجوه (F) في كل منها. وبعد أن يضعوا جدولاً بالنتائج التي حصلوا عليها سوف يلاحظون العلاقة:

$$V+F = E+2$$

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد إنشاء نظرية أويلر بصورة وضعية Empirically، ($V+F=E+2$)، قد يرغب الطلبة في تطبيقها للوصول إلى استنتاج آخر يحدد متعدد السطوح. سيتمتع تسلسل برهان هذه النظرية بشكل أساس على اهتمام طلبة الصف.

إن أحد موارد البرهان هو:

Geometry It's Element and Structure by A.S. Posamentier, J.H. Banks, and R.L. Bannister, PP. 574-576 (McGraw, Hill, 1977).

إن التطبيق المتع لهذه النظرية هو البرهان على عدم وجود أكثر من خمسة من متعددات السطوح المنتظمة. ينبغي أن تبتدئ بتعريف متعدد السطوح المنتظم بوصفه شكلاً مصمماً محاطاً بجزء من المستويات يطلق عليها الوجوه Faces، كل منها عبارة عن متعدد أضلاع (متطابق الأضلاع والزوايا). ويعد المكعب مثلاً شائعاً على متعدد السطوح المنتظم.

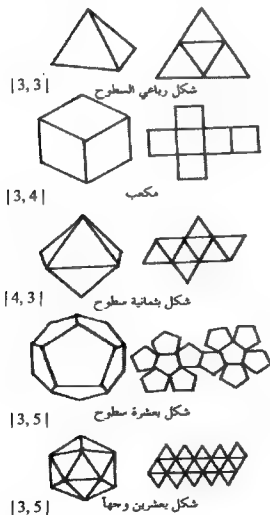
للبدء بالبرهنة على وجود خمسة متعددات سطوح منتظمة فقط، دع s تمثل عدد الأضلاع في كل وجه، ودع t تمثل عدد الوجوه عند كل رأس.

نظراً لوجود t من الوجوه عند كل رأس، ينبغي أن يدرك

عند هذه النقطة، ليضع الطلبة محددات على s ، و t . كما ينبغي أن يسرعوا ببيان عدم إمكانية لوجود متعدد أضلاع تقل عدد أضلاعه عن ثلاثة أضلاع، وعليه ستكون $s \geq 3$. كذلك، يجب أن يدركوا بأنه ينبغي أن يكون عند كل رأس من رؤوس متعدد السطوح ثلاثة وجوه كحد أدنى، وعليه ستكون $t \geq 3$.

إن هاتين الحقيقتين تؤشران بوضوح بأن قيمة كل من $(s-2)$ و $(t-2)$ ينبغي أن تكون موجبة على الدوام. ونظراً لأن حاصل ضربهما يجب أن يكون أقل من أربعة، يجب أن يكون الطلبة قادرين على أعداد الجدول الآتي:

اسم متعدد السطوح	F	E	V	T	S	t-2	s-2	(s-2)(t-2)
رباعي السطوح Tetrahedron	4	6	4	3	3	1	1	1
سداسي السطوح Hexahedron	6	12	8	3	4	1	2	2
ثماني السطوح Octahedron	8	12	6	4	3	2	1	2
متعدد السطوح-12 Dodecahedron	12	30	20	3	5	1	3	3
متعدد السطوح-20 Icosahedron	20	30	12	5	3	3	1	3



إدراك وجوب كون هذه الأعداد موجبة، وحاول أن تستنتج من الطلبة بأن المقام ينبغي أن يكون موجباً (نظراً لأن s و t موجبتان). إذن.

$$2s + 2t - st > 0$$

لنتمكن من التحليل. أضف (-4) إلى طرفي المتباينة للحصول على

$$2s + st - st - 4 > -4$$

اضرب كل من الطرفين بـ (-1)، لتحصل على:

$$-2s - 2t + st + 4 < 4 \quad \text{أو} \quad (s-2)(t-2) < 4$$

ونظراً لعدم وجود قيم ممكنة أخرى بالنسبة لكل من s و t ، يعد الجدول أعلاه تاماً. وعليه توجد خمسة أشكال من متعددات السطوح المنتظمة فقط.

ينبغي أن يشجع الطلبة الذين يمتلكون قابليات متميزة على البحث والاستقصاء عن وجود متعددات السطوح هذه. إن أحد الموارد التي توفر إمكانية التحقق من ذلك هو: عناصر اقليدس، الكتاب XIII.

إن النظرة المفحصة على محتويات الجدول السابق تدل ضمناً على وجود تناظر واضح بين سداسي السطوح وثمانى السطوح بالإضافة إلى متعدد السطوح -12، ومتعدد السطوح -20. ألا وهو. إذا تم تبادل s و t فإن التناظرات سوف تبدو أكثر وضوحاً. يضاف إلى ذلك. فإن هذا الجدول يبين بأن وجوه متعددات السطوح المنتظمة إما أن تكون مثلثات متساوية الأضلاع، أو مربعات. أو خمسمات منتظمة (انظر عمود S). وينبغي أن يشجع الطلبة. أيضاً، على إجراء مزيد من التحقق والتصميم لنظرية اويلر ($V + F = E + 2$) بتوظيف البيانات الموجودة في الجدول السابق.

إن الأشكال التالية تظهر خمسة متعددات سطوح - منتظمة بالإضافة إلى "الأنماط" التي يمكن استخدامها لإنشاء متعددات السطوح هذه (يقطعها وطبها بصورة صحيحة).

هذه الأقسام بحيث يمكن أن يعد تقرير خصب عنها بواسطة أحد طلبة الصف.

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقيم الطلبة بتعريف وتمييز متعدد السطوح المنتظم.
2. ليقيم الطلبة بتوضيح سبب عدم إمكانية وجود أكثر من خمسة من متعددات السطوح المنتظمة.

مقدمة إلى الطوبولوجيا

An Introduction to Topology



شكل (4)

شكل (5)

شكل (6)

اطلب منهم إعادة رسم كل شكل دون أن يرفعوا أقلامهم عن الأوراق. ينبغي أن يدرك الطلبة بأنه إذا رسم شكل 1 على صفحة مطاطية فانهم يستطيعون فتحها ولديها للحصول على كل من الأشكال 2، 5، 6.

افترض أن الطلبة سيأخذون يعين الاعتبار بعض الأشكال الهندسية في الفراغ. وليقوموا مثلاً برسم مكعب.



شكل (7)

اسأل الطلبة إذا كانت هناك ثمة إمكانية لتحويل المكعب إلى أي من الأشكال 8، 9، أو 10 بواسطة القتل Twisting أو الالتواء Bending.

رغم الإشارة إلى هذه الأشكال بوصفها الأجسام الأفلاطونية الخمسة Five Platonic Solids، يعتقد بأن ثلاثة منها (رباعي السطوح، وسداسي السطوح، ومتعدد السطوح-12) كانت نتيجة لنظرية فيثاغورث، بينما يعزى الشكلان المتبقيان (ثماني السطوح. ومتعدد السطوح-20) إلى جهود ثايتيوس Thaeus (ق.م 369-414). وهناك المزيد من المعلومات التاريخية حول

يمكن أن يدرس درس عن الطوبولوجيا بعد إكمال تعليم الهندسة. وسوف تعرض هذه الوحدة بعض المبادئ، والمفاهيم الأساسية للطوبولوجيا، وتطبيقاتها الميدانية.

أهداف الأداء Performance Objectives

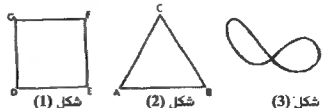
1. بإعطاء رسمين هندسيين سيقوم الطلبة بتحديد إذا كانا متكافئين طوبولوجياً.
2. بإعطاء شكل متعدد السطوح، أو مستوي، سيتمكن الطلبة من بيان أن $V+F-E=2$ (الفراغ) وأن $V+F-E=1$ (مستوي).

التقييم السابق Preassessment

إن معرفة كافية بهندسة المرحلة السابقة ينبغي أن تتوفر لدى الطلبة بفترة تسبق هذه الوحدة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليقيم الطلبة برسم مجموعة من المنحنيات المغلقة Closed Curves. بعدئذ دعهم يعمدون إلى التمييز بين المنحنيات المغلقة البسيطة وتلك التي لا تنقسم بالبساطة. إن بعض الاحتمالات الممكنة ستكون كما يأتي:



شكل (1)

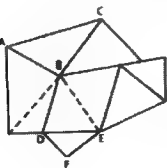
شكل (2)

شكل (3)

الحجم، ولكن "حدوده" ستبقى كما هي دون تغيير. وسوف تصبح الحافات أضلاعاً لمنطقة متعددة الأضلاع، وسيكون هناك نفس العدد من الحافات والرؤوس في شكل المستوى كما في متعدد السطوح. إن كل متعدد أضلاع لا يكون مثلثاً يمكن أن يقطع إلى مثلثات، أو مساحات مستطيلة يرسم الأوتار. وفي كل مرة يرسم فيها قطر، سوف نزيد عدد الحافات بمقدار 1، ولكننا سنزيد بنفس الوقت عدد الوجوه بمقدار 1 أيضاً. إن قيمة $V-E+F$ ستبقى كما هي. وسوف تمتلك المثلثات التي تقع على الحافات الخارجية للمنطقة، أما حافة واحدة على حدود المنطقة، كما في المثلث $\triangle ABC$ في الشكل المصاحب، أو هناك حافتان على الحدود، كما في المثلث $\triangle DEF$. إن مثلثات مثل $\triangle ABC$ يمكن أن ترفع برفع أحد أضلاع الحدود (يعني، \overline{AC}). وبعلنا هذا نكون قد قللنا عدد الوجوه بمقدار 1 وعدد الحافات بمقدار 1. وتبقى $V-E+F$ دون تغيير. إن مثلثات مثل $\triangle DEF$ يمكن أن ترفع برفع حافتين (يعني، \overline{EF} و \overline{DF}). وبعلنا هذا نكون قد قللنا عدد الحافات بمقدار 2، وعدد الوجوه بمقدار 1، وعدد الرؤوس بمقدار 1. ولا زالت الصيغة $V-E+F$ لا تتأني من أي تغيير في قيمتها.

نستمر بهذا الأسلوب لحين يتبقى لدينا مثلث واحد، يحوي هذا المثلث على ثلاثة رؤوس، وثلاثة حافات، ووجه واحد. إذن $V-E+F=1$ في المستوى. سوف نستنتج بأنه عندما نستبدل الوجه الذي رقعناه سيكون لدينا $V-E+F=2$ بالنسبة لمعدد الأسطح في الفراغ.

بعد أن تكون قد توفرت للطلبة فرصة لتعميد أنفسهم على هذه النظرية، ينبغي أن يشجعوا على اختبارها وضعياً بواسطة متعدد السطوح الذي قاموا بإنشائه. وبعد الطين وسطاً مناسباً لهذا النشاط



شكل (11)



شكل (8)



شكل (9)



شكل (10)

وسيجد الطلبة بأن الشكل الوحيد من هذه الأشكال الذي يمكن للمكعب أن يتحول إليه هو الكرة.

لذا يمكن القول بأن المكعب هو مكافئ طوبولوجيا للكرة. اخبر الطلبة بأن دراسة الأشكال بهذه الطريقة سوف تؤدي بنا إلى فرع من فروع الرياضيات يطلق عليه "الطوبولوجيا" *Topology* أو "هندسة صفيحة المطاط" *Rubber Sheet Geometry*.

يمكن الحصول على إحدى العلاقات المثيرة في الهندسة بصورة مباشرة من الطوبولوجيا. وتتضمن هذه العلاقة رؤوس (V)، وحافات (E)، ووجوه (F) متعدد السطوح أو متعدد الأضلاع. إن هذه العلاقة تنص على: $V+F-E=2$ (في الفضاء ثلاثي الأبعاد)، أو $V+F-E=1$ (في مستوى). ليتأمل الطلبة شكلاً خماسياً. يحتوي الخمس على خمسة رؤوس، وخمسة حافات، ووجهاً واحداً: إذن $V+F-E=5+1-5=1$. قد يرغب الطلبة الآن بتأمل شكلاً ثلاثياً الأبعاد. إن المكعب (شكل 7) يحتوي على ثمانية رؤوس، وستة أوجه، واثنى عشر حافة. وعليه فإن، $V+F-E=8+12-6=2$. يمكن عرض هذه العلاقات على طلبة الصف باستخدام شفافيات جهاز الإسقاط الضوئي، أو بواسطة نماذج فيزيائية.

افترض أن مستويًا قد قطع جميع حافات إحدى الزوايا التربيعية لمكعب (قطعة من الطين على شكل مكعب قد تكون ذات فائدة في هذا المقام). إن هذا المستوى سوف يقصل أحد الرؤوس عن المكعب. ولكن، من خلال العملية، سوف يضاف إلى متعدد السطوح الأصلي: 1 وجه، 3 رؤوس، و 3 حافات. إذن بالنسبة لمعدد السطوح الجديد، ازدادت قيمة V بمقدار 2، وزادت قيمة F بمقدار 1، بينما زادت قيمة E بمقدار 3، وعليه ستبقى $V+F-E$ دون تغيير.

تكون الأشكال متكافئة طوبولوجيا إذا استطع المرء أن يحدث تماكناً Coincide مع أشكال أخرى باستخدام التشويه Distortion. أو الانكماش Shrinking، أو الشد Stretching، أو اللي Bending. وإذا أزيل أحد وجوه متعدد السطوح فإن الشكل التبعي سيكون متكافئاً طوبولوجيا مع منطقة من المستوى. إن هذا الشكل الجديد (انظر شكل 11) لن يمتلك نفس الشكل أو



شكل (أ-14)



شكل (ب-14)



شكل (أ-12)



شكل (ب-12)



شكل (أ-13)



شكل (ب-13)

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقرر الطلبة فيما إذا كان أي من الأشكال 12، 13، أو 14 إن يكون قابلاً للتثني إلى شكل آخر.
2. بين أن المعادلة $V+F-E=2$ تنطبق على شكل مربع السطوح، ومثلث السطوح.
3. بين أن المعادلة $V+F-E=1$ تنطبق على شكل مثلث السطوح أو متعدد السطوح-12.

زوايا على ساعة

72

Angles on a Clock

الجواب ببساطة هو 4:20. وعندما ستخبرهم بأن ذراع الساعات يتحرك بصورة منتظمة، سوف يبدأون بتقدير كون الجواب واقعا بين 4:21 و 4:22. وسيدركون بأن ذراع الساعات يتحرك خلال فترة زمنية بين مؤشرات الدقائق كل 12 دقيقة. وعليه فإن الذراع سوف تغادر الفترة 4:21-4:22 عند 4:24. ولكن هذا لا يجيب على السؤال الأصلي حول الوقت الدقيق للتشاك.

في الصف المبتدئ بمادة الجبر، وعند دراسة مسائل الحركة المنتظمة، دع الطلبة يتأملون هذه المسألة بهذا المنظور. إن أفضل طريقة لجعل الطالب يبتدئ بفهم حركة ذراعي الساعة تكمن في جعله يأخذ بعين الاعتبار حركة الذراعين بصورة مستقلة حول الساعة وبسرعة منتظمة. إن تأشيريات الدقائق على الساعة (يسمى إليها منذ الآن بالـ "مؤشرات") سوف تعمل على إظهار المسافة بالإضافة إلى الوقت. ينبغي أن يفتزع قياس مشابه (تمثالي) في هذا المكان للحركة المنتظمة للسيارات (وهو موضوع شائع استخدم بكثرة في المسائل اللفظية في المساق الدراسي للجبر

يمكن استخدام هذه الوحدة كنشاط ترفيهي في مراحل المدارس الثانوية الدنيا حيث يمكن اكتشاف بعض العلاقات المثيرة للاهتمام، أو يمكن استخدامها كتطبيق إثرائي بالنسبة للطلبة المبتدئين في دراسة الجبر بموضوع الحركة المنتظمة Uniform Motion.

أهداف الأداء Performance Objective

- 1- سيحدد الطلبة الزمن الدقيق الذي ينشأ عن زاوية محددة بذراعي عقارب الساعة.
- 2- سيحل الطلبة مسائل تتعلق بمواضع ذراعي عقارب الساعة.

التقييم السابق Preassessment

اسأل الطلبة ما هو الوقت (بصورة دقيقة) الذي تتشاك عنده ذراعي الساعة بعد الساعة الرابعة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن أول رد فعل لطلبتك إزاء حل هذه المسألة سيكون بأن

ذراع الساعات، مفترضين ثانية بأن ذراعات الساعات يبقى ثابتاً. بعدئذ يضرب عدد المؤشرات 350، بمعامل التصحيح، $\frac{12}{11}$ ، وسوف يحصلون على الوقت المضبوط $\left(7:38\frac{12}{11}\right)$ الذي يتشابه عنده ذراعاً الساعة.

لزيادة فهم الطلبة بهذا الأسلوب اطلب منهم اعتبار شخص يتحقق من ساعة يدوية إزاء ساعة كهربائية، وقد لاحظ بأن ذراعي ساعة اليد تتشابه كل 65 دقيقة (كما تقاس بالساعة الكهربائية). اسأل الصف هل أن ساعة اليد: سريعة، أو بطيئة، أو دقيقة.

قد ترغب في جعلهم يأخذون المسألة بعين الاعتبار بالطريقة الآتية. عند الساعة 12 يتشابه ذراعي ساعة بصورة تامة. باستخدام الطريقة التي وصفت سابقاً نجد بأن الذراعين سوف يتشابهان ثانية عند الساعة $12:05\frac{5}{11}$: 1 بالضبط، ومرة ثانية

عند $10:20\frac{10}{11}$ بالضبط، ومرة ثانية عند $3:16\frac{4}{11}$ بالضبط، وعلى هذا النحو باستمرار. في كل حقبة هناك فترة زمنية مقدارها $65\frac{5}{11}$ دقيقة بين موقعي التشابه. وعليه فإن الشخص المراقب كان مخطئاً بمقدار $\frac{5}{11}$ من الدقيقة. والآن دع الطلبة يحددون فيما إذا كانت الساعة سريعة أو بطيئة.

هناك الكثير من المسائل الممتعة، والبالغة الصعوبة في بعض الأحيان، والتي تصبح سهلة باستخدام معامل التصحيح آنف الذكر. تستطيع أن تطرح مسائلك على الطلبة بسهولة ويسر.

على سبيل المثال، تستطيع أن تسأل الطلبة إيجاد الأوقات المضبوطة عندما يكون ذراعاً الساعة متعامدين (أو يكونان زاوية مستقيمة) بين، مثلاً، الساعة الثامنة والتاسعة.

مرة ثانية، ينبغي أن توجه الطلبة صوب تحديد عدد المؤشرات التي يجب على ذراع الدقائق أن يسافرها من موقع "12" لحين أن يكون الزاوية المطلوبة مع ذراع الساعات الثابت.

بعدئذ دعهم يضربون هذا العدد بمعامل التصحيح $\left(\frac{12}{11}\right)$ للحصول على الوقت الحقيقي-المضبوط يعني، لإيجاد الوقت الصحيح بحيث يكون ذراعاً الساعة متعامدان للمرة الأولى بين الساعة 8 و 9، حدد الموقع المطلوب لذراع الدقائق عندما يكون ذراع الساعات ثابتاً (هنا، على مؤشر الدقائق 25). بعدئذ اضرب 25 بـ $\frac{12}{11}$ لتحصل على $8:27\frac{3}{11}$ ، وهو الوقت المضبوط الذي يكون عنده الذراعان متعامدان للمرة الأولى بعد الساعة الثامنة.

بالنسبة للطلبة الذين لم يدرسوا مادة الجبر، تستطيع أن تبرر

الأولي). إن مسألة تتضمن مركبة سريعة تتخطى مركبة بطيئة تعد مناسبة في هذا المقام.

لقد أظهرت الخبرة بأن القياس المتشابه (التمائلي) يجب أن ينتخب من بين حالات محددة بدلاً من التعميم المجرد. من المفيد توجيه الطلبة نحو إيجاد المسافة اللازمة لسيارة تسير بسرعة 60 ميل/ساعة لكي تتخطى سيارة تقدمتها بمسافة 20 ميلاً عن نقطة البداية. وتسير بسرعة 5 ميل/ساعة.

والآن دع الطلبة يأخذون ينظر الاعتبار الساعة 4 كوقت ابتدائي للساعة. وستركز مسألتنا على تحديد، بالضبط، متى سيتخطى ذراع الدقائق ذراع الساعات بعد الساعة الرابعة. افترض أن سرعة ذراع الساعات تساوي 2، بعدئذ ينبغي أن تكون سرعة ذراع الدقائق 12. وسنبعث عن المسافة، مقاسة بعدد المؤشرات التي تم عبورها، والتي يجب على ذراع الدقائق اجتيازها لتخطى ذراع الساعات.

دعنا نشير إلى هذه المسافة بوصفها d من المؤشرات. حينئذ فإن المسافة التي يسافرها ذراع الساعات هي $d-20$ مؤشرة، نظراً لأنها تتقدم بـ 20 مؤشرة في بدايتها على ذراع الدقائق. ولكي يحصل ذلك، فإن الوقت المطلوب لذراع الدقائق $\frac{d}{12r}$ ، ولذراع الساعات $\frac{d-20}{r}$ ، يجب أن يكون متساوياً. لذا فإن $\frac{d}{12r} = \frac{d-20}{r}$ وكذلك:

$d = \frac{12}{11} \cdot 20 = 21\frac{9}{11}$. إذن فإن ذراع الدقائق سوف يتخطى ذراع الساعات عند $21\frac{9}{11}$: 4 بالضبط

تأمل الصيغة $d = \frac{12}{11} \cdot 20$. إن المقدار 20 يمثل عدد المؤشرات التي يجب على ذراع الدقائق اجتيازها للوصول إلى المكان المطلوب، وبافتراض أن ذراع الساعات يبقى ثابتاً في محله. ولكن من الواضح إن ذراع الساعات لا يبقى ثابتاً، وعليه ينبغي علينا أن نضرب هذه الكمية بنسبة $\frac{12}{11}$ إلى أمام. دعنا نرمز إلى هذه النسبة $\left(\frac{12}{11}\right)$ بوصفها "معامل التصحيح Correction Factor". ليقم طلبة الصف بالتحقق من صحة معامل التصحيح المذكور منطقياً وجبرياً.

لجمل استخدام معامل التصحيح مألوف لدى الطلبة، اختر بعض المسائل القصيرة والسهلة. فعلى سبيل المثال، تستطيع أن تطلب منهم إيجاد الوقت، بالضبط، عندما يتشابه ذراعاً الساعة بين الساعة 7 والساعة 8. هنا سيعقد الطالب إلى تحديد المسافة التي ينبغي أن يسافرها ذراع الدقائق من موقع "12" إلى موقع

التقييم اللاحق Postassessment

1. عند أي وقت سيتشابك ذراعاً الساعة بعد الساعة الثانية؟
2. عند أي وقت سيتعامد ذراعاً الساعة بعد الساعة الثالثة؟
3. كيف يتغير "معامل التصحيح" إذا كانت ساعتنا ذات دورة مقدارها 24 ساعة؟
4. كيف سيكون "معامل التصحيح" إذا كنا نبحث عن الوقت المضبوط الذي يكون عنده ذراع الثواني وذراع الدقائق متعامدان بعد (ضع وقتاً محدداً)؟
5. ما هي الزاوية التي يحددها ذراعي الساعة عند (ضع وقتاً محدداً)؟
6. ما هو أول وقت، بالضبط، عندما يقطع ذراع الثواني الزاوية الناشئة عن ذراعي الدقائق والساعات بعد: (ضع وقتاً محدداً)؟

لهم معامل التصحيح $\frac{12}{11}$ بالنسبة للفترة الزمنية بين التشابكين كما يأتي:

فكر بذراعي الساعة عند العصر. خلال الساعات الاثني عشر التالية (يعني، لحين وصول الذراعين إلى نفس الموضع عند منتصف الليل) سيصنع ذراع الساعات دورة واحدة، وذراع الدقائق 12 دورة. وان ذراع الدقائق سوف ينطلق على ذراع الساعات 11 مرة (يتضمن منتصف الليل، ولكن ليس وقت العصر، مبتدئاً بعد تفرق الذراعين عند وقت العصر).

نظراً لأن كل ذراع تدور بسرعة ثابتة، فإن الذراعين يتشابكان كل $\frac{12}{11}$ من الساعة، أو $65\frac{5}{11}$ دقيقة.

يمكن أن تبسط هذه الحقيقة على حالات أخرى. ينهي أن يستمد الطلبة إحساساً عميقاً بالإنجاز، والمتعة كنتيجة لتوظيف هذه الطريقة البسيطة في حل ما يبدو على الدوام من مسائل الساعة المعقدة.

إيجاد المعدل (المتوسط) التوافقي

Averaging Rates-The Harmonic Mean

73

نفس الطريق وبمعدل 60 ميل/ ساعة. ما هو متوسط سرعتها بالنسبة للرحلتين؟

ستعرض هذه الوحدة طريقة مختصرة لتحديد متوسط معدلين أو أكثر. (معدلات، سرعة، كلفة، إنتاج، ... الخ).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ستعمل المسألة السابقة بوصفها محفزاً مناسباً بالنسبة لهذه الوحدة. إن معظم الطلبة غالباً ما يعرضون المقدار 45 ميلاً/ساعة جواباً لهذه المسألة. إن تفسيرهم سوف يركز على كون 45 هي متوسط السرعتين 30 و 60. أمر صحيح! ولكن يجب عليك أن تقتنعهم بأنه، بما أن العددين 30 و 60 يمثلان معدلًا للسرعة، فلا يمكن التعامل معها ككميات بسيطة. وسيرغب الطلبة بمعرفة ماهية الفرق الذي ينشأ عن الخاصية التي يتصفان بها.

إن المهمة الأولى ستكون بإقناع طلبتك بأن إجابتهم الأصلية، 45 ميل/ساعة، هي خاطئة. ودعمهم يدركون بأنه حين انطلقت

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء معدلات مختلفة لقاعدة شائعة، سيقوم الطلبة بإيجاد متوسط هذه المعدلات.
2. بإعطاء مسألة تتطلب متوسط معدلات معلومة، سيقوم الطلبة بتطبيق مفهوم المتوسط التوافقي بصورة صحيحة عندما يكون قابلاً للاستخدام، أو التطبيق.

التقييم السابق Preassessment

ليقم الطلبة بحل هذه المسألة:

انطلقت نورين Noreen بمجلتها من منزلها إلى مكان العمل بسرعة 30 ميل/ساعة. بعدها عادت إلى منزلها من العمل عبر

وسوف يلاحظون بأن $\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$ هو بالحقيقة معكوس متوسطي معكوس R_1 ، R_2 . إن مثل هذا المتوسط يطلق عليه "المتوسط التوافقي *Harmonic Average*". لا ريب بأن الحديث عن المتوسط المتناسق سيكون مرتباً. إن تماثلاً من الأعداد يطلق عليه متوافقاً إذا كانت ثلاثة من أعضائه المتتابعة بالتعاقب، a ، b ، c تمتلك الخاصية:

$$\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c} \quad (2)$$

يمكن إعادة كتابة هذه الصيغة كما يأتي:

$$a(b-c) = c(a-b) \quad (3)$$

بالقسمة على abc سنحصل على:

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \quad (4)$$

تظهر هذه العلاقة بأن معكوسات التعاقب المتوافق هي في تعاقب رياضي، كما مع $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ ، $\frac{1}{c}$. وعندما تكون ثلاثة حدود في تعاقب رياضي فإن الحد متوسط الموقع هو متوسطهم (معدلهم). إذن $\frac{1}{b}$ هو المتوسط الحسابي بين $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{c}$ ؛ ويكون b هو المتوسط التوافقي بين a و c .

يوصف b بدلالة a ، c في معادلة (4):

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}, \quad b = \frac{2ac}{a+c} \quad (5)$$

ليقارن الطلبة بين المعادلتين (1) و (5).

بنفس الأسلوب قد ترغب بجعل طلبة الصف يتأملون المتوسط المتناسق للأعداد الثلاثة t ، s ، r :

$$\frac{3}{\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}} = \frac{3rst}{st + rt + rs}$$

وقد يرغب الطلبة بتوسيع هذه العلاقة لتحديد "صيغة formula" بالنسبة للمتوسط المتناسق لأعداد أربعة k ، m ، n ، p :

$$\frac{4}{\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}} = \frac{4kmnp}{mnp + kmp + kmp + kmn}$$

ليأخذ الطلبة بعين الاعتبار المسألة الآتية:

اشترت ليذا Lisa بمبلغ 2 دولار من أنواع مختلفة من الأقلام أسعار كل منها: 2 سنت، 4 سنت، 5 سنت، على التوالي. ما هو متوسط السعر المدفوع لكل قلم؟

إن الجواب على هذه المسألة هو $3\frac{3}{19}$ ، المتوسط التوافقي لكل من 2، 4، 5. حاول أن تركز على النقطة التي تبرر صحة هذا الأمر، نظراً لأن كل معدل يعمل على نفس القاعدة، 2 دولار.

نورين يجعلتها من المنزل إلى العمل قد قادت عجلتها ضعف الزمن الذي استغرقته في عودتها. إذن، ليس من الصحيح إعطاء كل من معدلي السرعة نفس "الوزن *Weight*". وإذا لم تتوفر لدى طلبتك قناعة كافية بهذا الأمر، أسألهم فيما إذا كانت درجات الاختبار خلال الفصل الدراسي 90، 90، 90، 90، 40، أي من الطرق الآتية سوف يستخدمونها لإيجاد متوسط درجاتهم:

$$90 \quad \text{(متوسط الاختبارات الأربعة الأولى)}$$

$$+ \frac{40}{2} \quad \text{(آخر درجة اختبار)}$$

$$65 = 2 \div 130$$

أولاً: $90 = 90 + 90 + 90 + 90 + 40 = 400$ ، $80 = 5 \div 400$. يتوقع بأن الطلبة سيقترحون الآن بأنه يمكن الحصول على جواب المسألة الأصلية بواسطة $40 = \frac{30+30+60}{2}$. وهذا صحيح تماماً؛ ولكن جواباً بسيطاً كهذا يصعب توقعه إذا كان أحد المعدلين ليس مضاعفاً للآخر. إن معظم الطلبة سرجعون الآن بطريقة أكثر تعميماً للحل. إن أحد هذه الحلول يركز على العلاقة: المعدل \times الزمن = المسافة. تأمل ما يأتي:

$$T_1 = \frac{D}{30} \quad \text{(زمن الذهاب إلى العمل)}$$

$$T_2 = \frac{D}{60} \quad \text{(زمن العودة إلى المنزل)}$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{D}{20} \quad \text{(الزمن الكلي للمرحلتين)}$$

$$R = \frac{2D}{T} = \frac{2D}{D/20} = 40 \quad \text{(معدل الرحلة الكلية)}$$

إن R ، بالحقيقة، هو "متوسط المعدل" بالنسبة للرحلة الكلية، نظراً لأن المسائل من هذا النوع تتعامل مع الحركة المنتظمة.

إن من المسائل ذات الأهمية الخاصة هي تلك التي تكون المعدلات التي يجب احتساب متوسطاتها من القاعدة المشتركة (مثال، نفس المسافة بنفس المعدلات المختلفة). ليتأمل الطلبة المسألة الأصلية بتعابير عامة، حيث تكون المعدلات السرعة R_1 ، R_2 (بدلاً من 30 و 60)، وكل منها لمسافة مقدارها D . وعليه،

$$\text{ستكون } T_1 = \frac{D}{R_1} \text{ وكذلك } T_2 = \frac{D}{R_2} \text{، بحيث أن:}$$

$$T = T_1 + T_2 = D \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{D(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$$

ولكن دع طلبتك يأخذون بعين الاعتبار:

$$R = \frac{2D}{T} = \frac{2D}{D \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (1)$$

التقييم اللاحق Postassessment

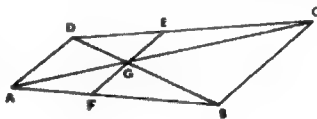
1. إذا حلت طائرة من نيويورك إلى روما بسرعة 600 ميل/ساعة وقفلت راجعة عبر نفس المسار بسرعة 500 ميل/ساعة، ما هو متوسط معدل سرعتها بالنسبة للرحلة الكلية.
2. اشترت أليس Alice بقيمة دولارين ثلاثة أنواع من المكسرات، أمانها 40 سنت، 50 سنت، و 60 سنت لكل باوند، على التوالي. ما هو متوسط الثمن الذي دفعته أليس لكل باوند من المكسرات؟
3. في شهر حزيران، حصل ويلي Willie على 30 نقطة بالنسبة لمتوسط ضربات مضرب مقدارها 300، ولكنه حصل في شهر أيار على 30 نقطة بالنسبة لمتوسط ضربات مضرب مقدارها 400. ما هو متوسط ضربات مضرب ويلي في شهري أيار وحزيران؟
4. جد المتوسط المتناسق لكل من: 2، 3، 5، 6، 2، 9.

مراجع References

- Posamentier, A. S., and S. Krulik, Teachers! Prepare Your Students for the Mathematics for SAT1: Methods and Problem Solving Strategies, Thousand Oaks, CA: Crowin, 1996.
- Posamentier, Alfred S., and Charles, T-Salkind, Challenging Problems in Algebra, New York: Dover 1996.
- Posamentier, Alfred S., and Charles T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, New York: Dover, 1996.
- Posamentier A. S., "The Harmonic Mean and Its Place Among Means", in Readings for Enrichment in Secondary School Mathematics, Edited by Max A. Sobel. Reston, VA: NCTM, 1988.

إن مسائلًا مشابهة (انظر الاختبار اللاحق) يمكن أن تطرح ويبدأ الطلبة حلها في هذا الوقت.

وقد ترغب في تأمل مخطط هندسي توضيحي للمفهوم. رغم أن المتوسط التوافقي يتمتع جل البارزين هندسياً في الهندسة الإسقاطية Projective Geometry، فإن من المناسب إعطاء مخططاً توضيحياً للمتوسط التوافقي في الهندسة التركيبية Synthetic Geometry. ليتأمل الطلبة طول قطعة تحتوي على نقطة تقاطع وتري شبه منحرف وموازي للقاعدتين، وينتهي بتين على الساقين (انظر شكل EGF أدناه). إن طول هذه القطعة، \overline{EGF} ، هو المتوسط التوافقي بين طولي القاعدتين \overline{AD} ، \overline{BC} . في الشكل أدناه، $ABCD$ هو شبه منحرف، وفيه $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ويتقاطع وتراه عند النقطة G . كذلك $\overline{EGF} \parallel \overline{BC}$ ، وكذلك \overline{AFB} ، \overline{DEC} .



وبما أن $\overline{GF} \parallel \overline{BC}$ ، $\triangle AFG \sim \triangle ABC$ ، وأن $\frac{AF}{FG} = \frac{AB}{BC}$. بنفس الطريقة، بما أن $\overline{GF} \parallel \overline{AD}$ ، $\triangle BGF \sim \triangle DBA$ ، وأن $\frac{BF}{FG} = \frac{AB}{AD}$. وعليه فإن $AF + BF = AB$ ، وبما أن $\frac{AF}{FG} + \frac{BF}{FG} = \frac{AB}{BC} + \frac{AB}{AD}$ ، $\frac{AB}{FG} = \frac{AB}{BC} + \frac{AB}{AD}$ ، أو $\frac{1}{FG} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}$. ونفس الأسلوب يمكن أن يعرض بأن $EG = \frac{(BC)(AD)}{BC + AD}$ ، إذن EF هو المتوسط

التوافقي بين BC ، AD .

غلطات بلهاء

74

Howlers

أول رد فعل منهم بالسؤال عن إمكانية إجراء هذا على كسور تتألف من أعداد تتألف من رقمين.

تحدى طلبتك بإيجاد كسر آخر (يتألف من عدد ذي رقمين) حيث يصري عليه هذا النوع من الاختصار. قد يورد الطلبة $1 = \frac{5}{5} = \frac{55}{55}$ كتوضيح لهذا النوع من الاختصار. وضح لهم بأنه رغم صحة هذا الأمر على جميع مضاعفات 11، فإنه عادي، وإن اعتمامنا سينصب على الكسور التامة (يعني، التي تقل قيمتها عن 1).

بعد أن يغزو نفوس الطلبة إحباط تام إزاء هذا التحدي، تستطيع البدء بمناقشة سبب كون الكسور الأربعة المذكورة آنفا هي الكسور الوحيدة (تتألف من أعداد برقمين) حيث يصح عليها هذا النوع من الاختصار. ليتأمل الطلبة الكسر $\frac{10x+a}{10a+y}$. إن طبيعة الاختصارات الأربعة السابقة كانت بحيث عند اختصار فئة a فإن الكسر كان مساوياً لـ $\frac{x}{y}$. وعليه فإن $\frac{10x+a}{10a+y} = \frac{x}{y}$ ويتج هذا:

$$y(10x+a) = x(10a+y)$$

$$10xy+ay = 10ax+xy \quad \text{أو}$$

$$9xy+ay = 10ax$$

$$y = \frac{10ax}{9x+a} \quad \text{وأن}$$

عند هذه النقطة ليقم الطلبة بفحص هذه العلاقة. وينبغي عليهم إدراك بأن من الضروري كون x ، y ، a أعداداً صحيحة نظراً لكونهم أرقاماً في بسط ومقام الكسر. وقد أوضحت الآن مهمتهم تنصب على إيجاد قيم a و x التي تكون عندها y أيضاً عدداً صحيحاً.

لتجنب المزيد من المناورات الجبرية Algebraic Manipulation تستطيع توجيه الطلبة نحو أعداد جدول يولد قيماً للمتغير y من المعادلة $y = \frac{10ax}{9x+a}$. وحاول أن تذكرهم بضرورة كون كل من x ، y ، a عدداً صحيحاً مفرداً. يظهر أدناه قسم من الجدول الذي سيقومون بأعداده. لاحظ بأن الحالات التي يكون فيها $a=x$ قد استبعدت، نظراً لأن $\frac{x}{a} = 1$.

في مقالات بالرياضيات، أشار ماكسويل E. A. Maxwell إلى الاختصارات الآتية بوصفها غلطات بلهاء.

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

سوف تعرض هذه الوحدة طريقة لعرض هذه الغلطات للبلهاء على طلبة الجبر الأولي بحيث يحسن الطلبة فهم مفاهيم الأعداد.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتطوير غلطة بلهاء لم تعرض في الصف.
2. سيوضح الطلبة سبب وجود أربعة غلطات بلهاء فقط مكونة من كسر ثنائي المنزلة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على اختصار الكسور إلى أبسط صورها. وكذلك ينبغي أن يكونوا على معرفة كافية بمفاهيم مثل: العامل. والعدد الأولي، وقادرين على أداء جميع العمليات المطلوبة على الكسور.

استراتيجيات التعليم Teaching strategies

ابدأ عرضك التقديمي بسؤال الطلبة اختصار الكسور الآتية إلى أبسط صورها: $\frac{16}{64}$ ، $\frac{19}{95}$ ، $\frac{26}{65}$ ، $\frac{49}{98}$. وبعد إكمال الطلبة عملية اختصار كل كسر من الكسور إلى أبسط صورة بالأسلوب التقليدي، أخبرهم بأنهم قد أنجزوا كثيراً من العمل غير الضروري. وأعرض لهم الاختصارات الآتية:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{49}{98} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

عند هذه النقطة سيكون طلبتك مندهشين، لحد ما، وسيكون

		a	1	2	3	4	5	6	...	9
	x									
	1			$\frac{20}{11}$	$\frac{30}{12}$	$\frac{40}{13}$	$\frac{50}{14}$	$\frac{60}{15} = 4$		
	2		$\frac{20}{19}$		$\frac{60}{21}$	$\frac{80}{22}$	$\frac{100}{23}$	$\frac{120}{24} = 5$		
	3		$\frac{30}{28}$			$\frac{120}{31}$	$\frac{150}{32}$	$\frac{180}{33}$		
	:									
	.									
	9									

إن القسم الذي يبدو أمامنا من الجدول يظهر فيه اثنان من أربع من القيم الصحيحة لـ y ، وهي، عندما تكون $x=1$ ، $a=6$ وبعدها $y=4$

وكذلك عندما تكون $x=2$ ، $a=6$ ، $y=5$. إن هاتين القيمتين ينشأ عنهما الكسرين كل من $\frac{16}{65}$ و $\frac{26}{64}$ ، على التوالي. إن العددين الصحيحين المتبقين لـ y سوف نحصل عليها عندما $x=1$ ، $a=9$

بعدها $y=5$. وكذلك عندما $x=4$ ، $a=9$ ، بعدها $y=8$. وينتج عن هاتين القيمتين الكسرين $\frac{19}{95}$ و $\frac{49}{98}$ ، على التوالي. وينبغي

أن يكون ما ذكر آنفا سببا كافيا لاقتناع الطلبة بوجود فقط أربعة من هذه الكسور التي تتألف من أعداد برقمين يسري عليها هذا الأمر قد يتساءل الطلبة الآن عن إمكانية وجود كسور تتألف من بسط ومقام بأكثر من رقمين، يسري عليها هذا النوع من الاختصار الغريب. ليحاول الطلبة العمل على هذا النوع من الاختصار مع $\frac{499}{998}$. سيجد الطلبة بأن في الواقع $\frac{499}{998} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

وبعد فترة قصيرة سيدركون بأن:

$$\begin{aligned} \frac{49}{98} &= \frac{499}{998} = \frac{4999}{9998} = \frac{49999}{99998} = \dots \\ \frac{16}{64} &= \frac{166}{664} = \frac{1666}{6664} = \frac{16666}{66664} = \dots \\ \frac{19}{95} &= \frac{199}{995} = \frac{1999}{9995} = \frac{19999}{99995} = \dots \\ \frac{26}{65} &= \frac{266}{665} = \frac{2666}{6665} = \frac{26666}{66665} = \dots \end{aligned}$$

التقييم اللاحق Postassessment

ليعمل الطلبة على ما يأتي:

- أ. توليد غلطة "بلهاء" لم تعرض أصلا في هذه المناقشة.
- ب. توضيح سبب وجود أربعة غلطات بلهاء فقط، تتألف كل منها من أعداد ذات رقمين.



عودة إلى مسائل المراتب العشرية

Digit Problems Revisited

عندما يقارن الطلبة النتائج سيصابون بالدهشة لاكتشافهم طبيعة الانتظام السائد في إجاباتهم. عند هذه النقطة، ينبغي عليهم أن يكونوا متلهفين تماماً لإيجاد لماذا ينتهون بنفس الإجابة في كل مرة.

أبداً بتركهم يعرضون العدد الأصلي بصيغة: $100h+10t+u$ ، حيث h, t, u تمثل مراتب المئات، والعشرات، والآحاد، على التوالي. لتكن $h > u$ ، والتي يجب أن تصدق في أحد الأعداد. بعملية الطرح $u-h < 0$ لذا التقط 1 من مرتبة العشرات لجعل مرتبة الآحاد $10+u$ ومن المطروح منه.

نظراً لتساوي مرتبة العشرات في العددين اللذان يراد طرحهما، وأن 1 قد التقط من مرتبة عشرات المطروح منه، بعدد ستكون قيمة هذه المرتبة $10(t-1)$. إن مرتبة مئات المطروح منه هي $h-1$ ، نظراً لأن 1 قد التقط بعيداً لتتمكن عملية الطرح في مرتبة العشرات، جاعلاً مرتبة العشرات $10(t+9)+00=10(t-1)+10$. ويمكن عرض هذا تصويرياً كما يأتي:

$$100(h-1) + 10(t+9) + (u+10)$$

$$100u + 10t + h$$

$$100(h-u-1) + 10(9) + u-h+10$$

يعكس مراتب هذا الفرق سنحصل على:

$$100(u-h+10)+10(9)+u-h-1$$

بإضافة السطرين الآخرين ينتج

$$100(9)+10(18)+(10-1)=1089$$

إن المسألة الآتية تتضمن المراتب العشرية لعدد ما، وتعرض لإثبات غير معتادة لحد ما:

سبعة أضعاف عدد يتألف من مرتبتين عشريتين يساوي عدداً يتألف من ثلاث مراتب عشرية. عندما كتبت المرتبة 6 بعد المرتبة الأخيرة للعدد الذي يتألف من ثلاثة مراتب، ازداد هذا العدد بمقدار 1.833. جد العدد الذي يتألف من مرتبتين.

إن الفكرة الأساسية التي تمتاز الطلبة عند حل هذه المسألة تكمن في كيفية بيان وضع 6 بعد عدد ما. ليقم الطلبة بعرض العدد ذي المرتبتين بواسطة a . وعليه سيكون العدد ذي الثلاثة

تمتاز المسائل التي تتضمن المراتب العشرية للأعداد، والتي عرضت في منهج الجبر الأولي، بكونها مباشرة ولا تفكر إلى جهد ملموس في كثير من الأحيان. وتعد هذه المسائل، غالباً، موروثة مفيداً للتغلب عن المهارات التي تم تعليمها في مراحل سابقة تعرض هذه الوحدة كيف أن مسائل المراتب العشرية تمتاز بكونها ذات مسائل مطروقة في الطبيعة، كما يمكن استخدامها لتحسين مفاهيم الطلبة عن الأعداد.

هدف الأداء Performance Objective

1. سيقوم الطلبة بحل مسائل تتضمن مراتباً عشرية لعدد ما.
2. سيقوم الطلبة بتحليل حقيقة رياضية Mathematical Fact حول طبيعة أعداد محددة.

التقييم اللاحق Postassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حل المعادلات الخطية البسيطة Linear Equations، بالإضافة إلى المعادلات الآتية البسيطة Simultaneous Equation.

استراتيجيات التعليم Teaching strategies

أبداً عرضك التقديمي بمسؤول طلبتك أي عدد بثلاث مراتب عشرية بحيث لا تتساوى مرتبة العشرات مع الآحاد. بعدد دعمه يكتبون العدد الذي تكون مراتبه معكوس مراتب العدد المختار. ولأن أخيرهم بطرح هذين العددين (العدد الصغير من العدد الكبير). وأخبرهم، بأخذ الفرق ثانية وعكس مراتبه ثم أضف العدد "الجديد" إلى الفرق الأولي. سوف ينتهي "كل" الطلبة بالعدد 1,089.

على سبيل المثال، افترض أن الطلبة اختاروا العدد 943، وسيكون العدد الجديد بالمراتب المعكوسة 439. وستبدو الحسابات كما يأتي

934	
439	
<hr/>	
495	(الفرق)
594	(المراتب المعكوسة)
<hr/>	
1089	(المجموع)

ينتهي مربعها ب 00.

والآن دع الطلبة يتأملون الحالة $u=6$ بعدد $10t+6=4m$ أو $5t+3=2m$.

وهذا يبين بأن $t=1,3,5,7,9$. ولكن:

$N^2=(10t+6)^2=100t^2+120t+36=100t^2+100d+10e+36$
حيث $120t=100d+10e$ وبما أن المرتبتين الأخيرتين لـ N^2 تشابه تلك لـ N ، $10e+36=10t+6$ ، وأن $t=3$ بحيث أن $t \geq 3$. كذلك، $120t=100d+10(t-3)$ ، ووفقاً له $11t=10d+3$ وأن $11t \leq 87$ أو $t \leq 7$.

ليحاول الطلبة $F=3$ ، $36^2=1296$ (مرفوض) بعدد حاول $F=5$ ، $56^2=3136$ (مرفوض). أخيراً حاول $F=7$ ، بعدد $76^2=5776$ (مقبول نظراً لأن $N=76$).

هناك الكثير من المسائل الأخرى التي تتضمن مراتباً عشرية للأعداد التي ترغب بعرضها على طلبة صفك لتقديم نظرية الأعداد والتي يزودها هذا النموذج.

التقييم اللاحق Postassessment

1. بين باستخدام عرض رقمي للعدد، بأن عدداً محدداً يقبل القسمة على 8، إذا كانت المراتب الثلاثة (والتي تعد عدداً جديداً) تقبل القسمة على 8.
2. هناك عدنان يتألفان من نفس المراتب - أحدهما معكوس للآخر. وأن الفرق بين مربعي هذين العددين هو 7,128 وأن مجموع العددين يساوي 22 ضعفاً للفرق بين المراتب. ما هما هذان العددين؟
3. بإزاحة المرتبة الأولية 6، للعدد الصحيح N إلى النهاية، تحصل على عدد يساوي $\frac{1}{4}N$. جد أصغر قيمة ممكنة لـ N بحيث تحقق الشروط

مراتب $7a$ والآن لوضع 6 بعد عدد ما سيكون يضرب العدد بـ 10 ثم إضافة الـ 6 إليه. إن للمعادلة المطلوبة ستكون بعدد $10a+6+7a+1833=70a+6+7a+1833$ ويكون $a=29$.

ولعرض المزيد من فوائد التعامل الجبري مع الصيغ العشرية لعدد ما، قد تجد الأمر مثيراً بتوضيح لانا يكون العدد قابلاً للقسمة على 9 (أو 3)، لطلبك، إذا كان مجموع مراتبه يقبل القسمة على 9 (أو 3). دعهم يتأملون أي عدد يتألف من خمسة مراتب عشرية، لنقل. ab, cde ، يعني $10,000a+1000b+100c+10d+e$.

بما أن هذا العدد يمكن إعادة كتابته بأسلوب

$$(9+1)d+(9+1)c+(99+1)b+(999+1)a+(9,999+1)$$

أو $9,999a+999b+99c+9d+a+b+c+d+e$ وأن مجموع الحدود الأربعة الأولى يقبل القسمة على 9 (أو 3)، فإن مجموع بقية الحدود ينبغي أن يكون قابلاً للقسمة على 9 (أو 3) أيضاً. يعني، لكي يكون العدد قابلاً للقسمة 9 (أو 3)، ينبغي أن يكون، $a+b+c+d+e$ قابلاً للقسمة عليهما.

سنعرض هنا مسألة من مسائل المراتب العشرية، والتي تمتاز بحل غير روتيني. وسيجد الطلبة أن التحليل الآتي غير معتاد لحد ما.

جد العدد N الذي يتألف من مرتبتين عشريتين بحيث عندما يقسم على 4 يكون المتبقي صفراً، وأن جميع أسس الأعداد الصحيحة تنتهي بنفس المرتبتين كما في العدد الأصلي N .

بصورة طبيعية سيرغب الطلبة بالبدء في حل هذه المسألة بعرض $N=10t+u$. وبما أن $10t+u=4m$ (يعني مضاعف 4)،

u عدد زوجي. اسأل الطلبة أي عدد زوجي يمتلك مربعاً ينتهي بنفس الرقم كما في الرقم الأصلي. وعندما يثبت الطلبة بأن 0 و 6 فقط يحققان هذه الخاصية، عليه يكون u مساوياً 0 أو 6.

تتضمن الحالة $u=0$ بأن $t=0$ بحيث أن $N=00$ ، وهي حالة عادية، لأنه إذا كانت $t=0$ ، سوف تنتهي N بالصفر بينما

76 المتطابقات الجبرية

Algebraic Identities

يستطيع الطلبة تحديد مساحة كل منطقة بسهولة. وبما أن مساحة المربع الكبير تساوي مساحات الأشكال - رباعية الأضلاع الأربعة التي قسم إليها، يجب أن يحصل الطلبة على:

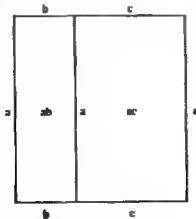
$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

إن برهاننا أكثر صرامة يمكن العثور عليه في عناصر أقليدس، القضية 4، الكتاب II.

بعدئذٍ وضح بطريقة هندسية التطابق $a(b+c) = ab + bc$. ولكي تبدأ، دع الطلبة يرسمون مستطيلاً تكون أضلاعه المجاورة بطول a ، و $(b+c)$. بعد ذلك يجب تقسيم المستطيل إلى مستطيلات مختلفة، (انظر شكل 2) مع تأشير أطوال هذه الأضلاع أيضاً.

يستطيع الطلبة حساب مساحة كل قسم بسهولة. استظهر من الطلبة، بما أن مساحة المستطيل الكبير تساوي مساحتي الشكلين رباعي الأضلاع الذي قسم إليهما، فإن الشكل يوضح بأن $a(b+c) = ab + ac$.

شكل (2)



ليتنامل الطلبة التطابق الآتي $(a+b) \times (c+d) = ac + ad + bc + bd$. ارشد الطلبة إلى رسم المستطيل المناسب وبأطوال أضلاع $(a+b)$ ، و $(c+d)$. ينبغي أن يقسم المستطيل إلى بضعة مستطيلات (انظر شكل 3). إن أطوال أضلاع، ومساحات المناطق قد تم تأشيرها. وكما في الحالات الأخرى، فإن مساحة المستطيل الكبير تساوي مساحات الأشكال الرباعية الأربعة التي قسم إليها.

ستعرض هذه الوحدة عملية هندسية لإجراء المتطابقات الجبرية. لقد اخترع اليونانيون القدماء طريقة للتطبيق على المساحات بوصف العدد بواسطة طوله فقط، رغم الافتقار إلى الرموز الجبرية الكافية. لغرض البرهنة على مثل هذه المتطابقات.

هدف الأداء Performance Objective

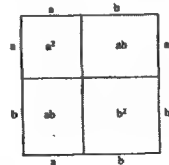
سينشئ الطلبة بطريقة هندسية للمتطابقات الجبرية باستخدام طريقة تطبيق المساحات.

التقييم السابق Preassessment

1. ليقيم الطلبة بفك $(a+b)^2$.
2. ليقيم الطلبة بفك $a(b+c)$.
3. ليقيم الطلبة بفك $(a-b)^2$.
4. استظهر لأي قيمة من قيم a ، و b تصح التساويات التي حصلنا عليها.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد أن يأخذ الطلبة بعين الاعتبار الأسئلة أعلاه، ينبغي عليهم التكيف على خصائص التطابق. وعندما يفهم الطالب مبدأ التطابق، ابدأ بتقديم طريقة تطبيق المساحات بتوضيح التطابق الآتي بأسلوب هندسي $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. ولكي تبدأ، دع الطلبة يرسمون مربعاً طول ضلعه $(a+b)$. بعدئذٍ ينبغي تقسيم المربع إلى مربعات ومستطيلات مختلفة. (انظر شكل 1)، على أن تؤثر الأضلاع المختلفة بصورة مناسبة.



شكل (1)

يظهر الشكل التوضيحي (4) ما يأتي:

1. مساحة $DEFG = \text{مساحة المثلث } \Delta GNM + 4 \times \text{مساحة } KLMN$. وعليه فإن،

$$(a+b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$

3. إذا قمنا الآن بتمويض تطابق $(a+b)^2$ والذي تمت البرهنة عليه سابقاً، سوف نحصل على:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

- استظهر من الطلبة ما تبقى من البرهان لاستنتاج أن $a^2 + b^2 = c^2$. ينبغي أن يكون الطلبة، الآن، قادرين على طرح وحل متطابقاتهم الشخصية بأسلوب هندسي.

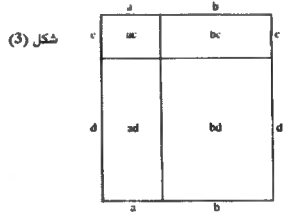
التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقيم الطلبة ببيان كيفية إنشاء المتطابقات الجبرية الآتية بصورة هندسية:
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $(a^2 - b^2) = (a+b) \times (a-b)$
2. ليحدد الطلبة المتطابقات الأخرى التي يمكن البرهنة عليها باستخدام طريقة تطبيق المساحات.

مرجع Reference

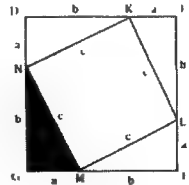
Posamentier, A. S., and H. A. Hauptman, 101 Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics, Thousand Oaks, CA: Corwin, 2001.

يوضح الشكل 3 التطابق $(a+b) \times (c+d) = ac + ad + bc + bd$. وضع الطلبة بأن طريقة تطبيق المساحات يمكن استخدامها لبرهنة معظم المتطابقات الجبرية. وتكمن الصعوبة في اختيارهم لأبعاد الأشكال الرباعية وطبيعة التقسيم الذي يجري عليها.



شكل (3)

ويعد أن يشعر الطلبة بالارتياح في استخدام المساحات لعرض المتطابقات الجبرية، دههم يتأملون العلاقات الفياثاغورية، $a^2 + b^2 = c^2$. ورغم أن هذه العلاقة ليست تطابقاً فإن تطبيق المساحات لازال مناسباً لها. ليقيم الطلبة برسم مربع طول ضلعه $(a+b)$. وأعرض للطلبة كيفية تقسيم هذا المربع إلى أربعة مثلثات متطابقة ومربع. (انظر شكل 4)، وقد تم تأشير أطوال الأضلاع عليه.



شكل (4)

طريقة للتحليل العائلي لثلاثيات الحدود بصيغة ax^2+bx+c

A Method for Factoring Trinomials of The Form ax^2+bx+c



بعد أن يتمرن الطلبة على عمليات الضرب هذه، دعهم يتأملون العملية العاكسة. وهي، أن لديك ثلاثي الحدود بصيغة ax^2+bx+c ، وادع الطلبة إلى تحليله عاملاً بحيث يبدو كحاصل ضرب اثنان من ثنائي الحدود. واطلب منهم إبداء اقتراحاتهم بخصوص كيفية إجراء التحليل العائلي على مجموعة من ثلاثيات الحدود، على سبيل المثال، x^2+5x+6 ، $2x^2-7x-4$ ، وهكذا.

بعدئذٍ دع الطلبة يتأملون التحليل العائلي لثلاثي الحدود بصيغته العامة ax^2+bx+c وبأسلوب الآتي:

$$ax^2 + bx + c = \frac{a(ax^2 + bx + c)}{a} = \frac{a^2x^2 + abx + ac}{a}$$

وسيكون هذا الأمر ممكناً لأن قيمة a تختلف عن صفر على الدوام. وإذا تم تحليل $a^2x^2+abx+ac$ عاملاً، فإن أحد التحليلات ستكون: $(ax+y)(ax+z)$ ، حيث ينبغي احتساب قيمة كل من y ، و z . إذن، سيكون لدينا:

$$ax^2 + bx + c = \frac{a^2x^2 + abx + ac}{a} = \frac{(ax+y)(ax+z)}{a}$$

$$= \frac{a^2x^2 + a(y+z)x + yz}{a}$$

وإذا قورنت المساواة الثانية والرابعة الآن، سنلاحظ بأن: $y+z=b$ وأن $yz=ac$. إذن لكي نحلل ثلاثي الحدود عاملاً بصيغة ax^2+bx+c ، فإن من الضروري التعبير عنه كحاصل ضرب هو $\frac{(ax+y)(ax+z)}{a}$ فقط حيث يمكن احتساب y ، z بملاحظة أن مجموعهما ينبغي أن يساوي b وأن حاصل ضربهما يجب أن يساوي ac .

كذلك دع الطلبة يلاحظون أنه بسبب:

$$\frac{(ax+y)(ax+z)}{a} = \frac{a^2x^2 + abx + ac}{a}$$

وينتج عن ذلك بأن البسط هو مضاعف a ، وعليه، سيبقى متاحاً

تعرض هذه الوحدة طريقة غير اعتيادية لحد ما للتحليل العائلي. وعندما يكون ممكناً، لثلاثيات الحدود بصيغة ax^2+bx+c ، حيث a ، b ، و c هي أعداد صحيحة. إن هذه التقانة ذات فائدة ملموسة عندما يكون معامل a في ax^2+bx+c مختلفاً عن 1، نظراً لأنه في مثل هذه الحالة تركز الطريقة التقليدية على أسلوب المحاولة والخطأ والتي غالباً ما تكون بالغة الصعوبة لمعظم ثلاثيات الحدود.

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1 بإعطاء مجموعة من ثلاثيات الحدود بصيغة ax^2+bx+c ، سيقوم الطلبة بتحليلها إلى عواملها.
- 2 سيصبح الطلبة قادرين على تطبيق هذه التقانة في حل المعادلات التربيعية.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالضرب والتحليل العائلي لثلاثيات الحدود، وكذلك بالتحليل العائلي لثلاثيات الحدود ذات المربعات التامة Perfect Square Trinomials.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ هذا الدرس بإعطاء بضعة أمثلة لعمليات ضرب ثلاثيات الحدود مثل:

$$(x+3)(x+2)، (2x-3)(x+1)، (5x-2)(3x-7)، \dots$$

ودع الطلبة يلاحظون الخصائص الآتية لعمليات الضرب هذه:

- أ- ينتج عنها. على الدوام ثلاثيات الحدود بصيغة ax^2+bx+c حيث تكون a ، b ، و c أعداد صحيحة.
- ب- حاصل ضرب الحدود الأولى في ثنائي الحدود يمثل الحد الأول في ثلاثي الحدود.
- ج- من المستحيل أن تكون قيمة a صفراً، من عملية ضرب أي من ثنائي الحدود، وعليه سيكون a مخالفاً لقيمة صفر في جميع ثلاثيات الحدود ذات الصيغة ax^2+bx+c .

على الدوام اختصار الثابت 2. $x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$. إن هذه التقانة قابلة للتطبيق، أيضاً، على حلول المعادلات التربيعية، يعني، معادلات بصيغة $ax^2+bx+c=0$.

مثال 4 EXAMPLE

حل المعادلة $2x^2-7x-4=0$

في البداية سنحلل عاملياً $2x^2-7x-4=0$. إذن $2x^2-7x-4=$ $\frac{(2x+y)(2x+z)}{2} 4=$ حيث $y+z=-7$ ، وان $yz=-8$. وبسبب كون حاصل ضربهما -8، فقد وجدنا بأن الأزواج الممكنة هي: $(-1, -8)$ ، $(1, -8)$ ، $(-2, 4)$ ، $(2, -4)$. كذلك بسبب كون حاصل الجمع الجبري لهما يساوي -7، فإن المجموعة الممكنة الوحيدة هي $(1, -8)$.

إذن

$$2x^2-7x-4=\frac{(2x-8)(2x+1)}{2}=(x-4)(2x+1)$$

لذا فإن لدينا:

$$2x^2-7x-4=(x-4)(2x+1)=0$$

وإن جذور هذه المعادلة التربيعية ستكون $(4, -1/2)$.

إن من الضروري بالنسبة للطالبة فهم بأنه لا توجد ثمة ضمانات بأن "أي" ثلاثي حدود يمكن تحليله، فضلاً:

$$x^2-5x-6, 5x^2-5x-7 \text{ لا يقبلان التحليل!}$$

التقييم اللاحق Postassessment

إن الطلبة الذين حققوا أهداف الأداء ينبغي أن يكون قادرين

الآن على إنجاز التمارين الآتية:

1. حلل عاملياً ثلاثيات الحدود الآتية:

$$4x^2+4x-3 \quad (\text{ب}) \quad x^2-8x+12 \quad (\text{أ})$$

$$3x^2-5x \quad (\text{د}) \quad x^2+10x+25 \quad (\text{ج})$$

$$9m^2-1 \quad (\text{و}) \quad 2r^2+13r-7 \quad (\text{هـ})$$

2. حل المعادلات التربيعية الآتية:

$$x^2-3x-4=0 \quad \text{أ-}$$

$$6x^2+x=2 \quad \text{ب-}$$

مرجع Reference

Posamentier, A.S., and H.A. Hauptman, 101 Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics, Thousand Oaks, CA: Corwin, 2001.

على الدوام اختصار الثابت 2.

مثال 1 EXAMPLE

حلل عاملياً $5x^2+8x+3$

لدينا:

$$5x^2+8x+3=\frac{(5x)(5x+z)}{5}$$

حيث $yz=(5)(3)=15$ ، $y+z=8$. إن تحليل الحد الثابت 15 يظهر بأن الأزواج الممكنة من العددين y ، z والذي يكون حاصل ضربها 15، هي: $(1, 15)$ ، $(-1, -15)$ ، $(3, 5)$ ، $(-3, -5)$ ، ولكن نظراً لأن مجموعهما ينبغي أن يكون 8، فإن الخيار الوحيد الممكن لمجموعة y ، z هو 5، 3. وعليه

$$5x^2+8x+3=\frac{(5x+5)(5x+3)}{5}=\frac{5(x+1)(5x+3)}{5}=(x+1)(5x+3)$$

مثال 2 EXAMPLE

حلل عاملياً x^2+5x-6

لدينا، $x^2+5x-6=\frac{(6x+y)(6x+z)}{6}$ ، حيث $y+z=5$ وأن $yz=(6)(-6)=-36$. إن تحليل حاصل الضرب yz وهو -36، يظهر بأن الأزواج الممكنة للعددين اللذين حاصل ضربهما -36 هي: $(-1, 36)$ ، $(1, -36)$ ، $(-2, 18)$ ، $(2, -18)$ ، $(-3, 12)$ ، $(3, -12)$ ، $(-4, 9)$ ، $(4, -9)$ ، $(-6, 6)$. ولكن بسبب كون المجموع الجبري لكل من z ، y ينبغي أن يكون +5، سيكون لدينا المجموعة الوحيدة الممكنة هي $(4, 9)$. وعليه:

$$6x^2+5x-6=\frac{(6x+9)(6x-4)}{6}=\frac{3(2x+3)2(3x-2)}{6}=(2x+3)(3x-2)$$

فإذا كانت $a=1$ ، سيكون لدينا الصيغة الأبسط x^2+bx+c . إذن:

$$x^2+bx+c=\frac{(1x+y)(1x+z)}{1}=(x+y)(x+z)$$

حيث $yz=c$ ، $y+z=b$.

مثال 3 EXAMPLE

حلل عاملياً x^2-4x-5

لدينا: $x^2-4x-5=(x+y)(x+z)$ حيث $y+z=-4$ ، $yz=-5$. إذن، الزوجين الممكنين من العددين y ، z هي: $(-1, -5)$ ، $(1, 5)$ ، ولكن بسبب كون المجموع الجبري يساوي -4، فإن المجموعة الممكنة الوحيدة هي $(-1, -5)$. وعليه،

حل المعادلات التربيعية

Solving Quadratic Equations

78

خذ الجذر التربيعي للطرفين:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وهذه هي صيغة المعادلة التربيعية.

مثال Example: حل المعادلة $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x^2 - 7x + \left(\frac{-7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{-7}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4} = \frac{-48 + 49}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x - \frac{7}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \quad x = 3, 4$$

تقسيم الفرق Splitting The Difference

لتكن x_1, x_2 جذري المعادلة المألوفة $ax^2 + bx + c = 0$
 بعدئذ، $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ أو $(x - x_1)(x - x_2) = 0$
 ونحن على علم بأن مجموع الجذرين

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

وأن حاصل ضرب الجذرين $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ دع $x_1 = \frac{-b}{2a} + N$

حيث N أي عدد قياسي، وأن $x_2 = \frac{-b}{2a} - N$

بعدئذ سيكون حاصل ضرب الجذرين

$$\frac{c}{a} = x_1 x_2 = \left(\frac{-b}{2a} + N\right) \left(\frac{-b}{2a} - N\right)$$

N نحصل على: $N = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

وعليه فإن الجذرين هما:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال Example: حل المعادلة $x^2 - 7x + 12 = 0$

تعرض هذه الوحدة أربعة طرائق جديدة لحل المعادلات التربيعية

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بحل معادلة تربيعية محددة بأربعة طرائق مختلفة على الأقل.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حل المعادلة:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن نسبة كبيرة من طلبتك قد حلوا المعادلة أعلاه بطريقة التحليل العاملي يعني، لفرض حلها فقد لجأوا إلى إجراء العمليات الآتية:

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 12 &= 0 \\ (x - 3)(x - 4) &= 0 \\ \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x = 3 \end{cases} & \quad \begin{cases} x - 4 = 0 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

لا يمكن أن تستخدم هذه الطريقة لحل جميع أنواع المعادلات التربيعية. إذا كانت ثلاثة الحدود $ax^2 + bx + c$ من نوع المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ غير قابلة للتحليل، بعدئذ لا يمكن استخدام هذه الطريقة لحل المعادلة.

سيمعالج بقية الدرس موضوع تطوير أربعة طرائق جديدة لحل المعادلات التربيعية.

إكمال المربع Completing The Square

تأمل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a, b ، و c أعداد صحيحة وأن قيمة $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

أضف مربع نصف معامل x إلى الطرفين:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

وعليه:

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{-b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

طريقة اختزال الجذور Method of Root Reduction

ومرة أخرى نبتدئ المناقشة بحل معادلة محددة قبل أن نأخذ

الصيغة العامة بعين الاعتبار.

مثال Example:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\text{افترض } r = x - n \quad \text{بعدئذ } x = r + n$$

$$\text{وأن: } x^2 - 7x + 12 = (r+n)^2 - 7(r+n) + 12 = 0$$

والتنسيق يعطى القيم المناسبة في المعادلة الأصلية.

$$(r^2 + 2rn + n^2) - 7(r+n) + 12 = 0$$

$$r^2 + r(2n-7) + (n^2 - 7n + 12) = 0$$

إذا كانت $2n - 7 = 0$ بعدئذ سيكون حد r باطلاً. وسيحصل هذا

$$\text{عندما تكون } n = \frac{7}{2}$$

بعد هذا سيكون لدينا $r^2 + (n^2 - 7n + 12) = 0$ ، أو بواسطة التعويض

$$n = \frac{7}{2}: r^2 + \left(\frac{49}{4} - 7\left(\frac{7}{2}\right) + 12\right) = 0$$

$$r^2 = -\left(\frac{49}{4} - 24 + 12\right) = -\frac{1}{4} \quad \text{وأن } r = \pm \frac{1}{2} \quad \text{وعليه فإن الجذور هي: } (x = r + n)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4 \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 3$$

وستستمر الحالة العامة بنفس الطريقة. خذ بعين الاعتبار المعادلة

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{دع } r = x - n \quad \text{بعدئذ } x = r + n$$

$$x^2 = (r+n)^2 = r^2 + 2rn + n^2$$

والآن عوض هذه القيم في المعادلة الأصلية.

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$(r^2 + 2rn + n^2) + \frac{b}{a}(r+n) + \frac{c}{a} = 0$$

$$r^2 + r\left(2n + \frac{b}{a}\right) + \left(n^2 + \frac{bn}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

ولنفرض بإبطال الحد r ، ستقوم بما يأتي:

$$n = \frac{-b}{2a} \quad \text{أو} \quad 2n + \frac{b}{a} = 0$$

وسينتج عن هذا:

سيقوم الطلبة باعتبار أن مجموع الجذورين $x_1 + x_2 = 7$ ، وعليهفإن أحد الجذورين ينبغي أن يساوي $\frac{7}{2} + N$ ، بينما يكونالثاني $\frac{7}{2} - N$ ، حيث تمثل N أي عدد نسبي.

بما أن ناتج الجذور هو 12، فإن

$$x_1 x_2 = \left(\frac{7}{2} + N\right)\left(\frac{7}{2} - N\right) = \frac{49}{4} - N^2 = 12$$

$$N^2 = \frac{1}{4} \quad \text{وأن } N = \pm \frac{1}{2}$$

إذن الجذور هي:

$$x_1 = \frac{7}{2} + N = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{7}{2} - N = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3$$

طريقة المعادلات الآتية**Method of Simultaneous Equations**

بدلاً من تطوير الحالة الأولى ينبغي أن نباشر، أولاً، حل

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

المعادلة. إن هذا الترتيب سيكون أكثر سهولة

لتابعة هذه الطريقة.

مثال Example:

$$\text{حل المعادلة } x^2 - 7x + 12 = 0$$

تأمل مجموع وحاصل ضرب الجذورين $x_1 + x_2 = 7$ ،

$$x_1 x_2 = 12$$

قم بتربيع المجموع $(x_1 + x_2)^2 = 49$.

$$-4x_1 x_2 = -48$$

$$\text{بالإضافة } (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 49 - 48 = 1$$

ولكن، يمكن تبسيط الجانب الأيسر في المعادلة إلى:

$$(x_1 - x_2)^2 \quad \text{وعليه فإن } x_1 - x_2 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

والآن لحل هذه المعادلات آتياً:

$$2x_1 = 8 \quad x_1 = 4 \quad x_2 = 3$$

إن الحالة العامة للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ سيكون:

مربع مجموع الجذورين

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$-4x_1 x_2 = \frac{-4c}{a} \quad \text{سيكون}$$

وكما فعلنا في مراحل سابقة، ستقوم بجمع آخر معادلتين:

$$x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

بالرغم من أن بعض هذه الطرق المستخدمة في حل المعادلات التربيعية تمتاز بكونها غير عملية إلى حد كبير، لكنها توفر للطلبة فهما أفضل لكثير من المفاهيم الأساسية.

التقييم اللاحق Posassessment

اسأل الطلبة استخدام، على الأقل، أربعة من الطرق التي عرضت في هذا الدرس لحل المعادلات الآتية:

$$1. x^2 - 11x + 30 = 0$$

$$2. x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$3. 6x^2 - x - 2 = 0$$

$$r^2 + (n^2 + \frac{b}{a}n + \frac{c}{a}) = 0$$

$$r^2 = -(n^2 + \frac{b}{a}n + \frac{c}{a})$$

$$\text{ولكن، بما أن } n = \frac{-b}{2a}$$

$$r^2 = -(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a})$$

$$r = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ وأن } r^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x = r + n \text{ وعليه، بما أن } x = r + n$$

$$\text{أو: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

الخوارزمية الإقليدية

79

The Euclidean Algorithm

إحدى كفتي الميزان، حيث يمكن وزن 12 أونسا على الكفة الثانية.

ب. 2 أونس: ضع قطعة زنة 7 أونس على إحدى كفتي الميزان

وقطعة زنة 5 أونس على الكفة الثانية. بعدئذ سنحصل على

وزن القطعة المطلوبة وبالعانة 2 أونس بعد وضع المادة على كفة

الميزان التي تحوي قطعة 5 أونس بحيث تتساوى كفتا الميزان.

ج. 3 أونس: ضع قطعتين زنة 5 أونس في الكفة الأولى من كفتي

الميزان، وضع قطعة زنة 7 أونس على الكفة الثانية. بعدئذ

سنحصل على وزن القطعة المطلوبة وبالعانة 3 أونس بعد

وضع المادة على كفة الميزان التي تحوي قطعة 7 أونس

بحيث تتساوى كفتا الميزان.

د. 4 أونس: ضع قطعتين زنة 5 أونس في الكفة الأولى من كفتي

الميزان، وقطعتين زنة 7 أونس على الكفة الثانية. بعدئذ

سنحصل على وزن القطعة المطلوبة وبالعانة 4 أونس بعد

وضع المادة على كفة الميزان التي تحتوى قطعتي 5 أونس

بحيث تتساوى كفتا الميزان.

هـ. 1 أونس: ضع ثلاثة قطع زنة 5 أونس على إحدى كفتي

تعرض هذه الوحدة طريقة لتعريف الطلبة على الخوارزمية الإقليدية، وذلك لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددتين صحيحين.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء عددتين صحيحين، سيقوم الطلبة باحتساب القاسم

المشترك الأكبر لهما، وبصرف النظر عن قيمة هذين العددين.

2. بعد احتساب القاسم المشترك الأكبر، سيكون الطلبة قادرين

على وصفه بدلالة العددين الصحيحين.

التقييم السابق Preassessment

اسأل الطلبة كيف سيقومون بوزن 12 أونس، 2 أونس، 3

أونس، 4 أونس، 1 أونس و 11 أونس باستخدام مجموعة تتألف

من كفتي ميزان واوزان مقاديرها 5 و 7 أونس فقط.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على اقتراح وزن الاوزان

بالأسلوب الآتي:

ا. 12 أونس: ضع قطعة زنة 5 أونس وقطعة زنة 7 أونس على

عليهم أن يضعوا 82 قطعة من زنة 219 أنس، على إحدى الكفتين، و 19 قطعة زنة 945 أنس على الكفة الثانية. وسيكون الوزن الذي حين إضافته إلى كفة قطع 945 أنس ستتكاثر كفتا الميزان، وهو الوزن المطلوب. يمكن استخدام هذا الأسلوب لتطوير فهم معادلات دايوفانتين Diophantine Equations.

التقييم اللاحق Postassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حساب ق.م.أ لأزواج الأعداد الصحيحة الآتية ووصف ق.م.أ بدلالة العددين الصحيحين.

1. 12، 18
2. 52، 86
3. 312، 865
4. 120، 380

من السطر (4) أعلاه: $3 = 12 - 9$
بتعويض 9 في السطر (3) أعلاه:

$$3 = 12 - (69 - 5 \cdot 12), \quad 3 = 6 \cdot 12 - 69$$

بتعويض 12 في السطر (2):

$$3 = 6(219 - 3 \cdot 69) - 69$$

بتعويض 69 في السطر (1):

$$(4, 219) = 19(945 - 4 \cdot 219) - 3$$

$$3 = 82(219) - 19(945)$$

في مرحلة مبكرة احتسب الطلبة الحد الأدنى الذي يمكن وزنه بواسطة الأوزان 945 أنس و 219 أنس عن طريق إيجاد (945, 219) والآن أصبحوا قادرين على تحديد عدد قطع 945 أنس التي يجب وضعها على إحدى كفتي الميزان، وكم عدد قطع 219 أنس التي يجب وضعها على الكفة الثانية، عن طريق وصف (945, 219) بدلالة 945 و 219. يعني، ينبغي

الأعداد الأولية



Prime Numbers

ليقم الطلبة باختيار الصيغة $n^2 - n + 41$ بواسطة تعويض قيم موجبة مختلفة للمتغير n . اصنع جدولاً على السبورة ودون فيه ما حصل عليه الطلبة في عمليات التعويض المختلفة. وعندما يستمر الطلبة بعملهم سيبدأون بملاحظة أنه عندما تتراوح قيمة n من 1 لغاية 40، في تلك الحالة فقط تنتج الأعداد الأولية. (إذا لم يعوضوا القيمة $n=40$ ، دعهم يعملون على تعويضها). بعدئذ اطلب منهم محاولة $n=41$ ، وستكون نتيجة $n^2 - n + 41$ هي $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ وهو ليس عدداً أولياً. إن صيغة مشابهة، $n^2 - 79n + 1601$ تنتج أعداد أولية لجميع قيم n لغاية 80. ولكن في حالة $n=81$ ، سيكون لدينا:

$41 \cdot 1763 = 41 \cdot (81^2 - 79 \cdot 81 + 1601)$ والذي لا يعد أولياً. قد يتساءل الطلبة الآن إذا كانت هناك إمكانية للحصول على متعدد حدود في n وبمعاملات صحيحة والذي تكون قيمه أولية لكل عدد صحيح موجب n . انتصح الطلبة بمحاولة إيجاد مثل هذه الصيغة: برهن ليونارد أويلر (1707-1783) Leonhard Euler على عدم وجود مثل هذه الصيغة. لقد بين أويلر بأن أي

ستعرض هذه الوحدة للطلبة الحقائق الآسرة التي تخص الأعداد الأولية.

هدف الأداء Performance Objective

1. بإعطاء عدد ما، سوف يستخدم الطلبة دالة أويلر Euler's ϕ Function لإيجاد عدد الأعداد الصحيحة التي تقل عن العدد المعلوم والتي تكون نسبياً فاتحة له.
2. سيوضح الطلبة سبب إمكانية وجود متعدد حدود بمعاملات تامة والذي سيولد أعداد أولية فحسب.

التقييم السابق Pressment

أسأل الطلبة تمييز أي مما يأتي يعد عدداً أولياً:

- (أ) 11 (ب) 27 (ج) 51 (د) 47 (هـ) 91 (و) 1

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استغرق الرياضيون سنينا طوال بمحاولة إيجاد صيغة عامة تستطيع توليد أعداد أولية. وهناك الكثير من المحاولات بهذا الاتجاه، لكن أي منها لم تظفر بفرصة للنجاح في تحقيق غايتها.

بالتأكيد أولية أيضاً. واسوء الحظ فقد توقف بصورة مبكرة جداً، لأن أويلر برهن عام 1732 بأن:

$$F_5 = 4,269,967,297 = 641 \times 6,700,417$$

(ليس عدداً أولياً) ولم تكتشف إلا بعد 150 عاماً عوامل F_5 :

$$18,446,744,073,709,551,617 = 247,177 \times 67,280,421,310,721$$

ويقدر ما توفرت معرفة رياضية في هذا الوقت، فقد تم اكتشاف عدد كبير من الأعداد بهذه الصيغة، ولكن أي منهم لم يكن أولياً. ويبدو بأن حدس فيرمات قد ارتد على أعقابهِ، وأن المرء يتساءل الآن إذا توفر أي عدد أولي وراء F_5 .

وقد استمر أويلر بالتعمق في دراسته للأعداد الأولية. فبدأ بامتحان الأعداد الصحيحة التي تعد أولية نسبياً (بعد العددين الصحيحان أوليان نسبياً إذا لم يمتلكا عاملاً مشتركاً موجبا باستثناء 1).

ليكون الطلبة العدد 12، والأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عنه. اخبر الطلبة بشطب 12 ذاته، وبمعدّل جميع الأعداد الصحيحة التي تمتلك عاملاً أكبر من 1 مشتركاً مع 12.

سيشاهد الطلبة بأن الأعداد الصحيحة 1، 5، 7، 11 هي الأعداد الوحيدة المتبقية. وعليه، هناك أربعة أعداد صحيحة تقل عن 12 والتي تعد أولية بالنسبة له. إن العدد من هذه الأعداد الصحيحة يرمز له بالرمز $\phi(n)$ وتعرف ϕ بدالة أويلر Euler's. بالنسبة $n=1$ ، وسيكون لدينا $\phi(n)=1$ بالنسبة $n>1$ ، $\phi(n)$ = عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن n وتكون أولية نسبياً بالنسبة لها. إذن، كما لاحظنا آنفاً $\phi(12)=4$. ولأنّ مع الطلبة يجدون قيم $\phi(n)$ بالنسبة للمتغير 1، 2، 3، 4، 5، $n=1$. إن جدولاً كما في الشكل 1 أدناه سيكون مناسباً لذلك.

ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأنه عندما يكون n عدداً أولياً، فليس من الضروري إدراج جميع الأعداد. وبما أن العدد الأولي هو أولي نسبياً بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عنه، لذا سيكون لدينا $\phi(n)=n-1$ بالنسبة للعدد الأولي n .

صيغة مقترحة سوف تنتج عدداً غير أولي - واحد على الأقل.

وسوف يأتي برهان أويلر. أولاً، افترض وجود مثل هذه الصيغة، وتكون بالصيغة العامة at^3+bt^2+ct+d (مدرकिन بأن هناك بعض المعاملات التي قد تساوي صفراً). لتكن قيمة هذه الصيغة s عندما تكون $t=m$.

وعليه فإن $s=a+bm+cm^2+dm^3+...$ بنفس الطريقة لتكن t

قيمة هذه الصيغة عندما تكون $t=m+ns$.

ويمكن أن تعاد صياغتها إلى:

$$t=(a+bm+cm^2+dm^3+...)+A$$

حيث تمثل A الحدود المتبقية التي تعد جميعها مضاعفات s . ولكن الصيغة بين الأقواس هي، حسب الفرضية، تساوي s . إن هذا الأمر يجعل الصيغة بأجمعها مضاعفاً لـ s ، وأن العدد الذي سينتج عنها لن يكون أولياً، إن كل صيغة معادلة سوف ينتج عنها عدداً أولياً واحداً، وليس بالضرورة أن يكون أكثر من واحد. وهكذا، لا توجد صيغة تستطيع توليد أعداد أولية على وجه التحصر.

ورغم أن العبارة الأخيرة قد أدركت في مرحلة مبكرة من تاريخ الرياضيات، فقد استمر الرياضيون بالتعقّب عن صوغ للأعداد تنتج أعداد أولية فقط.

ذهب العالم بيير دي فيرمي Pierre de Fermat (1601-1665)، والذي كانت لديه مساهمات واضحة في ميدان دراسة نظرية العدد، إلى أن الأعداد ذات الصيغة $F_n=2^{2^n}+1$ ، حيث $n=1, 2, 3, 4, ...$ تعد أعداد أولية. ليقيم الطلبة بإيجاد F_n بالنسبة لقيم 2، 1، 0. $n=0$ ، وسيجدون بأن الأعداد الثلاثة الأولى التي اشتقت من هذه الصيغة هي 3، 5، 17. بالنسبة للقيمة $n=3$ ، وسيجدون بأن $F_3=257$ ، وإخبارهم أن $F_4=65,537$ ، علمهم أن يلاحظوا بأن هذه الأعداد تزداد بمعدلات سريعة بالنسبة للقيمة:

$n=5$ ، $F_5=4,294,967,297$ ، وإن فيرمات لم يستطع العثور على أي عامل لهذا العدد. وقد تشجّع بهذه النتيجة، فذهب إلى بيان رأيه الذي نص فيه على أن جميع الأعداد بهذه الصيغة هي

$\phi(n)$	الأعداد الصحيحة الأولية نسبياً إلى وتقل عن n											n
1												1
1	1	2										2
2	1	2	3									3
2	1	2	3	4								4
4	1	2	3	4	5							5
2	1	2	3	4	5	6						6
6						عدد أولي						7
4	1	2	3	4	5	6	7	8				8
6	1	2	3	4	5	6	7	8	9			9
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		10
10						عدد أولي						11
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

ليستمر الطلبة بإيجاد $\phi(n)$ بالنسبة لـ $n=6$ إلى 12. بالنظر إلى اسفل العمود $\phi(n)$ ، لا يبدو أمامنا أي نسق محدد. ورغم ذلك، قد تفزونا الرغبة بالحصول على الصيغة للحد العام، بحيث أن $\phi(n)$ يمكن حسابها بالنسبة لأي عدد. لقد بينا سابقاً بأنه إذا كانت n عدداً أولياً، بعدد ستكون:

$$\phi(n) = n - 1 = n \frac{(n-1)}{n} = n(1 - \frac{1}{n})$$

ولتأدية كيفية تطبيق الصيغة بمصاحبة الطلبة، وإيجاد الآتي: $\phi(21)$ ، $\phi(43)$ ، $\phi(78)$.

الحلول Solution

$$\phi(21) = \phi(7.3) = 21(1 - \frac{1}{7})(1 - \frac{1}{3}) = 21$$

$$(\frac{6}{7})(\frac{2}{3}) = 12$$

$$\phi(43) = 43 - 1 \quad (\text{بما أن 43 عدد أولي})$$

$$\phi(78) = \phi(2.3.13) = 78(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{13}) =$$

$$78(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(\frac{12}{13}) = 24$$

عند هذه النقطة، قد يلاحظ بعض الطلبة بأن أي قيمة لـ $\phi(n)$ تكون زوجية. وإن تبرير ذلك سيؤدي دور منصة الوئب باتجاه تحريات أكثر تفصيلاً.

التقييم اللاحق Postassessment

1. جد كل مما يأتي:

$$\phi(13) \quad (أ)$$

$$\phi(14) \quad (ب)$$

$$\phi(48) \quad (ج)$$

$$\phi(100) \quad (د)$$

2. لوضح الطلبة سبب عدم وجود متعدد حدود بمعاملات عددية صحيحة والذي سيولد أعداد أولية فقط.

ليستمر الطلبة بإيجاد $\phi(n)$ بالنسبة لـ $n=6$ إلى 12. بالنظر إلى اسفل العمود $\phi(n)$ ، لا يبدو أمامنا أي نسق محدد. ورغم ذلك، قد تفزونا الرغبة بالحصول على الصيغة للحد العام، بحيث أن $\phi(n)$ يمكن حسابها بالنسبة لأي عدد. لقد بينا سابقاً بأنه إذا كانت n عدداً أولياً، بعدد ستكون:

$\phi(n) = n - 1$. ولغرض العثور على صيغة بالنسبة لـ $\phi(n)$ إذا لم تكن n عدداً أولياً، سوف نوجه انظارنا صوب حالة محددة.

افترض $n=15$. وبتجزئة 15 إلى أعداد أولية، سنحصل على $15 = 3 \cdot 5$. نستطيع كتابة ذلك بصيغة $n = p \cdot q$ ، حيث $n=15$ ، $p=3$ ، $q=5$. بعد ذلك ليقم الطلبة بكتابة 15 وجميع الأعداد الصحيحة التي تقل عنه. ثم ليقوموا بشطب جميع الأعداد الصحيحة التي فيها 3 (والتي تمثل p) كاملاً:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
وسيجد الطلبة بأن هناك منهم $\frac{15}{3} = 5$. وهناك 10 أعداد

صحيحة متبقية أو $10 = 15 - \frac{15}{3} = n - \frac{n}{p} = n(1 - \frac{1}{p})$. ومن خلال هذه الأعداد العشرة - الصحيحة - دع طلبك يشطبون الأعداد التي تحوي 5 (والتي تمثل q) كاملاً:

1 2 3 4 6 7 8 9 11 12 13 14
وهناك اثنان فقط من هؤلاء أو $2 = \frac{1}{5}(10) = \frac{1}{q}[n(1 - \frac{1}{p})]$

والآن تبقى 8 أعداد

$8 = 10 - \frac{1}{5}(10) = n(1 - \frac{1}{p}) - \frac{1}{q}[n(1 - \frac{1}{p})]$
هو معامل لكل من حدي الصيغة. وعليه فقد قمنا بإنشاء صيغة لعدد من الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن n وتعد أولية نسبياً بالنسبة له.

$$\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p})(1 - \frac{1}{q})$$

إن العدد n ، قد يمتلك أكثر من معاملين في تحليله الأولي، لذا دعنا الآن نبين أكثر من صيغة عامة (بدون برهان). افترض بأن العدد n يحلل إلى عوامله الأولية 10، 9، r ، w ، بعدد

81

مغالطات جبرية

Algebraic Fallacies

البرهان Proof:

1. افترض: $a = b$
2. اضرب الطرفين بـ a : $a^2 = ab$
3. اطرح b^2 من الطرفين: $a^2 - b^2 = ab - b^2$
4. حلل عاملها: $(a+b)(a-b) = b(a-b)$
5. قسم الطرفين على $(a-b)$: $(a+b) = b$
6. بما أن $a = b$ ، بمعدّل: $2b = b$
7. تقسيم الطرفين على b نحصل: $2 = 1$

أسأل الطلبة تحليل "البرهان" وإيجاد الخلل في الاستنتاج. لاشك، بأن العقبة قد برزت في الخطوة الخامسة. بما أن $a = b$ ، بمعدّل $a - b = 0$ ، وعليه، فقد تمت القسمة على صفر، وهو أمر "لا يجوز" فعله. إن من المناسب في هذا الوقت فتح باب مناقشة ماذا تعني القسمة بدلالة الضرب. إن التقسيم a بواسطة b يدل ضمنا على وجود عدد بحيث أن $y = \frac{a}{b}$ أو $y \cdot a = b$. إذا كان $b = 0$ ، يظهر احتمالا، إما أن يكون $a \neq 0$ أو $a = 0$. إذا كان $a \neq 0$ ، بمعدّل $y = \frac{a}{0}$ أو $0 \cdot y = a$ ، أسأل طلبتك إذا كانوا يستطيعون العثور على عدد عندما يضرب بـ 0 سوف يساوي a . وسوف يستنتج طلبتك بأن مثل هذا العدد y لا وجود له. وفي الحالة الثانية، حيث $a = 0$ ، $y = \frac{0}{0}$ ، أو $0 \cdot y = 0$.

في هذه الحالة أي عدد بالنسبة لـ y سوف يحقق هذه المعادلة، نظراً لأن أي عدد يضرب بالصفر تكون نتيجته صفراً. لذا ستكون لدينا "قاعدة Rule" بأن القسمة على صفر غير جائزة.

هناك مغالطات أخرى تستند إلى القسمة على صفر. دع طلبتك يكتشفون بأنفسهم، أين وكيف، تظهر الصعوبة في كل من الأمثلة الآتية.

أ) لكي "تبرهن" بأن أي عددين غير متساويين هما متساويان. افترض أن $x = y + z$ ، وأن x, y, z هي أعداد موجبة. إن هذا

يرتكب غالبية الطلبة أخطاء متعددة عند إنجاز واجباتهم الرياضية، والتي تكون أكثر شيوعاً من الأخطاء التي يرتكبونها في حساباتهم، أو بقية الأفعال التي لا يولونها اهتماماً كافياً. ولتجنب الأخطاء التي تعد نتيجة لتجاوز حدود التعاريف الرياضية والمبادئ، فإن من الحكمة عرض هذا النوع من الخلل سلفاً، إن هذا الهدف الحيوي هو المهمة الأساسية التي خصصت لهذه الوحدة.

هدف الأداء Performance Objective

إعطاء غلطة جبرية محددة، سيقوم الطلبة بتحليل، وتحديد موطن نشوب الغلط في البرهان الجبري.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالعمليات الجبرية الأساسية والتي يغلب تعليمها في المساق الدراسي للجبر الأولي في المدارس الثانوية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

عندما لا تفهم الجوانب النظرية التي تكمن وراء العمليات الرياضية بصورة جيدة، فسوف توجد أكثر من إمكانية لتطبيق العمليات في سياقات، وطرق غير منهجية، أو منطقية. إن غياب المعرفة الكافية لدى الطلبة بالمحددات التي تشخص أمام هذه التطبيقات، سيحدو بهم إلى استخدامها، وتوظيفها بعمادين لا تنطبق عليها. إن مثل هذه الاستنتاجات الخاطئة سوف ينجم عنها نتيجة منافية للعقل Absurd يطلق عليها مغالطة Fallacy.

إن المظاهر المتناقضة الآتية سوف تعرض كيف أن مثل هذه المغالطة قد تبرز في مادة الجبر، عندما تنجز عمليات جبرية محددة، ودون وجود إدراك كافي للمحددات التي تشخص إزاء هذه العمليات.

إن جميع من تناول الجبر الأولي بالدراسة، لابد أن يمر من وقت أو آخر ببرهان يعالج مسألة $1=2$ أو $1=3$. إن مثل هذا "البرهان" هو مثال واضح على إحدى هذه المغالطات.

وبما أن البسطين متساويان، فإن هذا يعني $4-x = 12-x$ بإضافة x إلى الطرفين $4=12$. للمرة الثانية، كما في الأمثلة السابقة، فإن القسمة على صفر يعد أمراً مخادعاً. ليقم الطلبة بإيجاد الخطأ. ينبغي أن يوضح بأن البديهيات لا يمكن أن تطبق بطريقة عمياء على المعادلات دون الأخذ بعين الاعتبار قيم المتغيرات التي تصح المعادلة بها. إذن، المعادلة (1) لا تعد تطابقاً صادقاً لجميع قيم x ، ولكنها تتحقق فقط في حالة $x=8$. ليقم الطلبة بحل $(4-x)(2x-16) = (12-x)(2x-16)$ للتحقق من ذلك.

إن $x=8$ يدل ضمناً على أن المقامين يساويان صفراً. تستطيع أيضاً أن تكلف الطلبة ببرهنة الحالة العامة بالنسبة لـ $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$ ليبين أن a لا يمكن أن تساوي صفراً.

إن صفناً آخر من المغالطات يتضمن تلك التي تغفل اعتبار إن كمية تمتلك جذران تربيعيان تتساوى قيمتهما المطلقة Absolute Value، ولكن أحدهما موجب والثاني سالب. كمثال على ذلك، خذ المعادلة $16-48 = 64-96$. بإضافة 36 إلى كلا الطرفين سيكون لدينا $16-48+36 = 64-96+36$. إن كل عضو في المعادلة يعد الآن مربعاً تاماً، بحيث أن $(4-6)^2 = (8-6)^2$. بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على $4-6 = 8-6$ ، والذي يدل ضمناً على أن $4=8$. أسأل طلبتك عن مواطن حدوث المغالطة. إن المغالطة في هذا المثال تكمن في أخذ الجذر التربيعي غير المناسب. إن الجواب الصحيح ينبغي أن يكون $(4-6) = -(8-6)$.

إن المغالطات الآتية تركز إلى الفضل في اعتبار جميع جذور المسألة المعلومة. ليقم الطلبة بحل المعادلة $x + 2\sqrt{x} = 3$ بالأسلوب المعتاد. إن الحلين هما $x=1$ ، $x=9$. إن الحل الأول يحقق المعادلة، أما الثاني فلا يحققها. دع الطلبة يوضحون أين تكمن الصعوبة.

إن معادلة مشابهة هي $x-8 = \sqrt{x^2+8^2}$. وبترتيب الطرفين والتبسيط نحصل على $-2ax=0$ أو $x=0$. بتعويض $x=0$ في المعادلة الأصلية، سنجد بأن هذه القيمة للمتغير x لا تحقق المعادلة. ليقم الطلبة بإيجاد الجذر الصحيح للمعادلة المعلومة.

لقد تعاملنا، حتى الآن، مع الجذور التربيعية للأعداد الموجبة. أسأل الطلبة ماذا حدث عندما قمنا بتطبيق قواعدنا المعتادة على جذور تحتوي على أعداد تخيلية، في ضوء المسائل الآتية. لقد تعلم الطلبة بأن $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ، على سبيل المثال، $\sqrt{5}\sqrt{2} = \sqrt{5 \cdot 2} = \sqrt{10}$ ، ولكن هذا يعطي قيماً بعد، $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ ، ولكن،

$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = (-1)(-1) = 1$ ، وعليه يمكن استنتاج بأن $-1 = 1$ ، لأن كلا منهما يساوي $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$. يجب أن يحاول

يدل ضمناً على أن $x > y$. اضرب الطرفين بـ $x-y$ ، بعدئذ، $x^2-xy = xy+xz-y^2-yz$. اطرح xz من طرفي المعادلة:

باستخدام التحليل نحصل على، $x(x-y-z) = y(x-y-z)$

بتقسيم الطرفين على $(x-y-z)$ ، ينتج: $x = y$.
إن x التي افترضت أكبر من y ، قد برهن على أنها تساوي y . لقد حدثت المغالطة في القسمة على $(x-y-z)$ ، والذي يساوي صفراً.
(2) لكي "تبرهن" بأن جميع الأعداد الموجبة التامة تكون متساوية. بإجراء القسمة الطويلة، سيكون لدينا، بالنسبة لأي قيمة لـ x :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x-1} &= 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} &= x+1 \\ \frac{x^3-1}{x-1} &= x^2+x+1 \\ \frac{x^4-1}{x-1} &= x^3+x^2+x+1 \\ &\vdots \\ \frac{x^n-1}{x-1} &= x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x^2+x+1 \end{aligned}$$

بافتراض $x=1$ في جميع هذه المتطابقات، فإن الجانب الأيمن يفترض القيم: $1, 2, 3, 4, \dots, n$. ويكون أعضاء الطرف الأيسر متماثلين، وهكذا $1=2=3=4=\dots=n$. وفي هذا المثال، فإن الطرف الأيسر لأي من المتطابقات يفترض القيمة $\frac{0}{0}$ عندما يكون $x=1$. إن هذه المسألة تعد شاهداً على أن $\frac{0}{0}$ يمكن أن يكون أي عدد من الأعداد.

تأمل الآتي، وأسأل طلبتك إذ كانوا يوافقون على العبارة الآتية "إننا تساوى كسران وكان البسط متساوياً فيهما، بعدئذ سيكون المقام فيهما متساوياً أيضاً".

ليقم الطلبة بإعطاء توضيحات في استخدام أي كسور يميلون إلى اختيارها. بعدئذ ليباشروا بحل المعادلة الآتية:

$$(1) \quad \frac{6x-40}{4-x} = \frac{2x-16}{12-x}$$

بإضافة حدود إلى الطرف الأيسر، للحصول على:

$$(2) \quad \frac{6(4-x)+8x-40}{4-x} = \frac{2x-16}{12-x}$$

وبالتبسيط،

$$\frac{2x-16}{4-x} = \frac{2x-16}{12-x}$$

المادلتين، سيجدون بأن المستقيمين متوازيان، وعليه لن تكون هناك نقطة مشتركة بينهما.

إن العرض الإضافي لمثل هذه المغالطات سوف يبرهن على نشاط يستحق الاهتمام بناء على الرسالة الحقيقية التي يحملها بين دفتيه.

التقييم اللاحق POSTASSESSMENT

ليتم الطلبة بتحديد أين وكيف نسات المغالطة في الأمثلة الآتية:

$$(1) \quad a. \quad x=4$$

$$b. \quad x^2=16$$

$$c. \quad x^2-4x=16-4x$$

$$d. \quad x(x-4)=4(4-x)$$

$$e. \quad x(x-4)=-4(4-x)$$

$$f. \quad x=-4$$

$$(2) \quad a. \quad (y+1)^2=y^2+2y+1$$

$$b. \quad (y+1)^2-(2y+1)=y^2$$

$$c. \quad (y+1)^2-(2y+1)-y(2y+1)=y^2-y(2y+1)$$

$$d. \quad = (y+1)^2 - (y+1)(2y+1) + \frac{1}{4} (2y+1)^2$$

$$e. \quad y^2 - y(2y+1) + \frac{1}{4} (2y+1)^2$$

$$f. \quad [(y+1) - \frac{1}{2} (2y+1)]^2 = [y - \frac{1}{2} (2y+1)]^2$$

$$g. \quad y+1 - \frac{1}{2} (2y+1) = y - \frac{1}{2} (2y+1)$$

$$h. \quad y+1 = y$$

الطلبة توضيح الخطأ، وينبغي أن يدركوا بأنهم لا يستطيعون تطبيق القواعد المألوفة على ضرب جذور الأعداد التخيلية.

إن برهاناً آخر يمكن استخدامه لبيان $-1 = +1$ هو كالآتي:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

$$\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$$

$$1 = -1$$

ليتم الطلبة باستبدال i بدلاً من $\sqrt{-1}$ ، و -1 بالنسبة i^2

للوقوف على موطن حدوث الخلل.

قبل إنهاء الموضوع حول المغالطات الجبرية، يبدو مناسباً اعتبار مقالة تتضمن معادلات آتية. وينبغي أن يدرك الطالب، منذ الآن، بأنه حال إنجاز البراهين السابقة يجب الخروج على قوانين أو قواعد محددة.

خذ بعين الاعتبار مثلاً حيث تجلب المغالطات الخفية في المعادلات نتائج مضحكة! ليتم الطلبة بحل زوج المعادلات الآتية بالتعويض عن x في المعادلة الأولى:

$$2x+y=8 \quad \text{وكذلك} \quad x=2-\frac{y}{2} \quad \text{ستكون النتيجة} \quad 8=4. \quad \text{لهم}$$

الطلبة بإيجاد الخطأ. وعندما سيقوم الطلبة برسم هاتين

اشتقاق المجموع بواسطة المصفوفات

Sum Derivation with Arrays

82

التقييم السابق Preassessment

قبل البدء بهذا الدرس، تأكد من أن طلبتك على معرفة كافية بمعاني الأعداد الرمزية Figurate Numbers، وعملية تكوين سلسلة من الأعداد الرمزية. كذلك ينبغي أن يكون لديهم بعض المعرفة بالجبر الأولي.

أهداف الأداء Performance Objective

- 1- سيقوم الطلبة باشتقاق صيغة لحاصل جمع أول n من الأعداد الطبيعية، والأعداد المثلثية، والأعداد التربيعية، أو الأعداد الخماسية.
- 2- بإعطاء أي قيمة تامة للمتغير n ، سيقوم الطلبة بتطبيق الصيغة المناسبة لإيجاد مجموع الأعداد الـ n الأولى الرمزية.



إن هذين الوصفين للمتغير N_n في صيغة المصفوفة يمكن أن يربطاً سوية الآن لإنتاج مصفوفة بالنسبة لـ $2N_n$ كما يعرض أدناه:



يستطيع أن يشاهد الطلبة، بدقة، بأن $2N_n = n(n+1)$ عند فحص مصفوفة $2N_n$. وعليه سيكون لدينا:

$$N_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

إن هذه النتيجة المستحدثة لـ N_n يمكن تطبيقها حيثما ظهرت الحاجة لها لإيجاد مجموع n الأولى من الأعداد الطبيعية.

لهتمل الطلبة محاولة اشتقاق صيغة بالنسبة للأعداد n الأولى من الأعداد المثلثية. ويبدو واضحاً من المصفوفات النقطية التي عرضت مبكراً، بأن ما يأتي يمكن إنشاؤه بسهولة:

$$T_n = \text{مجموع } n \text{ الأولى من الأعداد المثلثية}$$

$$T_n = \text{مجموع } n \text{ الأولى من الأعداد المثلثية} \\ = 1 + 3 + 6 + \dots + N_n \\ = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+n)$$

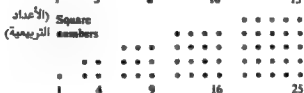
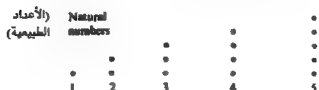
والآن يمكن وصف T_n كمجموع الأعداد الموجودة في مصفوفة



بتطبيق الصيغة التي تم تحديثها سابقاً، بالنسبة لـ N_n ولكل صف من صفوف هذه المصفوفة نحصل على:

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

للمباشرة في زيادة معرفة الطلبة بهذا الموضوع، دعهم يباشرون إنشاء مصفوفات نقطية Dot Arrays على ورقة خطوط بيانية Graph Pages لتوضيح أوائل الاصطلاحات في سلسلة الأعداد الرمزية.



افتح باب المناقشة مع الصف حول العلاقات المرئية Visual Relationship. وسلاحظ غالب الطلبة، بوضوح، إننا نستطيع وصف مجموع n من الأعداد الطبيعية كما يأتي:

$$N_n = \text{مجموع } n \text{ الأولى من الأعداد الطبيعية} \\ = 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ = 1 + (1+1) + (1+1+1) + \dots + (1+1+1+\dots+n)$$

يمكن وصف N_n ، أيضاً، بوصفها مجموع الأعداد في مصفوفة



ينقل الصفوف ومبادلتها مع الأعمدة، فإن N_n ستبدو مختلفة لحد ما:

في شكل مصفوفة ستبدو هذه المعادلة كما يأتي:

$$S_n = \begin{array}{cccccccc} & & & n & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ & & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ & & & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & n \end{array}$$

ويربط المصفوفتين T_n ، S_n ، سوف نحصل على المصفوفة الجديدة $S_n + T_n$:

$$S_n + T_n = \begin{array}{cccccccc} & & & n & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & n \end{array} \quad (n+1)$$

ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن كل صف بالمصفوفة بالنسبة لـ $S_n + T_n$ هو عبارة عن مجموع n الأولى من الأعداد الطبيعية. وفي الترميز الحالي، فإن هذا يؤثر نحو N_n .
بما أن المصفوفة تحوي على $(n+1)$ من الصفوف، فإننا سنحصل، ببساطة على:

$S_n + T_n = (n+1) N_n$
إن تعويض الصيغ التي قمنا باشتقاقها سابقاً بالنسبة لكل T_n ، و N_n يعد تمريناً في الجبر الأولي، والذي سينتج عنه بسرعة،

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

التقييم اللاحق Postassessment

لقياس مشاركة الطلبة بأهداف الأداء، ليقم كل طالب بما يأتي:

1. اشتقاق صيغة لمجموع n الأولى من الأعداد الخماسية باستخدام المصفوفات.
2. تطبيق صيغ مختلفة من التي قام الطلبة باشتقاقها لإيجاد مجموع n الأولى من الأعداد الرمزية بالنسبة لقيم تامة مختلفة للمتغير n .

$$T_n = \frac{1(1+1)}{2} + \frac{2(1+2)}{2} + \frac{3(1+2)}{2} + \frac{4(1+4)}{2} + \dots + \frac{n(1+n)}{2}$$

ينبغي على الطلبة أن يلاحظوا:

$2T_n = 1(2) + 2(3) + 3(4) + 4(5) + \dots + n(n+1)$
والتي يمكن تمثيلها في أسلوب مناسب جداً كمجموع الأعداد في مصفوفة

$$2T_n = \begin{array}{cccccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & (n+1) \\ & 3 & 4 & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & (n+1) \\ & & 4 & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & (n+1) \\ & & & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & (n+1) \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ & & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & (n+1) \end{array}$$

إن الربط بين مصفوفة T_n ومصفوفة $2T_n$ ينتج عنه مصفوفة $3T_n$ والتي يسهل جمعها:

$$3T_n = \begin{array}{cccccccc} & & & (n+1) & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdot & \cdot & (n+1) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdot & \cdot & (n+1) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdot & \cdot & (n+1) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdot & \cdot & (n+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & (n+1) \end{array}$$

إن صيغتنا بالنسبة لـ N_n ينتج عنها مباشرة:

$$3T_n = n \frac{(n+1)(1+(n+1))}{2}$$

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

أصبح الطلبة الآن جاهزين للأخذ بعين الاعتبار مجموع n الأولى من مربعات الأعداد.

$$S_n = \text{مجموع } n \text{ الأولى من مربعات الأعداد} \\ = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$

ثلاثيات فيثاغورية

83

Pythagorean Triples

نظرية فيثاغورث. ولكن هذه الطريقة سوف لا تجدي نفعا مع الثلاثية الثالثة. عند هذه النقطة تستطيع أن تقدم لطلابك طريقة مناسبة لحل هذه المسألة. إن هذا هو موضوع هذه الوحدة.

وقبل البدء بتطوير الصيغ المطلوبة، ينبغي أن نأخذ بعين الاعتبار بعض الفرضيات المساعدة البسيطة:

فرضية مساعدة Lemma 1: عندما يقسم 8 مربعا لعدد فردي، فإن الباقي سيكون 1.

البرهان Proof:

نستطيع وصف العدد الفردي بواسطة $2k+1$ ، حيث k هي

عدد صحيح

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 4k(k+1) + 1$$

بما أن k و $k+1$ متتابعين، ينبغي أن يكون أحدهما زوجيا. وعليه يجب أن يكون $4k(k+1)$ قابلا للقسمة على 8. إذن $(2k+1)^2$ عندما ستقسم بواسطة 8 سيكون المتبقي عنها 1.

إن هاتين الفرضيتان سوف تتتابع مباشرة:

فرضية مساعدة Lemma 2: عندما يقسم 8 مجموع مربعي عددين فرديين، فإن الباقي سيكون 2.

فرضية مساعدة Lemma 3: إن مجموع مربعي عددين فرديين، لا يمكن أن يكون عدداً مربعاً.

البرهان Proof:

بما أن مجموع عددين فرديين هو عدد مربع.

عندما يقسم على 8، سترك باقياً مقداره 2، المجموع زوجي ولكنه غير قابل للقسمة على 4. وعليه فإنه لن يكون عدداً مربعاً.

والآن أصبحنا على أهمية الاستعداد للبدء بتطويرنا لصيغ تخص ثلاثيات فيثاغورث. دعنا نفترض بأن (a, b, c) هي عبارة عن ثلاثية فيثاغورية - أولية. إن هذا يدل ضمناً على أن a, b هما

عند تعليم نظرية فيثاغورث في مرحلة المدارس الثانوية، يقترح المعلمون، غالباً، أن يدرك الطلبة (ويتذكروا دائماً) مجموعة شائعة محددة من ثلاثة أعداد والتي تصف أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية. إن بعض هذه المجموعات المرتبة من الأعداد الثلاثة، تعرف بثلاثيات فيثاغورث:

$$(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25)$$

سيمأل الطالب اكتشاف هذه الثلاثيات الفيثاغورية عندما ترد في تمارين مختارة. وكيف يمكن للمرء أن يشتق المزيد من الثلاثيات دون اللجوء إلى أسلوب المحاولة والخطأ؟ إن هذا السؤال، والذي يكثر الطلبة من طرحه، سوف يجاب عنه في هذه الوحدة.

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1 سيقوم الطلبة بتوليد ستة ثلاثيات فيثاغورية - أولية باستخدام الصيغ التي طورت خلال هذه الوحدة.
- 2 سيبين الطلبة خصائص مجموعة مختلفة من أعضاء الثلاثيات الفيثاغورية الأولية.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بنظرية فيثاغورث. وينبغي أن يكونوا قادرين على معرفة الثلاثيات الفيثاغورية، والتمييز بين الثلاثيات الفيثاغورية - الأولية وبين غيرها من الثلاثيات.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

أسأل طلبتك إيجاد العضو المفقود في الثلاثيات الفيثاغورية

الآتية:

$$1. (3, 4, \underline{\quad})$$

$$2. (\underline{\quad}, 25, 27)$$

$$3. (\underline{\quad}, \underline{\quad}, 11)$$

إن الثلاثيتين الأولى والثانية يسهل احتسابها باستخدام

بما أن $a = p - q$ وأن $c = p + q$

$$a = m^2 - n^2 \quad \text{وأن} \quad c = m^2 + n^2$$

$$\text{كذلك، بما أن } b = 2r \quad \text{وأن} \quad b^2 = 4r^2 = 4pq = 4m^2n^2 \quad \text{وأن} \quad b = 2mn$$

ولكي نلخص ما ذكر، نستطيع القول بأن لدينا الآن صياغات لتوليد ثلاثيات فيثاغورية:

$$c = m^2 + n^2 \quad b = 2mn \quad a = m^2 - n^2$$

إن العديدين m و n لا يمكن أن يكون كل منهما زوجياً، نظراً لكونتهما أوليان نسبياً، كما لا يمكن أن يكون كل منهما فردياً؛ لأن هذا سوف يحيل قيمة $c = m^2 + n^2$ إلى عدد زوجي، وهو أمر أثبتنا استحالة مبرك. ونظراً لأن هذا الأمر يعد مؤشراً على ضرورة كون أحدهما فردياً والآخر زوجياً،

$b = 2mn$ ينبغي أن يكون قابلاً للقسمة على 4. وعليه لا يمكن أن تتألف ثلاثيات فيثاغورث من ثلاثة أعداد طبيعية. إلا أن هذا لا يعني استحالة كون بقية أعضاء الثلاثيات الفيثاغورية يمكن أن تكون أحادية.

دعنا نقوم بعكس العملية لفترة قصيرة من الوقت، ونأخذ بعين الاعتبار عديدين أوليين نسبياً m و n (حيث $m > n$) وأن يكون أحدهما فردياً والآخر زوجياً. وسنقوم الآن ببيان أن (a, b, c) هي عبارة عن ثلاثة فيثاغورية أولية. حيث

$$c = m^2 + n^2, \quad b = 2mn, \quad a = m^2 - n^2$$

إنه من السهل للتحقق جبرياً أن:

$$(m^2 + n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 - n^2)^2$$

وأن تتكون ثلاثة فيثاغورية. وما ينبغي هو برهنة أن (a, b, c) ثلاثية فيثاغورية أولية.

افترض أن لكل من a و b عامل مشترك هو h . بما أن a هو عدد فردي، ينبغي أن يكون h زوجياً. ولكن $a^2 + b^2 = c^2$ ، فإن h سوف يكون عاملاً لـ c . ولدينا أيضاً h عامل لكل من $m^2 - n^2$ وكذلك $m^2 + n^2$ بالإضافة إلى مجموعهما، $2m^2$ ، والفرق بينهما $2n^2$.

بما أن h عدد فردي، فإنه سيكون عاملاً مشتركاً لكل من m^2 و n^2 . ولكن m و n (وكنيجة لذلك m^2 و n^2) يمدان عديدين أوليين نسبياً لذا فإن h يكون عاملاً مشتركاً لكل من m و n . إن هذا التناقض ينشأ عنه كون a و b أوليان نسبياً.

أخيراً، وبهدف إنشاء طريقة لتوليد ثلاثيات فيثاغورية أولية، يجب على الطلبة أن يكونوا متلهفين لوضعها موضع التطبيق. إن الجدول الآتي يوفر بعضاً من اصغر الثلاثيات الفيثاغورية الأولية.

عدنان أوليان نسبياً. وعليه، لا يمكن أن يكون كلاهما زوجياً. هل يمكن أن يكونا فرديين؟

إذا كان كل من a و b فردياً، بعدئذ بواسطة الفرضية المساعدة Lemma 3 $a^2 + b^2 = c^2$. وهذا يناقض فرضنا بأن (a, b, c) هي ثلاثة فيثاغورية؛ وعليه لا يمكن أن يكون كلا من a ، b فرديان بنفس الوقت. وعليه، يجب أن يكون أحدهما فردياً والثاني زوجياً.

دعنا نفترض بأن a هو عدد فردي و b عدد زوجي. إن هذا يدل ضمناً على أن c هو عدد فردي أيضاً. نستطيع إعادة كتابة:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = (c-a)(c+a)$$

وبما أن مجموع، و فرق المدين الفرديين يكون زوجياً :

$$c+a=2p \quad \text{وذلك} \quad c-a=2q \quad (\text{حيث } p, q \text{ أعداد طبيعية}).$$

وبحل المعادلة بدلالة a و c نحصل على:

$$c = p + q, \quad a = p - q,$$

والآن نستطيع أن تعرض بأن p و q ينبغي أن يكونا نسبين أولياً. افترض p و q ليسا نسبين أولياً، وقل $g > 1$ كان عاملاً مشتركاً. بعدئذ سيكون g أيضاً عاملاً مشتركاً لكل من a و c . وينس الطريقة سيكون g أيضاً عاملاً مشتركاً لكل من $c+a$ ، و $c-a$. إن هذا سيصنع من g^2 عاملاً مشتركاً للمتغير b^2 ، نظراً لأن $b^2 = (c+a)(c-b)$.

وسيعقب ذلك بأن يكون g عاملاً لـ b . والآن إذا كان g عاملاً لـ b وكذلك عاملاً مشتركاً لـ c و a ، بعدئذ لن يكون a ، b ، c أعداد أولية نسبياً. وهذا يناقض فرضنا بأن (a, b, c) هي عبارة عن ثلاثة فيثاغورية. إذن p ، q ينبغي أن تكون أولية نسبياً.

بما أن b عدد زوجي، نستطيع وصفه كما يأتي:

$$b = 2r$$

ولكن

$$b^2 = (c+a)(c-b)$$

وعليه فإن

$$Pq = r^2 \quad \text{أو} \quad b^2 = (2p)(2q) = 4r^2$$

إذا كان حاصل ضرب عديدين طبيعيين أوليان نسبياً (p و q) هو مربع العدد الطبيعي (r)، بعدئذ فإن كلا منهما ينبغي أن يكون مربع العدد الطبيعي. وعليه فإننا سوف نقترض:

$$p = m^2 \quad \text{وكذلك} \quad q = n^2$$

حيث يعد m ، و n عدنان طبيعيين. وبما أنهما عاملان لعديدين أوليين نسبياً (p و q)، فانهما (m و n) سيكونان نسبين أيضاً.

إن السؤال الطبيعي الذي يجب أن تطرحه على طلبتك هو إيجاد جميع الثلاثيات الفيثاغورية الأولية والتي تعد أعداد أولية متتالية باستخدام طريقة تشابه تلك التي استخدمناها أعلاه، سينجح الطلبة في تحديد وجود ثلاثية واحدة تحقق هذا الشرط وهي (3, 4, 5).

يمكن اقتراح تحريات أخرى لكي يأخذها الطلبة في اعتباراتهم. وفي أي حالة من الحالات ينبغي أن يبدي الطلبة اهتماما كبيرا بالثلاثيات الفيثاغورية، ونظرية الأعداد الأولية بعد انتهائهم من هذه الوحدة.

التقييم اللاحق Postassessment

1. جد ستة ثلاثيات فيثاغورية - أولية والتي لم يتضمنها الجدول أعلاه.
2. جد طريقة لتوليد ثلاثيات فيثاغورية أولية بصيغة : $b = a+1$ حيث (a, b, c).
3. برهن بأن أي ثلاثية فيثاغورية - أولية يوجد فيها عضو واحد قابل للقسمة على 3.
4. برهن بأن أي ثلاثية فيثاغورية - أولية يوجد فيها عضو واحد قابل للقسمة على 5.
5. برهن بأنه في أي ثلاثية فيثاغورية - أولية يكون حاصل ضرب أعضائها من مضاعفات 60.
6. جد الثلاثية الفيثاغورية (a, b, c) حيث $a^2 = b+2$.

(ثلاثيات فيثاغورية)

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85

إن الفحص السريع لهذا الجدول يظهر بأن ثلاثيات فيثاغورية - أولية محددة (a, b, c) فيها $c = b+1$.
دع الطلبة يكتشفون العلاقة بين m و n في هذه الثلاثيات. ينبغي عليهم أن يلاحظوا بأن $m = n+1$ بالنسبة لهذه الثلاثيات. للبرهنة على صحة ذلك بالنسبة لثلاثيات فيثاغورية - أولية أخرى (لا توجد في هذا الجدول)، دع $m = n+1$ وقم بتوليد الثلاثيات الفيثاغورية.

$$a^2 = m^2 - n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$b = 2mn = 2n(n+1) = 2n^2 + 2n$$

$$c^2 = m^2 + n^2 = (n+1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1$$

يبدو واضحا بأن $c = b+1$ ، وهو الذي يجب علينا بيبائه!

قابلية القسمة

Divisibility

التقييم السابق Preassessment

ليقم الطلبة ببيان أي من الأعداد التالية يقبل القسمة على 2، أو 3، أو 5 دون إجراء القسمة.

(أ). 792	(ب). 835	(ج). 356
(د). 3890	(هـ). 693	(و). 743

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لاشك بأن الطلبة يدركون أن أي عدد زوجي يقبل القسمة

ستعرض هذه الوحدة طرائق لإيجاد القاسم دون إجراء القسمة.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء أي عدد صحيح، سيقوم الطلبة بتحديد عوامله الأولية. دون القيام بأي نوع من القسمة.
- 2- سيقوم الطلبة بإنتاج قواعد لفحص القابلية على القسمة بواسطة جميع الأعداد الطبيعية التي تقل عن 49، وبعض آخر يزيد على 49.

البرهان Proof: تأمل العدد $a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$

(الحالة العامة $a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 \dots a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} \dots a_1a_0$ والتي تشبه صيغة العدد).

إن هذه الصيغة يمكن أن تكتب كما يأتي:

$$a_8(9+1)^8 + a_7(9+1)^7 + \dots + a_1(9+1) + a_0$$

باستخدام الصيغة $M_9(9)$ لمتوسط مضاعفات 9، بالنسبة لـ

$i=1,2,3,4,5, \dots, 7,8$ ، نستطيع إعادة كتابة العدد كما يأتي:

$$a_8[M_9(9)+1] + a_7[M_7(9)+1] + \dots + a_1[M_1(9)+1] + a_0$$

(إن ذكر نظرية ذات الحدين في هذا الموضوع قد يكون لها فوائد ملموسة)

إن العدد يساوي:

$$M(9) + a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$$

حيث يمثل $M(9)$ مضاعفا للعدد 9. إذن العدد يقبل القسمة

على 9 (أو 3). إذا كان مجموع المراتب العشرية للعدد يقبل القسمة على 9 (أو 3).

إن قاعدة لاختبار قابلية القسمة على 11 قد برهن عليها

بأسلوب يشابه البرهان لقابلية القسمة على 3 و 9.

قابلية القسمة على 11: إن رقما معلوما يقبل القسمة على 11

إذا كان الفرق بين مجموع المرتبتين المتناوبتين يقبل القسمة على 11

البرهان Proof: تأمل العدد $a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$

(باستخدام الحالة العامة يكون مشابها له). إن هذه الصيغة

يمكن كتابتها كما يأتي:

$$a_8(11-1)^8 + a_7(11-1)^7 + \dots + a_1(11-1) + a_0$$

$$= a_8[M_8(11)-1] + a_7[M_7(11)-1] + \dots + a_1[M_1(11)-1] + a_0$$

بعدد ستكون هذه الصيغة مساوية

$$a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 + M(11) + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$$

القسمة على 11.

سوف تكون على جانب الصواب إذا بينت التوسعات في

الأسس غير العشرة لكل من قواعد قابلية القسمة المذكورة سابقا.

وغالبا ما يكون الطلبة قادرين على صياغة هذه التعميمات

بجهد ذاتي (خصوصا مع توفر الملاحظة المناسبة). إن المتبقي

من هذا الأنموذج سوف يتعامل مع قواعد اختبار قابلية القسمة

للأعداد الأولية $7 \leq$ ومركباته.

قابلية القسمة على 7: قم بإلغاء آخر مرتبة من العدد

العلوم، بعدد طرح ضعف الرقم الملغى من العدد المتبقي. إذا

كانت النتيجة تقبل القسمة على 7، فإن العدد الأصلي يقبل

القسمة على 7. إن هذه العملية يمكن تكرارها إذا كانت

النتيجة كبيرة جدا للفحص البسيط على قابلية القسمة على 7.

البرهان Proof: لتبرير الفكرة، تأمل المراتب المنتهية

الممكنة المختلفة والطرح الذي يقابل كل منها:

على 2، وعليه فإن الأعداد أعلاه (أ، ج، د) تقبل القسمة على

2. كذلك سيدرك جزء كبير منهم بأن العدد الذي يكون آخر

مراتبه صفرا أو 5 (مرتبة الأحاد) يقبل القسمة على 5. عند

هذه النقطة سيكون الطلبة متلهفين إلى توسيع هذه القاعدة لكي

تصح في فحص قابلية القسمة على 3. أما الأعداد (ج، هـ، و)

فهي الأعداد الوحيدة من الأعداد أعلاه التي آخر مراتبها من

مضاعفات العدد 3. ولكن أحدها فقط، 693، ويقبل القسمة

على 3. ينبغي أن تثير هذه الأمور ميلا كافيا نحو تطوير قواعد

لاختبار قابلية القسمة على أعداد غير 2 أو 5 بين الطلبة.

توجد طرق مختلفة لتطوير قواعد تختبر قابلية القسمة على

أعداد متنوعة. ويمكن أن تطور هذه القواعد بدلالة مقدار الأعداد.

قد تروق هذه الطريقة للبعض، ولكنها تنقص من الأنماط المختلفة

والتي غالبا ما يفضلها الطلبة في التطوير الرياضي. في هذه الوحدة

سنأخذ القواعد بعين الاعتبار ضمن مجاميع من الطرائق المتقاربة.

قابلية القسمة على قوى الـ 2: إن عددا معلوما يقبل

القسمة على 2^1 أو $(2^2, 2^3, \dots, 2^n)$ على التوالي، إذا

كانت المرتبة الأخيرة 1 (أو 2، 3، \dots ، n ، على التوالي)

تقبل القسمة على 2^1 (أو $2^2, 2^3, \dots, 2^n$ ، على التوالي).

البرهان Proof: تأمل العدد الآتي والذي يتألف من n مراتب

عشرية، $a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 \dots a_2a_1a_0$ والذي يمكن كتابته كما يأتي:

$$a_810^{n-1}a_710^{n-2}a_610^{n-3}a_510^{n-4}a_410^{n-5}a_310^{n-6}a_210^{n-7}a_110^{n-8}a_0$$

أن جميع الحدود، باستثناء الأخير تكون دائما قابلة للقسمة

على 2، ينبغي علينا أن نتأكد من قابلية قسمة العدد الأخير

عندما سنقوم باختبار قابلية القسمة على 2. وبنفس الطريقة،

بما أن جميع الحدود باستثناء الحدين الآخرين تقبل القسمة

على 2^2 دائما، يجب علينا تحديد إذا كانت المرتبتين

الأخيرتين (تعامل كأعداد) قابلة للقسمة على 2^2 . إن هذا

الأسلوب يمكن توسيعه بسهولة لفائدة الحالة التونية Case n^{th} .

قابلية القسمة على قوى الـ 5: إن عددا معلوما يقبل

القسمة على 5^1 (أو $5^2, 5^3, \dots, 5^n$ ، على التوالي) إذا

كانت المرتبة الأخيرة 1 (أو 2، 3، \dots ، n ، على التوالي)

تقبل القسمة على 5^1 (أو $5^2, 5^3, \dots, 5^n$ ، على التوالي).

البرهان Proof: إن البرهان على هذه القواعد يتبع نص

الأسلوب كما في البرهان الخاص باختبار القسمة على قوى الـ

2، باستثناء أن العدد 2 يستبدل بالعدد 2.

قابلية القسمة على 3 و 9: إن رقما معلوما يقبل القسمة

على 3 (أو 9) إذا كان مجموع المراتب العشرية يقبل القسمة

على 3 (أو 9).

(لكل من 7، 13، 17) ينبغي أن تؤدي بالطالب إلى تطوير قواعد مشابهة لاختبار قابلية القسمة على أعداد أولية أكبر. إن الجدول الآتي يعرض "مضاعفات Multipliers" المرتبة للمغاة لأعداد أولية مختلفة.

المضاعف	لاختبار قابلية القسمة بواسطة
2	7
1	11
9	13
5	17
17	19
16	23
26	29
3	31
11	37
4	41
30	43
14	47

ملء الفراغات في مجموعة الأعداد الصحيحة، تصبح عملية اخذ قابلية قسمة الأعداد غير الأولية أمراً ضرورياً.

قابلية القسمة على الأعداد غير الأولية Composites:

إن رقماً معلوماً يقبل القسمة على عدد غير أولي، إذا كان يقبل القسمة على كل من عوامله الأولية النسبية. إن الجدول الآتي يوفر عرضاً لهذه القاعدة. وعليك، أو على طلبتك إكمال الجدول لغاية العدد 48.

يقبل القسمة على	ينبغي أن يقسم العدد على
6	2.3
10	2.5
12	3.4
15	3.5
18	2.9
21	3.7
24	3.8
26	2.13
28	4.7

عند هذه النقطة سيكون الطالب قد امتلك مجموعة من القواعد لاختبار قابلية القسمة، وعينة شاملة لنظرية العدد الأولي. ليقم الطلبة بالتمرن على استخدام هذه القواعد (لكي تنغرس فيهم معرفة كافية بالموضوع) مع محاولة تطوير قواعد لاختبار قابلية القسمة على أعداد أخرى في الأساس 10. وكذلك تعميم هذه القواعد على أسس أخرى. إن عدم توفر مساحة كافية بالكتاب. لنناقشة أكثر تفصيلاً للموضوع قد حالت

المرتبة المنتهية	عدد المطروح من الأصلي
1	$20+1 = 21 = 3*7$
2	$40+2 = 42 = 6*7$
3	$60+3 = 63 = 9*7$
4	$80+4 = 84 = 12*7$
5	$100+5 = 105 = 15*7$
6	$120+6 = 126 = 18*7$
7	$140+7 = 147 = 21*7$
8	$160+8 = 168 = 24*7$
9	$180+9 = 189 = 27*7$

في كل من مضاعفات العدد 7 قد تم الطرح لمرة واحدة، أو عدة مرات من العدد الأصلي. وعليه، إذا كان العدد المتبقي يقبل القسمة على 7. بعدئذ، سيكون كذلك العدد الأصلي. **قابلية القسمة على 13:** إن هذه القاعدة تشبه القاعدة المستخدمة في اختبار القسمة على 7. باستثناء استبدال العدد 7 بالعدد 13. وبدلاً من طرح ضعف المرتبة للمغاة، سوف نقوم بطرح العدد الملقى تسعة مرات لكل مرة.

البرهان Proof: مرة ثانية تأمل المراتب المنتهية الممكنة – المختلفة والطرح الذي يقابل كل منها:

المرتبة المنتهية	عدد المطروح من الأصلي
1	$90+1 = 91 = 7*13$
2	$180+2 = 182 = 14*13$
3	$270+3 = 273 = 21*13$
4	$360+4 = 364 = 28*13$
5	$450+5 = 455 = 35*13$
6	$540+6 = 546 = 42*7$
7	$630+7 = 637 = 49*7$
8	$720+8 = 728 = 56*7$
9	$810+9 = 819 = 63*7$

في كل حالة من مضاعفات العدد 13 قد تم طرح مرة واحدة أو عدة مرات من العدد الأصلي. وعليه، إذا كان العدد المتبقي يقبل القسمة على 13، بعدئذ سيكون العدد الأصلي قابلاً للقسمة على 13 أيضاً.

قابلية القسمة على 17: إن هذا الأمر يشابه القاعدة المستخدمة في اختبار قابلية القسمة على 7 باستثناء استبدال 7 بالعدد 17. وبدلاً من طرح ضعف المرتبة للمغاة، وسوف نقوم بطرح المرتبة للمغاة خمسة مرات في كل مرة.

البرهان Proof: إن البرهان على قاعدة قابلية القسمة على 17 يتبع نمطاً مشابهاً لكل من برهاني 7 و 13. إن الأنماط المستحدثة في قواعد القسمة السابقة – الثلاثة

(أ) 280 (ب) 1001 (ج) 495 (د) 315 (هـ) 924

إن مراجعاً إضافية على هذا الموضوع يمكن أن تعثر عليها في:
Posamentier, A.S., and S.Krulik, Teachers:
Prepare Your Students for the Mathematics for
SAT 1: Methods and Problem Solving,
Strategies. Thousand Oaks, CA: Corwin, 1996.

Posamentier, A.S. and C.T. Salkind, Challenging
Problem in Algebra, New York: Dover, 1996

دون اعتماد مبدأ تطوير أكثر تفصيلاً للقواعد في هذه الوحدة.

التقييم اللاحق Postassessment

- إن الطلبة الذين قد أدركوا أهداف أداء هذه الوحدة
سيكونون قادرين على حل هذه التمارين:
1. قرر قاعدة لاختبار قابلية القسمة على:
(أ) 8 (ب) 18 (ج) 13 (د) 23 (هـ) 24 (و) 42
2. جد العوامل الأولية لكل مما يأتي:

متابعة فايبوناتشي

Fibonacci Sequence

85

Month	Pairs	No of A's	No of B's	Total no of rabbits
Jan		1	0	1
Feb		1	1	2
March		2	1	3
April		3	2	5
May		5	3	8
June		8	5	13

أبدأ بالشهر الأول، واستمر إلى الشهر الذي تليه موضع
الطريقة عند تقدمك في شرح الموضوع. وذكر الطلبة بأن زوج
الصغار ينبغي أن ينضج ويكتمل لمدة شهر واحد قبل أن يصبح
مهيئاً للتكاثر.

استمر في الخطط التوضيحية لغاية الشهر الثاني عشر حيث
سيكتشف الطلبة بأن 370 زوجاً من الأرانب قد نتج خلال مدة
سنة واحدة.

والآن حاول أن تركز انتباه الطلبة على العمود الثالث (عدد
A)، تتابع فايبوناتشي، ودعمهم يحاولون اكتشاف قاعدة لاستمرار
هذا التتابع. اخبر الطلبة بضرورة ملاحظة أن كل حد هو عبارة
عن مجموع الحدين السابقين. ويمكن كتابة هذا كصيغة عامة f_n
على $f_{n-1} + f_n =$ ، حيث يمثل f_n عدد فايبوناتشي التوني n . على

هدف الأداء Performance Objective

- سيقوم الطلبة بما يأتي:
1. تعريف تتابع فايبوناتشي.
2. إيجاد مجموع جملة من أعداد فايبوناتشي.
3. إيجاد مجموع مربعات أعداد فايبوناتشي الأولى.
4. اكتشاف خصائص أعداد فايبوناتشي.

التقييم اللاحق Postassessment

لبحاول الطلبة حل المسألة الآتية: كم عدد أزواج الأرانب
التي سوف تتكاثر خلال سنة، ميتدينز يزوج واحد منها، إذا
كان الزوج يلد في الشهر الواحد زوجاً آخر، يصبح قادراً على
التكاثر من الشهر الثاني التالي؟

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

عرض الرياضي الإيطالي ليوناردو من مدينة بيزا Pisa (وكان
ابن، Figlio، للمواطن Bonaccio، ومن أجل ذلك عرف باسم
Fibonacci) المسألة أعلاه في كتابه LIBER ABACI المنشور
عام 1202.

تأمل حله للمسألة مع الطلبة ميتدنا برسم مخطط بياني كما يظهر
أدناه.

$$f_K f_{K-1} - f_{K-1} f_K = f_K (f_{K+1} - f_{K-1}) = f_K \cdot f_K = f_K^2$$

إن هذا سوف يمنحنا العلاقات الآتية :

$$\begin{aligned} f_1^2 &= f_1 f_2 - f_0 f_1 \\ f_2^2 &= f_2 f_3 - f_1 f_2 \\ f_3^2 &= f_3 f_4 - f_2 f_3 \end{aligned} \quad (\text{حيث } f_0 = 0)$$

$$\begin{aligned} f_{n-1}^2 &= f_{n-1} f_n - f_{n-2} f_{n-1} \\ f_n^2 &= f_n f_{n+1} - f_{n-1} f_n \end{aligned}$$

بإضافة الحدود المتتالية، نحصل على:

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

يمكن أن نصل نتابع فايوناشي بموضوع قديم في الرياضيات. باختبار نسب الأزواج الأولى المتتالية للأعداد في التتابع سنحصل على الآتي:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{1} = 1.0000 & \frac{2}{1} = 2.0000 \\ \frac{1}{3} = 1.5000 & \frac{5}{3} = 1.6667 \\ \frac{2}{5} = 1.6000 & \frac{13}{8} = 1.6250 \\ \frac{8}{5} = 1.6154 & \frac{34}{21} = 1.6190 \\ \frac{21}{13} = 1.6176 & \frac{89}{55} = 1.6182 \\ \frac{34}{21} = 1.6180 & \frac{233}{144} = 1.6181 \end{array}$$

إن النسب f_n/f_{n-1} ($n > 0$) تؤلف تتابعا تنازليا لقيم n الفردية، وتتابعاً تصاعدياً لقيم n الزوجية. إن كل نسبة على الجهة اليسرى أكبر من النسبة المقابلة في الجهة اليمنى. تصل النسبة إلى قيمة محددة بين 1.6180 و 1.6181. ويمكن أن يعرض بأن هذه النهاية هي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أو 1.61803 مقرباً إلى خمسة مراتب عشرية.

كانت النسبة ذات أهمية بالغة لدى اليونان بحيث أطلقوا عليها تسمية "النسبة الذهبية Golden Ratio" أو "القسم الذهبي The Golden Section". ولم يلجأ اليونان إلى وصف العلاقة في صيغة عشرية ولكنهم استخدموا إنشاءً هندسياً بحيث تتناسب فيه قطعتي مستقيم بنسبة ذهبية مضبوطة، 1.6618033... إلى 1.

ينتج عن النسبة الذهبية الارتباط الأساسي بين تتابع فايوناشي والهندسة. تأمل ثانية نسب أعداد فايوناشي

$$\text{سبيل المثال. } f_7 = f_5 + f_6; f_4 = f_2 + f_3; f_3 = f_1 + f_2 \quad f_1 - f_2 = -1$$

يمتلك تتابع فايوناشي مجموعة من الخصائص الممتعة والتي يستطيع الطلبة ملاحظتها عند دراسة العلاقات القائمة بين الحدود. يمكن البرهنة على أن مجموع n من أعداد فايوناشي الأولى سيكون.

$$(A) \quad f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$$

لقد لاحظ سابقاً صحة العلاقات الآتية:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3 - f_2 \\ f_2 &= f_4 - f_3 \\ f_3 &= f_5 - f_4 \end{aligned} \quad (\text{عينا لأن } f_3 = f_1 + f_2)$$

$$\begin{aligned} f_{n-1} &= f_{n+1} - f_n \\ f_n &= f_{n+2} - f_{n+1} \end{aligned}$$

بإضافة حدود هذه المعادلات بصورة متتالية سنتج عن ذلك $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = f_{n+2} - f_2$ ولكن نحن علم بأن: $f_2 = 1$ وعليه $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$.

بنفس الأسلوب نستطيع إيجاد صيغة لمجموع n الأولى من أعداد فايوناشي وبأدلة إيهامية (indices) معاملات فردية:

$$(B) \quad f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$$

ولإنجاز ذلك نقوم بكتابة:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 \\ f_3 &= f_4 - f_2 \\ f_5 &= f_6 - f_4 \\ f_7 &= f_8 - f_6 \\ f_{2n-3} &= f_{2n-2} - f_{2n-4} \\ f_{2n-1} &= f_{2n} - f_{2n-2} \end{aligned}$$

مرة ثانية. بإضافة حدود هذه المعادلات بصورة متتالية، سيكون لدينا:

$$f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$$

إن مجموع n الأولى من أعداد فايوناشي وبأدلة إيهامية هو:

$$(C) \quad f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$$

للبهنة على ذلك سنقوم بطرح معادلة (B) من ضعف معادلة (A). يعني، $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{2n} = f_{2n+2} - 1$ ، للحصول على:

$$f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} = f_{2n+2} - 1 - f_{2n} = f_{2n+2} - f_{2n} - 1 = f_{2n+1} - 1$$

لأن $f_{2n+2} = f_{2n} + f_{2n+1}$ وأن $f_{2n+2} = f_{2n+1} + f_{2n}$ وهو الأمر

الذي نريد البرهنة عليه.

وبتطبيق آخر الجمع المتتابع لحدود المعادلات نستطيع اشتقاق صيغة لمجموع مربعات n الأولى من أعداد فايوناشي. وعلياً أن نلاحظ في أول الأمر بالنسبة $K > 1$:

النوني n^{th} لعدد فايبوناتشي، f_n ، ويكون $t_1=1$ و $t_2=1$.

$$t_1 = \frac{a^1 - b^1}{1 - b} = 1$$

$$t_2 = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} = \frac{(\sqrt{5})(1)}{\sqrt{5}} = 1$$

وعليه فإن $f_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$ حيث $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ وأن $n=1,2,3, \dots$

التقييم اللاحق Postassessment

1. جد مجموع أعداد فايبوناتشي التسعة الأولى.
2. جد مجموع أعداد فايبوناتشي الخمسة الأولى بمعاملات فردية.

مراجع References

- Brother, U. Alfred, An Introduction to Fibonacci Discovery, San Jose, Calif.: The Fibonacci Association, 1965.
- Bicknell, M. and Verner E. Hoggatt, Jr., A Primer for The Fibonacci Numbers, San Jose, California: The Fibonacci Association, 1972.
- Hoggatt, Verner E. Jr, Fibonacci and Lucas Numbers, Boston: Houghton Mifflin, 1969.
- Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.
- N.N. Vorob'ev, Fibonacci Numbers, New York: Blaisdell Publishing, 1961.
- T.H. Garland, Fascinating Fibonacci, Palo Alto, CA: Dale Sevmour Public, 1987.

التتابعة، وكما ذكرنا سابقاً، فإن جدول الكسور المذكورة أعلاه يبدو بأنها تقارب النسبة الذهبية. دعنا نتمتع في بحث هذه الملاحظة متأملين قطعة المستقيم APB ، وتكون النقطة P مقسمة لقطعة المستقيم AB بحيث $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$.



لنفترض $x = \frac{AB}{AP}$. وعليه فإن:

$$x = \frac{AB}{AP} = \frac{AP + PB}{AP} = 1 + \frac{PB}{AP} = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\text{إذن } x^2 - x - 1 = 0 \text{ أو } x = 1 + \frac{1}{x}$$

إن جذري هذه المعادلة هي:

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887 \text{ وكذلك}$$

$$b = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.6180339887$$

نظراً لكوننا مهتمين بأطوال قطعتي المستقيم، ينبغي أن نستخدم الجذر الموجب، a ، فقط. ولما كان a ، و b يمثلان جذور المعادلة $x^2 - x - 1 = 0$ (1) $a^2 = a + 1$ (2) $b^2 = b + 1$.

بضرب (1) بـ a^n (حيث تمثل n عدداً صحيحاً) $a^{n+2} = a^{n+1} + a^n$
بضرب (2) بـ b^n (حيث تمثل n عدداً صحيحاً) $b^{n+2} = b^{n+1} + b^n$
بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1).

$$a^{n+2} - b^{n+2} = (a^{n+1} - b^{n+1}) + (a^n - b^n)$$

والآن، بالقسمة على $a - b = \sqrt{5}$ (لا يساوي صفراً!):

$$\frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a - b} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} + \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

وإذا قمنا الآن بافتراض $t_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$ ، بمدد:

$t_n = t_{n+1} - t_{n+2}$ (تشابه تعريف تتابع فايبوناتشي). إن كل هذا يبقى لكي يعرض بالترتيب فنكون قادرين على إنشاء t_n كالحمد

86

معادلات دايوفانتين

Dophantine Equations

المتغير k حيث تمثل a ، و b ، و k أعداد صحيحة، بعدئذ يوجد عدد غير محدود من الحلول العددية الصحيحة لكل من x و y في $ax+by=k$. إن معادلات من هذا النوع، والتي يجب أن تكون حلولها أعدادا صحيحة تعرف "بمعادلات دايوفانتين" تقديرا للرياضي اليوناني دايوفانتوس Diophantus، والذي دارت كتاباته حولها.

عينا لكون العامل المشترك الأكبر لكل من 3 و 4 هو 12، وهو عامل لـ 250، يوجد عدد غير محدود من الحلول العددية الصحيحة للمعادلة $4x+3y=250$. إن السؤال الذي يواجه طلبتك هو كم عدد (إذا كانت) الحلول العددية الصحيحة الموجبة الموجودة؟. إن إحدى الطرق المتاحة للحل غالبا ما تعرف بطريقة أويلر Euler's Mathod (لويونارد أويلر، 1707-1783).

لكي تبدأ، ينبغي على الطلبة حل المعادلة بالنسبة للمتغير بالمعامل صاحب القيمة المطلقة الأقل، في هذه الحالة y . إذن $y = \frac{250-4x}{3}$. يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة لفصل الأجزاء الصحيحة كما يأتي:

$$y = 83 + \frac{1}{3} - x - \frac{x}{3} = 83 - x + \frac{1-x}{3}$$

والآن اعرض متغيرا جديدا، لنقل t ، بحيث يكون $t = \frac{1-x}{3}$. ويحل المعادلة بالنسبة لـ x ينتج $x = 1-3t$. بما أنه لا يوجد معامل كسري في هذه المعادلة، فليس ثمة حاجة إلى إعادة العملية والتي يجب إجرائها في حالة عدم الحصول إلى هذه الحالة (يعني، يعرض متغير جديد في كل مرة، كما في المتغير t أعلاه).

والآن بالتعويض عن x في المعادلة أعلاه نحصل على:

$$y = \frac{250-4(1-3t)}{3} = 82+4t$$

مختلفة للمتغير t ، يمكن استخراج القيم المقابلة لكل من x و y . إن جدولا يحوي هذه القيم قد يبرهن على قاعدته وأهميته.

...	2	1	0	-1	-2	...	t
...	-5	-2	1	4	7	...	x
...	90	86	82	78	74	...	y

يمكن أن تعرض هذه الوحدة على أي صف قد أنقن المبادئ الأساسية للجبر.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. لديك معادلة بمقتيرين. وسيقوم الطلبة بإيجاد الحلول العددية الصحيحة (إذا وجدت).
2. لديك مسألة لفظية والتي تتطلب حلا لمعادلة دايوفانتين، وسيحدد الطلبة (حيث يكون ملائما) عدد الحلول الممكنة.

التقييم السابق Preassessment

ليقم الطلبة بحل المسألة الآتية: افترض قد طلب منك رب العمل الذهاب إلى دائرة البريد لشراء طوابع بريد فئة 6¢ و 8¢. وأعطاك 5 دولارات لكي تنفقها لأجل ذلك. كم عدد مجموعات الطوابع البريدية فئة 6¢ و 8¢ تستطيع اختيارها لكي تنجز عملية الشراء؟.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

سيدرك معظم الطلبة، مباشرة، بأن هناك متغيرين يجب تحديدهما: لنقل x و y . وبافتراض x يمثل عدد طوابع فئة 8¢. وأن لا يمثل عدد طوابع فئة 6¢، وستكون المعادلة $8x+6y=500$. ويمكن أن تحول هذه المعادلة إلى $4x+3y=250$ عند هذا المفترق ينبغي أن يدرك الطلبة بأنه رغم أن هذه المعادلة تمتلك عددا غير محدود من الحلول، لكنها قد تمتلك، أو لا تمتلك عددا غير محدود من الحلول العددية الصحيحة. يضاف إلى ذلك، إنها قد تمتلك أولاً تمتلك عددا غير محدود من الحلول العددية الصحيحة الموجبة (كما طلب في المسألة الأصلية). إن المسألة الأولى التي يجب أن نأخذها بعين الاعتبار فيما إذا كانت الحلول العددية الصحيحة موجودة بالفعل:

ولأجل ذلك يمكن توظيف نظرية مفيدة، والتي تنص على أنه إذا كان المعامل المشترك الأكبر لكل من a و b بمعاملا

$$t = \frac{3(2v-1)+1}{2} = 3v-1 \quad \text{وعليه}$$

$$y = \frac{5t-4}{3} \quad \text{كذلك}$$

$$y = \frac{5(3v-1)-4}{3} = 5v-3 = y \quad \text{وعليه}$$

$$x = \frac{8y+39}{5} \quad \text{وبالمثل}$$

$$x = \frac{8(5v-3)+39}{5} = 8v+3 = x \quad \text{وعليه}$$

...	2	1	0	-1	-2	...	v
...	19	11	3	-5	-13	...	x
...	7	2	-3	-8	-13	...	y

وعليه فإن الجدول أعلاه يبين كيف أن حلولاً مختلفة لمعادلة دايوفانتين هذه يمكن أن تولد بهذه الطريقة. وينبغي أن يشجع الطلبة على تفحص طبيعية أعضا مجموعة الحل. وسيتم عرض طريقة أخرى لمعادلات دايوفانتين في وحدة 87.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بحل كل من معادلات دايوفانتين الآتية، ثم حدد عدد الحلول الموجبة التامة لكل منها (إذا توافرت).

$$2x+11y=35 \quad 1.$$

$$7x-3y=23 \quad 2.$$

$$3x-18y=40 \quad 3.$$

$$4x-17y=53 \quad 4.$$

مرجع Reference

إن أحد الأعمال المشابهة بواسطة المؤلف:

Posamentier, Alfred S., and Charles T.Salkind, Challenging Problems in Algebra, New York: Dover, 1996

ربما بتوليد جدول أكثر شمولاً، سيلاحظ الطلبة لأي قيمة موجبة للمتغير t يمكن الحصول على قيم صحيحة لكل من x و y . ولكن هذه الطريقة لاحتساب عدد القيم الصحيحة-الموجبة لكل من x و y لن تكون أنيقة لحد كبير. ينبغي أن يرشد الطالب إلى التباينات الآتية والتي ينبغي حلها بصورة أنية:

$$82+4t > 0 \quad \text{وأن} \quad 1-3t > 0$$

$$t > -20\frac{1}{2} \quad \text{وأن} \quad \frac{1}{3} > t$$

أو $(-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{3})$. إن هذا مؤشر إلى وجود 21 مجموعة من طابع فئة 8 و 6 يمكن شرائها بمبلغ كلي مقداره 5 دولارات.

قد يجد الطلبة أن من الأفضل ملاحظة حل معادلة دايوفانتين أكثر تعقيداً، إن الآتي يعد مثلاً واضحاً على هذا:
حل معادلة دايوفانتين: $5x - 8y = 39$
1. حل المعادلة بدلالة x نظراً لأن معاملته يمتلك القيمة المطلقة الأقل بين المعاملين.

$$x \frac{8y+39}{5} = y+7 + \frac{3y+4}{5}$$

$$2. \text{ افترض } t = \frac{3y+4}{5}, \text{ بعدئذ حل المعادلة بدلالة } y:$$

$$y = \frac{5t-4}{3} = t-1 + \frac{2t-1}{3}$$

$$3. \text{ افترض } u = \frac{2t-1}{3}, \text{ بعدئذ حل المعادلة بدلالة } t:$$

$$t = \frac{3u+1}{2} = u + \frac{u+1}{2}$$

$$4. \text{ افترض } v = \frac{u+1}{2}, \text{ بعدئذ حل المعادلة بدلالة } u:$$

$$u = 2v-1$$

نستطيع الآن عكس العملية بعد أن أصبح معامل v عدداً صحيحاً.

5. والآن باعتماد التعويض في ترتيب معكوس:

$$t = \frac{3u+1}{2}$$

87

الكسور المستمرة ومعادلات دايوفانتين

Continued Fractions and Diophantine Equations

وكسره المستمر البسيط المكافئ له :

$$\frac{r}{s} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5}}}}$$

سوف نطلق $c_1 = a_1$ المقاربة الأولى First Convergent.

$$C_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} \quad \text{المقاربة الثانية}$$

$$C_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} \quad \text{المقاربة الثالثة}$$

$$C_4 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}} \quad \text{المقاربة الرابعة}$$

$$C_5 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5}}}} \quad \text{المقاربة الأخيرة}$$

على سبيل المثال، بالنسبة للكسر المستمر أعلاه يكافئ: $\frac{11}{7}$

$$C_1=1; C_2=2; C_3=\frac{3}{2}; C_4=\frac{11}{7}$$

يبدو مناسباً عند هذه النقطة اشتقاق طريقة لإيجاد المقاربة النونية

Convergent n^{th} للكسر المستمر العام:

$$\text{افترض } c_n = \frac{r_n}{s_n} \quad (\text{المقاربة النونية})$$

$$s_1=1 \text{ و } r_1=a_1 \text{ وعليه فإن } r_1=a_1 \text{ وأن } s_1=1$$

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$$

$$\text{وعليه فإن } r_2=a_1 a_2 + 1 \text{ وأن } s_2=a_2$$

ينبغي أن يأخذ هذا الدرس بعين الاعتبار بعد عرض الوحدة المرافقة "معادلات دايوفانتين". إن هذه الوحدة تصف طريقة أخرى لحل معادلات دايوفانتين.

أهداف الأداء Performance Objective

1. بإعطاء معادلة ذات متغيرين، سيقوم الطلبة بإيجاد الحلول العددية الصحيحة (إذا وجدت).
2. لديك مسألة لفظية والتي تتطلب حلاً لمعادلة دايوفانتين، وسيقوم الطلبة بتحديد (حيثما يكون ملائماً) عدد الحلول الممكنة.
3. لديك كسر غير حقيقي Improper fraction، وسيقوم الطلبة بكتابة كسر مكافئ مستأنف.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يتقن الطلبة مبادئ وحدة "معادلات دايوفانتين" بصورة جيدة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

قبل مناقشة هذه الطريقة، والخاصة بحل المعادلات دايوفانتين، فإن إجراء جولة في الكسور المستمرة سيكون أمراً مناسباً. إن أي كسر غير حقيقي (يختصر إلى أقل حدود) يمتلك كسراً مستمراً مكافئاً له. على سبيل المثال:

$$\begin{aligned} \frac{11}{7} &= 1 + \frac{4}{7} = 1 + \frac{1}{7/4} = 1 + \frac{1}{1+3/4} \\ &= 1 + \frac{1}{1+1/3/4} = 1 + \frac{1}{1+1/1+3} \end{aligned}$$

إن الصيغة الأخيرة يطلق عليها "الكسر المستمر البسيط Simple Condtion Fraction"، نظراً لأن جميع البسوط بعد الحد الأولي تساوي 1.

إن هذه هي الأنواع الوحيدة من الكسور المستمرة التي ستؤخذ بعين الاعتبار في هذه الوحدة.

تأمل صيغة عامة لكسر غير حقيقي (اختصر إلى أدنى حدوده)

5	4	3	2	1	0	-1	n
5	1	5	1	2			a_n
117	20	17	3	2	1	0	r_n
41	7	6	1	1	0	1	$c_n = \frac{r_n}{s_n}$

إن العموديين الأولين بالنسبة لكل من s_n و r_n ثابتان. ولكن القيم الأخرى تتغير مع الكسر المحدد. إن قيم s_n قد التقتت مباشرة من الكسور المستمرة. وأن كل قيمة من قيم s_n و r_n قد تم الحصول عليها من الصيغة العامة التي اشتقت ميكرا. للتأكد من صحة أعداد الجدول، وينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن المقاربة الأخيرة هي بالحقيقة الكسر الأصلي غير الحقيقي.

إن فحص ضرب المتبادل (المتصالب) يقترح:

" $r_n s_{n-1} - r_{n-1} s_n = (-1)^n$ ومع دراسة هذه المادة وتعلمها بصورة صحيحة، سيكون الطلبة جاهزين الآن لتطبيق معرفتهم بالكسور المستمرة في حل معادلات دايوفانتين ذات الصيغة $ax+by=k$ ، حيث يكون العامل المشترك الأكبر لكل من a و b عاملاً لـ k . في البداية يجب أن يعد الطلبة كسراً غير حقيقي باستخدام المالين، قل $\frac{a}{b}$. بعدئذ قم بتحويل هذا الكسر إلى كسر مستمر:

$$\frac{a}{b} = \frac{r_n}{s'_n}$$

وباستخدام الصيغة المكتشفة سابقاً:

$$r_n s_{n-1} - r_{n-1} s_n = (-1)^n$$

وبتعويض $a s_{n-1} - b r_{n-1} = 1$ (أو الضرب بـ -1). والآن بالضرب بواسطة k :

$$a(k.s_{n-1}) - b(k.r_{n-1}) = k$$

إن $x = k.s_{n-1}$ وأن $y = -k.r_{n-1}$ هو حل معادلة دايوفانتين. على

$$41x - 117y = 3$$

سبيل المثال، تأمل معادلة دايوفانتين: $41x - 117y = 3$. بعد أعداد الجدول السابق، تستخدم المقاربة $(n-1)$. يعني، $r_{20} = 1$ وأن $s_{20} = 7$. إن العلاقة أعلاه:

$$a(k.s_{n-1}) - b(k.r_{n-1}) = k$$

سينتج عنها بعد اعتماد التعويض المناسب:

$$41(3.20) - 117(3.7) = 3$$

إن الحل الأول للمعادلة $41x - 117y = 3$ هو $x=60$ ، $y=21$.

ولفرض إيجاد بقية الحلول، استخدم الأسلوب الآتي:

اطرح $41(60) - 117(21) = 3$ من $41x - 117y = 3$ للحصول على

$$41(x-60) = 117(y-21) \text{ وعليه فإن } 41(x-60) = 117(y-21)$$

$$\frac{x-60}{117} = \frac{y-21}{41} = t$$

$$\text{إن } t = \frac{x-60}{117} \text{ وأن } x = 117t + 60$$

$$c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = a_1 + \frac{1}{\frac{a_2 a_3 + 1}{a_3}} = a_1 + \frac{a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_2 a_3 + 1}$$

وبما أن $1=s_1$ ، $a_2=s_2$ ، $a_1=r_1$ ، $a_1(a_2+1)=r_2$ نحصل على

$$c_3 = \frac{a_3 r_2 + r_1}{a_3 s_2 + s_1}$$

$$\text{إن } r_3 = a_3 r_2 + r_1 \text{، وأن } s_3 = a_3 s_2 + s_1$$

$$\text{بنفس الطريقة } c_4 = \frac{a_4 r_3 + r_2}{a_4 s_3 + s_2} \text{ يتبع هذا النمط:}$$

$$c_n = \frac{a_n r_{n-1} + r_{n-2}}{a_n s_{n-1} + s_{n-2}} = \frac{r_n}{s_n}$$

(يمكن البرهنة على ذلك بواسطة الاستقراء الرياضي).

والآن تأمل الحالة بالنسبة لـ $n=2$.

$$c_2 = \frac{a_2 r_1 + r_0}{a_2 s_1 + s_0}$$

إن مساواة الطرفين المتقابلين ينتج عنها:

$$a_2 r_1 + r_0 = a_1 a_2 + 1$$

وعليه $r_1 = a_1$ وأن $r_0 = 1$ ، وكذلك $a_2 s_1 + s_0 = a_2 s_1$ وعليه $s_1 = 1$ وأن $s_0 = 0$.

بنفس الطريقة تأمل الحالة العامة بالنسبة لـ $n=1$:

$$c_1 = \frac{a_1 r_0 + r_{-1}}{a_1 s_0 + s_{-1}}$$

مساواة الطرفين المتقابلين ينتج عنها:

$$a_1 r_0 + r_{-1} = a_1$$

وعليه $r_0 = 1$ وأن $r_{-1} = 0$ كذلك $a_1 s_0 + s_{-1} = 1$ وعليه $s_0 = 0$ وأن $s_{-1} = 1$.

ليتم الطلبة بتحويل $\frac{117}{41}$ إلى الكسر المستمر الكافئ،

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}$$

والآن قم بإعداد جدول:

$$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

علاوة على ذلك قد ترغب أيضا في جعلهم يمارسون تبسيطا

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} = 1 + \frac{13}{30} = \frac{43}{30}$$

والآن دع الطلبة يتأملون الكسر المستمر غير المنتهي:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

سوف يدركون بسرعة بأن طريقة التبسيط السابقة لن تكون صالحة بعد الآن. وعند هذه النقطة ينبغي أن تعرض لهم الطريقة الآتية:

دع:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

ومرة أخرى فإن حذف "الجزء" الأول من الكسر اللا نهائي المستمر لن يؤثر في قيمته (نظراً لطبيعة اللانهاية) وعليه فإن:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = x$$

أو أن $x = 1 + \frac{1}{x}$ التي سينتج عنها $x^2 = x + 1$ $x^2 - x - 1 = 0$ وأن $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ولكن بما أن $x > 0$ فإن $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

قد يدرك بعض طلبة صفك بأن هذه القيمة تشابه قيمة النسبة الذهبية. أما الطلبة الأكثر تفوقاً فقد يتساءلون عن كيفية احتساب صيغة غير متكررة لا متناهية، وقد ترغب بدورك أن تعرض لهؤلاء الطلبة ما يأتي:

إن من الطبيعي، بالنسبة للطلبة، أن يتساءلوا عن قدرتهم على تكوين مسألة مشابهة باستبدال العدد 2، قل، بالعدد 5 أو 7. وبدون تفصيل أو توسيع بين لهم، بأن القيم التي ستحل محل 2 لن يتم اختيارها بصورة اختيارية، وأن قيم الاستبدال سوف لن تتجاوز e (يعني، قاعدة النظام الطبيعي للوغاريتمات، والتي تساوي تقريباً 2.7182818284).

لتعميق المنهج المستخدم في حل المسألة أعلاه، دع الطلبة يتأملون قيمة الجذور المتداخلة

$$\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \dots}}}}}$$

ولفرض إيجاد قيمة x ، حيث:

$x = \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \dots}}}}}$ دع الطلبة يدركون بأنه لن يضع شئ بالفاء الجذور المتداخلة الخمسة الأولى، نظراً لوجود عدد لا متناهي منهم. إذن:

$$x = \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \dots}}}}} = x$$

أو $x = \sqrt{5 + x}$ والتي تعد معادلة جذرية بسيطة. سيقوم الطلبة بتربيع طرفي المعادلة وحل المعادلة التربيعية الناتجة عنها:

$$x^2 = 5 + x$$

$$x^2 - x - 5 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

بما أن قيمة x موجبة، $x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \approx 2.79$.

إن منهجا بديلا لتحديد الجذور المتداخلة سيكون بتربيع طرفي المعادلة الأصلية أولاً للحصول على:

$x^2 = 5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \dots}}}}$ وبعدئذ يتم تعويض x ، بحيث $x^2 = 5 + x$ ، أما المتبقي فيتم التعامل معه بنفس الأسلوب السابق. إن من الضروري قيامك بالتأكيد على تفحص معقولة قيمة الجذور المتداخلة. يعني، هل أن القيمة ستكون موجبة أو سالبة، حقيقية، أو خيالية،... الخ. إن تطبيقاً آخر لهذه الطريقة في تقييم الصيغ التي تتضمن اللانهاية سيكون بواسطة الكسور المستمرة. وقبل تقديم الكسور المستمرة - غير المتناهية يجب أن تقوم بتنشيط ذاكرة طلبك حول الجذور المستمرة. وقد ترغب في جعلهم يكتبون $\frac{13}{5}$ ككسر مستمر:

كنتيجة لعرض الطرائق التي أخذت بعين الاعتبار في هذا النموذج، ينبغي أن يكون طلبتك قد اكتسبوا فهما مركزا بعمادى الصياغات غير المتناهية.

التقييم اللاحق Postassessment

1. بسط ما يأتي: $\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\dots}}}}$
2. بسط ما يأتي: $2+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\dots}}}}$
3. بسط ما يأتي: $1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\dots}}}}}}$

احسب: $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\dots}}}}}$
لاحتساب هذه الصيغة ينبغي إنجاز بعض الإجراءات التمهيدية أولاً. بما أن:

$$(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 = 1 + (n+1)(n+3)$$

$$n+2 = \sqrt{1 + (n+1)(n+3)}$$

افترض $f(n) = n(n+2)$ بعدئذ

$$f(n+1) = (n+1)(n+3)$$

$$f(n) = n\sqrt{1 + (n+1)(n+3)}$$

$$f(n) = n\sqrt{1 + f(n+1)}$$

$$f(n) = n\sqrt{1(n+1)\sqrt{1 + f(n+2)}}$$

إن:

$$f(n) = n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)\sqrt{1 + f(n+3)}}$$

ويستمر العمل على هذا النوال.

والآن، إذا كان $n=1$ ، بعدئذ $f(1) = 1(1+2) = 3$ وأن

$$3 = 1\sqrt{1 + (1+1)\sqrt{1 + (1+2)\sqrt{1 + (1+3)\sqrt{1 + \dots}}}} \\ = 1\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}}$$

توسيع الكسور المستمرة للأعداد غير القياسية

Continued Fraction Expansion of Irrational Numbers

89

تستخدم مع الأعداد القياسية. دع x تمثل العدد غير القياسي المعلوم. جد أكبر عدد صحيح يقل عن x ، وصف x في الصيغة:

$$0 < \frac{1}{x_2} < 1, \quad x = a_1 + \frac{1}{x_2}$$

حيث أن العدد $x_2 = \frac{1}{x - a_1} > 1$ هو عدد غير قياسي،

لأنه، إذا طرح عدد صحيح من عدم أصم، فإن الفرق بينهما ومقلوب الفرق يكون غير قياسي.

جد a_2 ، أكبر عدد صحيح يقل عن x_2 ، وصف x_2 بصيغة:

$$a_2 \geq 1, \quad 0 < \frac{1}{x_3} < 1, \quad x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}$$

أهداف الأداء Performance Objectives

1. لديك عدد غير قياسي، وسيقوم الطلبة بكتابة الكسر المستمر المكافئ له.
2. لديك مفكوك غير متناهي، وسيمترجع الطلبة العدد غير القياسي.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالكسور المستمرة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن طريقة فك العدد غير القياسي تشابه لحد كبير تلك التي

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_2}$$

بحل المعادلة بدلالة x_2 ، نحصل على:

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sqrt{3} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

وعليه فإن $x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}$ حيث $a_2 = 1$ لأنه أكبر عدد صحيح يقل عن $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. وعليه:

$$x_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \sqrt{3} + 1$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

باستمرار في هذه العملية:

بما أن $a_3 = 2$ ، نظراً لأن 2 هو أكبر عدد صحيح يقل عن $\sqrt{3} + 1$.

$$x_4 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}}}$$

بما أن $x_4 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ يشابه $x_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ، نستنتج x_5 نفس

النتيجة كما هو الحال مع x_3 ، أي، $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. إن جميع خواص

القسم الجزئية ستكون 1، 2، 1، 2، وأن الفك غير المتناهي $\sqrt{3}$ سيكون

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}} = [1, 1, 2, 1, 2, \dots] = [1, \overline{1, 2}]$$

إن الخط الوجود أعلى 1 و 2 يؤشر بأن هذين العددين يتكرران بصورة غير متناهية.

حيث للمرة الثانية، يكون العدد

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} > 1$$

يمكن أن تكرر هذه الحسابات بصورة غير متناهية، فينتج عنها المعادلات:

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 > 1$$

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \quad x_3 > 1, \quad a_2 \geq 1$$

$$x_3 = a_3 + \frac{1}{x_4}, \quad x_4 > 1, \quad a_3 \geq 1$$

$$\vdots$$

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad x_{n+1} > 1, \quad a_n \geq 1$$

$$\vdots$$

حيث $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ أعداد صحيحة، وأن الأعداد x_1, x_2, x_3, \dots جميعها أعداد غير قياسية. إن هذه العملية لا يمكن أن تنتهي لأن الطريقة الوحيدة التي يحدث فيها ذلك ستكون بالنسبة لعدد صحيح ما a_n بحيث يساوي x_n . وهذا أمر لا يمكن نواله نظراً لأن كل x_n تكون غير قياسية.

بتعويض x_2 من المعادلة الثانية أعلاه في المعادلة الأولى، بعدئذ x_3 من المعادلة الثالثة في هذه النتيجة، وهكذا، ينتج الكسر المستمر البسيط المطلوب.

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{x_4}}}$$

أو قد يكتب في بعض الأحيان بصيغة:

$x = [a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$ حيث تبين النقاط الثلاثة بأن العملية

مستمرة بصورة غير متناهية.

مثال Example:

أوجد مفكوك $\sqrt{3}$ إلى كسر بسيط مستمر-غير متناهي

الحل Solution: إن أكبر عدد صحيح يقل عن $\sqrt{3}$ هو 1.

وعليه $a_1 = 1$ وأن

وفي النهاية سنحصل على:

$$x = \frac{\sqrt{30}-2}{13} = [0,3,1,2,1,4]$$

لقد برهن الطلبة بأن كسراً مستمراً غير محدود يمثل بالواقع عدداً غير قياسي. خذ بعين الاعتبار بيان أن $[2,2,4]$ يمثل $\sqrt{6}$.

ابدأ بكتابة:

ليكن

$$x = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$$

$$y = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \dots}}} \quad \text{حيث}$$

إن،

$$y = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{y}} = 2 + \frac{y}{4y+1}$$

بحل المعادلة بدلالة y ينتج: $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$ ولكن

$$x = 2 + \frac{1}{y} = 2 + \frac{2}{2+\sqrt{6}} \quad \text{إن}$$

$$x = 2 + \sqrt{6} - 2 = \sqrt{6}$$

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بتغيير ما يأتي إلى جذر مستمر بسيط-غير متناهي.

$$1. \sqrt{2}$$

$$2. \sqrt{43}$$

$$3. \frac{25+\sqrt{53}}{22}$$

ليقم الطلبة ببيان أن الكسر المستمر-غير المتناهي

$$[3,6] = \sqrt{10}$$

مثال Example2:

جد مفكوك الكسر المستمر غير المتناهي لما يأتي

$$x = \frac{\sqrt{30}-2}{13}$$

الحل Solution:

بما أن $\sqrt{30}$ يقع بين 5 و 6، لذا فإن أكبر عدد صحيح يقل

عن x هو $a_1=0$. بحدوث، $x = \frac{\sqrt{30}-2}{13} = 0 + \frac{1}{x_2}$ ، حيث

$$x_2 = \frac{1}{x} = \frac{13}{\sqrt{30}-2} \cdot \frac{\sqrt{30}+2}{\sqrt{30}+2} = \frac{\sqrt{30}+2}{2} > 1$$

إن أكبر عدد صحيح يقل عن $2x$ هو $a_2=3$ ، وعليه فإن

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} = 3 + \frac{1}{x_3}$$

إن:

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - 3} = \frac{1}{\frac{\sqrt{30}+2}{2} - 3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{30}-4} \cdot \frac{\sqrt{30}+4}{\sqrt{30}+4}$$

$$= \frac{2(\sqrt{30}+4)}{14} = \frac{\sqrt{30}+4}{7}$$

إن أكبر عدد صحيح يقل عن $3x$ هو $a_3=1$ وعليه فإن

$$x_3 = \frac{1}{x_3 - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{30}+4}{7} - 1}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{30}-3} \cdot \frac{\sqrt{30}+3}{\sqrt{30}+3} = \frac{\sqrt{30}+3}{3}$$

بنفس الطريقة نحصل على $x_5 = \frac{\sqrt{30}+3}{7}$ ، $x_6 = \frac{\sqrt{30}+4}{2}$

$$\text{وأن } x_7 = \frac{\sqrt{30}+4}{7} = x_3$$

إن المزيد من البحث والاستقصاء سوف يظهر بأن التابع 1،

1. 2. 4. يتكرر على الدوام، لذا فإن التوسيع المطلوب هو:

$$x = 0 + \frac{1}{x_2} = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_5}}}}$$

$$= 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{x_7}}}}}} = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{x_7}}}}}}$$

تتابع فاري



The Farey Sequence

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$$

إن هذه الكسور يطلق عليها "تتابع فاري" Farey "Sequence"، F_n ، بالدرجة النونية n ، ويعرف بأنه عبارة عن مجموعة مرتبة تتألف من $\frac{0}{1}$ ، الكسور الحقيقية التي لا تقل اختصاراً والتي تتراوح مقاماتها بين 2 إلى n ، ومرتببة بحسب ازدياد مقاديرها، وكذلك $1/1$.

هناك الكثير من الخصائص المميزة لتتابع فاري، أحدها العلاقة التي اكتشفها الطلبة مبكراً، والتي تنص على أن الكسور التي تبعد مسافة ثابتة عن $\frac{1}{2}$ تكون متتامة، أي مجموعها يساوي 1. وتتضمن العلاقة المثيرة الأخرى عدد الحدود في تتابع فاري بالدرجة النونية n .

وقبل المباشرة بتطوير هذه التتابع، ينبغي أن يعطى للطلبة معلومات إضافية تعمق فهمهم بتتابع فاري. فيجب بالبداهة إخبارهم أن Farey قد اكتشف، عام 1816، التتابع عندما كان يدرس جداول مفصلة لبواقى كسرية، ويظهر بجلاء بأن بسط أي كسر في تتابع فاري يمكن الحصول عليه بإضافة قيم البسطين الموجودين على جانبيه، وتصح نفس الطريقة مع المقام. وبما أن النتيجة يجب أن تكون بحدودها الدنيا، فإن هذا الأمر يصبح بالنسبة للثلاثية: $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}$ ، حيث $\frac{3+1}{3+7} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ، سيلاحظ الطلبة بأن مجموع الكسور التي تبعد بنفس المسافة عن $\frac{1}{2}$ يساوي 1. ويمكن البرهنة على ذلك بعدة طرق.

افترض بأن $\frac{\ell}{n}$ هو عدد في السلسلة والذي يقل عن $\frac{1}{2}$ بحيث أن ℓ و n هما عددين أوليان نسبياً. وبمقارنة الرقم المقابل للجانب الثاني من $\frac{1}{2}$ ، سنجد $\left(\frac{n-\ell}{n}\right)$. وبما أن هذا يعود إلى تتابع فاري فإن من الضروري أن القاسم المشترك الأعظم:

$$\text{g.c.d}(n - \ell, n) = 1$$

بافتراض أن $n - \ell$ و n ليسا عددين أوليان نسبياً، بعدئذ

تعرض هذه الوحدة مناقشة لتتابع غير مألوف من الأعداد لحد ما. إن هذا الموضوع يمكن عرضه على الطلبة بمستويات ومراحل مختلفة، ولكن التأكيد سوف يتغير مع القابليات المختلفة، ومستويات إدراك الطلبة وتصورهم.

هدف الأداء Performance Objective

- 1 سيبين الطلبة بأن الكسر قبل $\frac{1}{2}$ وأن خلفه المباشر لتتابع فاري متتامان.
- 2 سيقوم الطلبة بإنشاء العلاقة بين π وعدد الحدود في تتابع فاري.

التقييم السابق Preassessment

باستخدام تتابع الكسور المبين أدناه، ليتم الطلبة بإيجاد مجموع الكسرين:

- أ- الحد الخامس إلى يسار والحد الثالث إلى يمين $\frac{1}{2}$ ،
- ب- الحد الثالث إلى يسار والحد الثالث إلى يمين $\frac{1}{2}$ ،
- ج- الحد الثاني إلى يسار والحد الثاني إلى يمين $\frac{1}{2}$ ،

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$$

إسأل الطلبة تعميم نتائجهم.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن استعراض نشاط التقييم السابق سوف يظهر بأن مجموع الثلاثة التي طلب من الطلبة إيجادها تنتج جميعها 1. يعني أن: $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$; $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$; $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$ ينبغي أن تشير إلى زوج الكسور التي يبلغ مجموعها 1 على أنها متتامة Complementary. دعنا الآن نتفحص التتابع الموجود لدينا.

إذا قمنا بإدراج جميع الكسور المشتركة - الحقيقية في حدودها الدنيا لغرض الزيادة إلى نهاية قيمة اختيارية - كإن لا تزيد قيمة المقام على 7 سيكون لدينا الكسور الـ 17 التالية:

$$N = \phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(4) + \phi(5) + \phi(6) + \phi(7) \\ = 1 + 2 + 2 + 4 + 2 + 6 = 17$$

إن قيمة N ، تزداد بصورة سريعة عندما تزداد n وعندما تكون $n=100$ $N=3043$. إذن هناك العدد من الكسور المشتركة غير قابلة للاختصار بسيط ومقام لا يزيد على 100.

إن هذه صيغة مهمة تتضمن دالة ϕ و π (نسبة محيط الدائرة إلى قطرها). تشير دالة ϕ إلى دالة أويلر Euler Function. ويمكن كتابة مجموع تتابع فاري باستخدام صيغة بدلالة دالة

أويلر ϕ . إذا كان $\frac{h}{k}$ حداً في تتابع فاري، بعدد $g.c.d(h,k)=1$. بالنسبة لأي عدد محدد $k > 1$ فإن عدد الحدود بصيغة $\frac{h}{k}$ هو $\phi(k)$.

يمكن أن نعبر عن المجموع $\phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(n)$ قد تم تقريبه بواسطة الصيغة $\frac{3n^2}{\pi^2}$ ، وسيزداد التقريب دقة كلما ازدادت قيمة n . باستثناء الحد الأول فإن المجموع يمثل عدد الحدود، N في تتابع فاري بالترتبة النونية. وبما أننا نعرف قيمة π إلى الحد المطلوب من الدقة، فإن هذا يعني قدرتنا على إيجاد عدد الحدود، بصورة تقريبية، في تتابع فاري دون أن نقوم بحساب $\phi(1)$ ، $\phi(2)$ ، ...، $\phi(n)$ بصورة مستقلة. إذن بالنسبة $n=100$ سيكون لدينا $N=3 \times 100^2 / \pi^2 = 3039.6355 \dots$ في حين أن القيمة الحقيقية هي 3043.

إن عدد حدود سلسلة فاري يقارب $\frac{3n^2}{\pi^2}$.

التقييم اللاحق Postassessment

1. لديك $n=200$ ، $n=8$ ، جد عدد الحدود في تتابع فاري

باستخدام $\frac{3n^2}{\pi^2}$.

2. لقم الطلبة بإيجاد خصائص أخرى لتتابع فاري.

$n = qd + \ell$ وأن $n = rd$ وكذلك $n = qd + \ell$ وإن n سيكون $rd = qd + \ell$ وعليه d تقسم ℓ وإن d تقسم $(n - \ell)$ لأن d تقسم n . ولكن هذا يناقض حقيقة أن $(n - \ell) / n$ كانت بحدودها الدنيا (والتي تعد تعريف الحدود في تتابع فاري) وعليه فإن $g.c.d = (n - \ell)n = 1$. ولأن ℓ لكي نبرهن بأن $\frac{\ell}{n} + \frac{a}{b} = 1$. افترض كون $\frac{\ell}{n}$ السابق المباشر للكسر $\frac{1}{2}$. فإذا كان هناك حد يلي $\frac{1}{2}$ مباشرة ويعود إلى F_n ، بعدد ترتب الكسور كما يأتي:

حيث $\frac{\ell}{n} + \frac{a}{b} = 1$ ، $\frac{1}{2} = \frac{\ell + a}{n + b}$ (إحدى خصائص التتابع). وللبزينة على أن $\frac{\ell}{n} + \frac{a}{b} = 1$ ، ينبغي أن تكون في أبسط

شكل لها إذا كانت تنتمي لـ F_n ، وإذا كان مجموع كسرين مساوياً في أبسط حالة لهما، فإن مقاميهما يكونا متساويين. إذن إذا كان $\frac{\ell}{n} + \frac{a}{b} = 1$ ، فإن b يجب أن تكون مساوية لـ n . إذن $\frac{\ell + a}{n} = 1$ وأن $\ell + a = n$ ، أو $a = \ell - n$.

إذن فإن السلف المباشر لـ $\frac{1}{2}$ ، $\frac{a}{b} = \frac{n - \ell}{n}$ ، ولكن $\frac{\ell}{n}$ كان السلف المباشر بالنسبة لـ $\frac{1}{2}$ وأن الخلف المباشر متلئمان لأن مجموعهم يساوي 1.

إن الخاصية الأخرى الجاذبة لهذا التتابع تنشأ بين π ومجموع الحدود في تتابع فاري. إن عدد الكسور بالترتبة النونية يمكن الحصول عليه كما يلي: بما أن الكسور جميعاً في حدودها الدنيا، يعقب ذلك بالنسبة لمقام معلوم b ، فإن عدد البسوط هو عدد الأعداد الصحيحة التي تقل عن b ، وتكون أولية بالنسبة لـ b . بعدد ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن عدد الكسور، N ، في تتابع فاري يساوي $\phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(4) + \dots + \phi(n)$ ، حيث $\phi(n)$ هو عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن أو تساوي n والتي تكون أولية نسبياً إلى n . إذا كانت $n=7$ ، وستكون:

غلاف القطع المكافئ

91

The Parabolic Envelope

1 إلى 17.2 إلى 16.3 إلى 15 وهكذا، منتهين بـ 1-17 (حيث أن الرمز "1-17" يعني قطعة المستقيم التي تصل بين النقطتين 17 و 1، أو بالعكس). إن الشعاع الناتج من المستقيمتان تكون مماسة لغلاف القطع المكافئ.

إن نقطة المنتصف، V ، للخط 9-9، هي رأس القطع المكافئ، وأن 9-9 هي مماس للقطع المكافئ عند النقطة V . إن مستقيمتان A إلى V ، يمتد إلى ما وراء V ، وهو محور تناظر القطع المكافئ Axis of Symmetry، وقد تم تضمينه في شكل 1. أسأل الطلبة عن سبب كون 9-9 مماس العمود على AV .

أنشئ عموداً على كل من ضلعي الزاوية عند النقطة 9. لقد ذكرنا، وبدون برهان، بأن نقطة تقاطع هذا العمود مع محور التناظر تعد بؤرة Focus، القطع المكافئ، F . إن الطلبة الأكثر فضولاً قد يرغبون في برهنة هذا الأمر. وعند أي مستوى من المستويات، فإن من الضروري بيان الخصائص الانعكاسية والكائنية للبؤرة.

يمكن أن تقرب كثير من النقاط المحددة للتماس على القطع المكافئ بصورة مباشرة ومرئية من شكل 1. ويمكن أن يحدد موقعها بصورة أكثر دقة في ضوء الحقيقة التي تنص على أن مماس القطع المكافئ يقطع المحور عند مسافة من الرأس تساوي إحداثي نقطة التماس.

كمثال على ذلك في شكل 1، المماس 4-14 يقطع المحور عند النقطة T . حدد النقطة T' على المحور فوق V بحيث $TV=VT'$. لرسم مستقيمتين يمر خلال T' موازيًا 9-9 بحيث يقطع الغلاف عند النقطتين P ، P' ، بعدد من النقطتين P ، P' على القطع المكافئ حيث 4-14، 14-4 مماسان. ويمكن تحديد بقية النقاط على القطع المكافئ بنفس الطريقة.

منشئ القطع المكافئ Evolute to the Parabola

بعد تحديد جميع نقاط التماس مثل P ، P' على القطع المكافئ، استخدم مثلثًا قائم الزاوية، أو مربع النجار Carpenter's Square لإنشاء أعمدة على كل من هذه النقاط يطلق على الأعمدة الموجودة على المنحنى وعند نقاط التماس

تصف هذه الوحدة. باختصار، الإنشاء الميكانيكي لغلاف القطع المكافئ، مع بيان كيفية استخدام الطلبة للغلاف في اشتقاق حشد من المنحنيات ذات الصلة.

هدف الأداء Performance Objective

باستخدام الغلاف كأساس تركز إليه، سيقوم الطلبة برسم مجموعة من المنحنيات بتقانات مختلفة دون اللجوء إلى الرسم عن طريق إيجاد نقطة منقطة من معادلة المنحنى. خلال العملية، سوف يعرض للطلبة المفاهيم المرتبطة بغلاف ما، والذي يمد تطورا وموطنا لمنحنى معلوم.

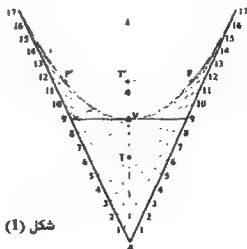
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد اكملوا المنهج الدراسي الأساسي للهندسة وعلى معرفة جيدة بالمقاطع المخروطية Conic Sections.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليقم طلبتك بإنشاء مماس للقطع المكافئ بالأسلوب الآتي:

ارسم زاوية بأي قياس، وقم بتقسيم كل ضلع من أضلاعها إلى نفس العدد من المسافات المتساوية. في شكل 1، لدينا زاوية A ، بقياس 50° ، تم تقسيم ضلعيها إلى 17 مسافة متساوية. نبدأ عند الجهة اليسرى-السفلى من الزاوية، ونرسم خطوطا تصل النقاط



شكل (1)

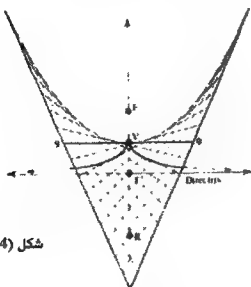
بالنسبة إلى بؤرته. وبالعكس، يمكن بيان أن العمود المقام على المماس مع 9-9 سوف يمر خلال النقطة F . إن الحقيقة الأخيرة تبرز الثقانة المستخدمة مبكراً في تحديد موقع بؤرة القطع المكافئ (ينبغي أن يتذكر الطلبة بأنه لكي نبرهن على محل ما، يجب أن نبرهن على قضية ذات شرطين).

بعد ذلك دع V تكون النقطة الثابتة. ونسقط من النقطة V أعمدة على المماسات التي حصلنا عليها في شكل 1. إن محل القدم قد تم عرضه في شكل 4 لمنحنى يحوي طرفاً مستديراً عند النقطة V ، وينظر المحور.

لقد ذكرنا، بدون برهان، بأن المحل هو البادئ $Cisoid$ لـ $Diocles$. حدد موقع النقطة F' على المحور، تحت V ، بحيث أن $FV = VF'$. ثم ارسم مستقيماً يمر بالنقطة F' وبوازي 9-9. إن هذا المستقيم يمثل الخط الدليلي للقطع المكافئ $Parabola's Directrix$ ، ويمكن عرضه بوصفه الخط المحاذي $asymptotic line$ الذي يقارب البادئ $Cisoid$.

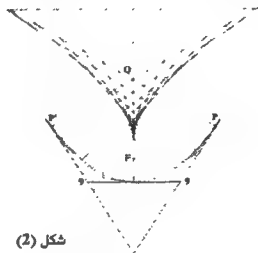
قد ترغب عند هذه النقطة فتح باب المناقشة حول الخصائص المختلفة للقطع المكافئ، مثل خصائصه الانعكاسية. كما تستطيع أيضاً تعريف القطع المكافئ بدلالة المحل، بحيث يكون الاتجاه والبؤرة معروفتين.

إن نستطيع القول بأن القطع المكافئ هو عبارة عن نقاط المحل التي تبعد بمساافات متساوية عن نقطة ما (البؤرة)، ومستقيم (الخط الدليلي)، الذي لا يحتوي النقطة. إن طي الورق المصحح سوف يعرض بوضوح هذا المحل الهندسي. ارسم مستقيماً ونقطة على قطعة ورق مشمع. ثم أبدا بطي الورقة، بصورة متكررة، بحيث أن النقطة تقع على المستقيم. إن الثنيات الناتجة $Creases$ تؤلف غلاف للقطع المكافئ.



شكل (4)

متعامدات Normals. إن غلاف جميع هذه المتعامدات يعرف منشئ المنحنى. يعني. إن المتعامدات بعدد تكون مماسة للمنحنى الخاص بالمنحنى المعطى. إذن، منشئ إلى القطع المكافئ يمكن أن يعرض بوصفه منحنى بطرف واحد $one\ cusped$ ويطلق عليه القطع المكافئ- شبه مكعب $Semi-cubic Parabola$. ويظهر هذا في شكل 2.



شكل (2)

لإدراك المنشئ المرسوم بصورة صحيحة، استخدم تناظر القطع المكافئ حول المحور. إذن، المتعامدات إلى P و P' تتقاطع عند النقطة Q على محور التناظر.

منحنيات الدواسة إلى القطع المكافئ

Pedal Curves to the Parabola

يظهر في الشكل 3 منحنى معلوم، C ، والنقطة المحددة F ، على. أو في جوار C . بإسقاط أعمدة من النقطة F على كل مماسات المنحنى، سنجد بأن محل قدم الأعمدة، P ، يعرف منحنى الدواسة $Pedal Curve$ ، إلى المنحنى المعلوم وبالنسبة للنقطة F . وبالنسبة لمنحنى معلوم، هناك خيارات متعددة لـ F والتي تنتج منحنيات دواسة مختلفة.



شكل (3)

والآن اعتبر البؤرة F ، للقطع المكافئ في شكل 1 وستأخذ نقطة ثابتة بعين الاعتبار. فإذا أسقطت أعمدة على كل من الأعمدة، سيلاحظ الطلبة بأن محل قدم هذه الأعمدة هو المستقيم 9-9. يعني. المماس إلى الرأس هو منحنى الدواسة إلى القطع المكافئ

الهندسي للدواسة المقابلة هو عبارة عن قطع مكافئ والذي تلتقي نقطة انقلابه مع F.

د- عزز بواسطة القياس بأن محل الدواسة المقابلة في C يناظر المحل الهندسي لنقاط منتصف قطعة التعماد من نقطة التماس على القطع المكافئ إلى نقطة تقاطعه مع محور تناظر القطع المكافئ.

مرجع Reference

Lockwood, E.H., A Book of Curves, Cambridge University Press, 1961.

Zwicker, c., The Advanced Geometry of Plane Curves and their Application, Dover Publication, 1963.

Posamentier, A.S., and H.A. Hauptman, 101 Great Ideas for Introducing Key Concept in Mathematics, Thousand Oaks, AC: Corwin, 2001

التقييم اللاحق Postassessment

ليتم الطلبة برسم منحني دواسة إضافية للقطع المكافئ. واخبرهم حول ضرورة استخدام ما يأتي كدليل يسترشد به:

ا- لتكن النقطة F' النقطة الثابتة. وسوف يشاهد منحني الدواسة على يمين الشجيرة Strophoid.

ب- حدد موقع R (شكل 4)، انعكاس F خلال الخط الدليلي بحيث أن $FF' = F'R$. ودع النقطة R تكون النقطة الثابتة. سيكون منحني الدواسة هو خط دليل التقييم الثلاثي لماكلاورين Trisectrix of MacLaurin.

ج- إن الدواسة المقابلة لمنحنى معلوم هي المحل الهندسي لقاعدة الأعمدة القائمة من نقطة ثابتة معلومة على التعمادات القائمة على منحني معلوم في شكل 2، حيث تكون F نقطة ثابتة، حدد محل الدواسة المقابلة. ومن النقطة F، اسقط أعمدة على كل تعامد قيمت برسمه لتحصل على المنحنى. إن المحل

تطبيق التطابق على قابلية القسمة

Application of Congruence to Divisibility

92

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابداً الدرس بتقديم مفهوم تطابقات العدد. إن أي عددين يمتلكان نفس الباقي عندما يقسمان على 7 يقال عنهما تطابق معامل $7 \equiv 23 \pmod{7}$ ، على سبيل المثال، 23 و 303 لهما نفس الباقي عند القسمة على 7. لذا نقول بأن 23 و 303 يمثلان تطابق معامل 7. إن هذه العبارة يمكن تمثيلها بالرموز كما يأتي: $23 \equiv 303 \pmod{7}$

بصورة عامة، العددين a، b يعدان تطابق معامل m (تكتب بصيغة $a \equiv b \pmod{m}$) إذا كان لهما نفس الباقي غير السالب عندما يقسمان على عدد صحيح $m \neq 0$.

وبسبب هذا التعريف، سيكون لدينا التضمين التالي الآتي:

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء عدد صحيح، سيقوم الطلبة بتحديد عوامله الأولية دون استخدام أي نوع من القسمة.
2. سيقوم الطلبة بصياغة قواعد لاختبار قابلية القسمة بواسطة الأعداد الطبيعية غير تلك التي عرضت في هذه الوحدة.

التقييم السابق Preassessment

1. ليتم الطلبة بإيجاد العوامل الأولية لكل مما يأتي:
(أ) 144 (ب) 840 (ج) 360
2. ليتم الطلبة ببيان، دون استخدام أي نوع من القسمة، أي من الأعداد الآتية يقبل القسمة على 2، 3، 5:
(أ) 234 (ب) 315

$$b = mk' + r \text{ وعليه } a \equiv b \pmod{m}$$

$$a - b \equiv \overline{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m} \quad \text{إذن:}$$

وعليه

$$\text{Q.E.D. } a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a - b \equiv \overline{m}$$

والآن ينبغي على الطلبة أن يكونوا على أهبة الاستعداد لكي نأخذ بعين الاعتبار ما يأتي:

بعض الخصائص الأولية للتطابقات

Some Elementary Properties of Congruences

إذا كان، $a \equiv b \pmod{m}$ & $c \equiv d \pmod{m}$ ، بعدد:

$$a + c \equiv b + d \pmod{m} \quad (I)$$

$$ac \equiv bd \pmod{m} \quad (II)$$

$$ka \equiv kb \pmod{m} \quad (III) \quad \text{لكل عدد صحيح } k$$

إن هذه الخصائص نشأت عن تعريف التطابقات. وينبغي أن

نبرهن (II)، أما البقية فيمكن البرهنة عليها بنفس الطريقة الآتية:

بما أن:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a = b + \overline{m} \quad (1)$$

$$c \equiv d \pmod{m} \Leftrightarrow c = d + \overline{m} \quad (2)$$

بعدد، نضرب (1) و (2):

$$ac = bd + b\overline{m} + d\overline{m}$$

$$= bd + (b+d)\overline{m}$$

$$= bd + \overline{m}$$

$$ac \equiv bd \pmod{m} \quad \text{وعليه،}$$

إن جانباً ممتعاً آخر لنظام العامل Modular System هو

بواقى الأسس Power Residues. إن باقي الأس لعدد ما (a)

بالنسبة إلى عدد آخر m هو عبارة عن البواقى التي نحصل عليها

عندما تقسم الأسس المتتالية لـ a: a^0, a^1, a^2, \dots على m.

مثال 3 Example 3: جد بواقى الأسس للعدد 5 بالنسبة إلى

العدد 3 بما أن:

$$5^0 : 3 = 1 : 3 = 0.3 + 1$$

$$r_0 = 1 \quad \text{وعليه}$$

$$5^1 : 3 = 5 : 3 = 1.3 + 2$$

$$r_1 = 2 \quad \text{وعليه}$$

$$5^2 : 3 = 25 : 3 = 8.3 + 1$$

$$r_2 = 3 \quad \text{وعليه}$$

$$5^3 : 3 = 125 : 3 = 41.3 + 2$$

$$r_3 = 2 \quad \text{وعليه}$$

ويستمر الأمر على هذا النوال.

وعليه، فإن بواقى الأس 5 بالنسبة لـ 3 ستكون: 1، 2، 1، 2، ...

لأخذ الطلبة بعين الاعتبار سبب عدم ظهور سوى

المعددين 1، 2 في هذا التتابع.

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \begin{cases} a = mk + r \\ b = mk' + r \end{cases} \quad 0 \leq r < |m|$$

إن الرمز " \equiv " قد استخدمه للمرة الأولى عام 1801 الرياضي الألماني ذائع الصيت كارل فريدريش كاوس (1777-1855). وقد اقترح الرمز لشابهته رمز المساواة التقليدي، ولا علاقة له بالتطابق الهندسي. إن العلامة " \neq " تعني "غير متطابق مع".

مثال 1 Example 1:

$$17 \equiv -4 \pmod{7}$$

$$17 = 72 + 3$$

$$-4 = 7(-1) + 3$$

لأن

في هذا المثال، ينبغي علينا استخدام (-1) كحامل قسمة.

وإذا استخدمنا 0، سيكون المتبقي سالياً إزاء تعريف التطابق.

مثال 2 Example 2: $a \equiv 0 \pmod{a}$ إن هذا صحيح لأن كلا

منهما يعطي نفس الباقي 0.

تعريف آخر للتطابقات

Another Definition of Congruences

يعد العددين متطابقين بمعامل m، إذا كان الفرق بينهما يقبل

القسمة على m. نريد البرهنة على أن:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b \equiv \overline{m}$$

(نقرأ " \overline{m} " مضاعف لـ m).

البرهان Proof

إذا كان:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \begin{cases} a = mk_1 + r \\ b = mk_2 + r \end{cases}$$

$$a - b \equiv \overline{m} \quad \text{أو} \quad a - b = m(k_1 - k_2)$$

بالطرح:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a - b \equiv \overline{m}$$

وعلى العكس: إذا كان

$$a - b \equiv \overline{m} \Rightarrow a = b + \overline{m}$$

$$\Rightarrow a = b + km \quad (1)$$

$$b = mk' + r \quad (2) \quad \text{ولكن}$$

إن من المعادلتين (1)، (2) سيكون لدينا:

$$a = b + km = (mk' + r) + km$$

$$= m(k' + k) + r$$

$$= mk'' + r \quad (3)$$

من المعادلتين (2) و (3) سيكون لدينا بعدد،

$$a = mk'' + r$$

إذا كان $a_0 + a_1 r_1 + \dots + a_n r_n$ يقبل القسمة على m . ويمكن أن تستخدم هذه العبارة لإيجاد معيار مختلف لقابلية القسمة بالطريقة الآتية:

قابلية القسمة على 2 و 5

لدينا بالنسبة لأي عدد N أنه:

$$N \equiv a_0 + a_1 r_1 + \dots + a_n r_n \pmod{m}.$$

وإذا اخذ الطلبة بعين الاعتبار $m=2$ (أو $m=5$)، وسيكون لديهم $r_1 = 0$ لأن:

$$10^0 \equiv 0 \pmod{2} \text{ أو } 10^0 \equiv 0 \pmod{5}$$

وعليه $r_2=0, r_3=0, \dots$ ، إذن سيكون لديهم (5 أو 2) $N \equiv a_0$. وهذا يعني بأن: العدد يقبل القسمة على 2 أو 5، وإذا كان فقط، إذا كانت المرتبة الأخيرة فيه تقبل القسمة على 2 أو 5.

قابلية القسمة على 3 أو 9

لدينا بأن:

$$10^0 \equiv 1, 10^1 \equiv 1, \dots \pmod{3} \text{ أو } 9.$$

وبما أن:

$$N \equiv a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_n r_n \pmod{m}$$

إذن،

$$N \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \pmod{3} \text{ أو } 9$$

من أجل هذا فإن عدد ما يقبل القسمة على 3 أو 9، فقط وإذا كان فقط مجموع مراتبه العشرية يقبل القسمة على 3 أو 9.

قابلية القسمة على 11

بما أن:

$$10^0 \equiv 1, 10^1 \equiv -1, 10^2 \equiv 1, \dots \pmod{11}.$$

إذن،

$$N \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n \pmod{11}$$

وعليه، فإن عدد ما يقبل القسمة على 11، فقط وإذا كان فقط الفرق بين مجموعي المراتب المتعاقبة يقبل القسمة على 11.

إن الطريقة السابقة سوف تأخذ بيد الطالب نحو تطوير قواعد مشابهة لاختبار قابلية القسمة على أعداد أولية أخرى. وينبغي أن يؤكد على، ويبرر بأن عدد ما يقبل القسمة على عدد مركب إذا كان يقبل القسمة على كل من عوامله الأولية - النسبية.

من أجل هذا، إذا أردنا تحديد فيما إذا كان هناك عدد ما يقبل القسمة على 6، يجب علينا أن نختبر قابليته للقسمة على العددين 2 و 3 فقط.

وبتوظيف المناقشة المناسبة سيكون الطلبة قادرين على أعداد قائمة تفصيلية بقواعد اختبار قابلية القسمة، بالإضافة إلى تطوير عينة أكثر عمقا لبعض مبادئ وأوليات نظرية التقاطعات.

مثال 4 Example:

جد بواقى الأس 10 معامل تطبيق 2. كذلك بين التقاطعات المختلفة. يوجد لدينا:

$$10^0 : 2 = 1 : 2 = 0.2 + 1$$

وعليه $r_0 = 1$

$$10^1 : 2 = 10 : 2 = 5.2 + 0$$

وعليه $r_1 = 0$

$$10^2 : 2 = 100 : 2 = 50.2 + 0$$

وعليه $r_2 = 0$

من أجل هذا فإن بواقى الأس هي: 1, 0, 0,

إذن ستكون التقاطعات كما يأتي:

$$10^0 \equiv 1, 10^1 \equiv 0, 10^2 \equiv 0, \dots \pmod{2}$$

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على تبرير مظهر هذا التتابع. وبعد أن يتقن الطلبة مفهوم الأس، ينبغي أن يكونوا على أهبة الاستعداد لتأمل الخصائص المختلفة لبواقى الأس.

(I) عندما يقسم باقي الأس a^0 على m يكون دائماً 1.

البرهان **Proof**: لدينا $m=1+0$ ، $m=1+0$ ، $a^0 = m=1$ ، يعني متبقي مقداره 1. إذن $a^0 \equiv 1$.

(II) إذا كان باقي الأس صفراً، بعدد ستكون بواقى الأس اللاحقة مساوية للصفر أيضاً.

البرهان **Proof**: افترض أن a^h يعطي باقي أس مقداره صفراً عندما يقسم على m . بعدد $a^h \equiv 0 \pmod{m}$. إذا ضرب الطرفان بالعدد a ، سيكون لدينا:

$$a \cdot a^h \equiv a \cdot 0 \pmod{m} \text{ أو } a^{h+1} \equiv 0 \pmod{m} \text{ وعليه فإن}$$

a^{h+2}, a^{h+3}, \dots سوف تعطي باقي أس مقداره صفراً أيضاً. وهذا أمر لا غبار عليه في مثال 4 أعلاه.

معايير لقابلية القسمة Criteria for Divisibility

لنأخذ الطلبة بعين الاعتبار أي عدد من الأعداد $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0$ مكتوباً بالأس العشري. وعليه،

$$N = a_0 10^0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \dots + a_n 10^n.$$

لتكن r_0, r_1, \dots, r_n بواقى الأس $10 \pmod{m}$. وعليه فإن:

$$10^0 \equiv 1, 10^1 \equiv r_1, \dots, 10^n \equiv r_n \pmod{m}$$

ليتم الطلبة بضرب كل تطابق بـ a_0, a_1, \dots, a_n ، على التوالي لنحصل على:

$$a_0 10^0 \equiv a_0, a_1 10^1 \equiv a_1 r_1, \dots, a_n 10^n \equiv a_n r_n \pmod{m}$$

وإذا تم جمعها حسب الترتيب، سنحصل على:

$$a_0 10^0 + \dots + a_n 10^n \equiv a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_n r_n \pmod{m}$$

إذن،

$$N \equiv a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_n r_n$$

ومن التوافق الأخير، N ستكون قابلة للقسمة على m فقط

التقييم اللاحق Postassessment

ليقيم الطلبة بإنجاز التمارين الآتية:

1. قم بصياغة قاعدة لاختبار القسمة على:

(أ) 4 و 25 (ب) 7

(ج) 13 (د) 101

2. حدد العوامل الأولية لكل مما يأتي:

(أ) 1220 (ب) 315

(ج) 1001

3. جد المعيار لتقابلية القسمة على 6 و 11 في الأساس 7.

حل المسائل - استراتيجية معاكسة

Problem Solving - A Reverse Strategy

93

ما، لطرائق "التحليل Analysis" و "التركيب Synthesis".
وقد زودنا T.L. Heath في كتابه:

A Manual of Greek Mathematic, Oxford University
Press, 1931, P.452.3

بترجمة دقيقة لتعاريف بابوس لهذه الاصطلاحات.

يأخذ التحليل ما نبحث عنه كما لو انه أمر مسلم به، فيعبر
منه وخلال نتائج المتابعة إلى شيء يسلم به كنتيجة للتركيب؛
وبالنسبة للتحليل فأنتنا نفترض بأن ما نبحث عنه كما لو انه
موجود فعلاً، فنبحث عن ما هيته التي نجم عنها، ومرة ثانية
فإن الحالة السابقة هي سبب ما سوف يحدث لاحقاً، وهلم
جراً، لحين، وبواسطة تراجع خطواتنا القهقري، سوف نصل إلى
شيء معروف مسبقاً أو ذو صلة بمرتبطة المبادئ الأولية، ونطلق
على مثل هذا المنهج تحليل كما لو انه حل المسألة بطريقة
ارتجاعية.

ولكن في "التركيب"، تتمكس العملية، فنتناول ما تم التوصل
إليه أخيراً في عملية التحليل، ونباشر عملية إعادة ترتيب
مكوناته الطبيعية مثل التتابع المنطقي لما كان متقدماً، وربطها
على التوالي، الواحدة مع الأخرى، لنصل أخيراً إلى إنشاء نسق
لما نريد الوصول إليه، وهو ما نطلق عليه التركيب.

ولكن لسوء الحظ لم تلق هذه الطريقة الاهتمام والتأكيد الذي
تستحقته في مادة الرياضيات الصغرى. وسوف تعزز هذه المناقشة
قيمة الاستراتيجية المعاكسة في حل المسائل.

ولكي نحسن فهم هذه التقنية والتي تختص بحل المسائل،
فإننا ستقوم بعرض مجموعة من المسائل المناسبة، حيث ستسهم

طالما يسئل معلوما الرياضيات "كيف تستطيع معرفة أي
منهج ينبغي أن تتبناه لكي تبرهن على أن قطعتي المستقيم هاتين
متوازيتان؟" بصورة عامة. يريد المعلم اعتقاد أن الخبرة تحت
الاستنتاج الصحيح. بيد أن هذا الأمر لا يمتلك أي قيمة في ميزان
فهم الطالب الذي آثار السؤال.

إن الطالب أو الطالبة يرغبان بتعلم طريقة إجرائية يستطيعان
اتباعها في حل المسألة التي تخصص امامهما. لذا فإن المعلم
الحكيم سيجد بأن الواجب عليه وصف استراتيجية معاكسة
للتأخذ بيده للبداية بالاستنتاج المطلوب واكتشاف كل
مرحلة من المراحل اللاحقة بتتابع يضمن نجاحها.

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء حالة مسألة ما والتي توجه ذاتها صوب حل يفترق إلى
استراتيجية معاكسة. سيحاول الطلبة توظيف هذه الاستراتيجية
لحل المسألة بنجاح.

التقييم السابق Preassessment

ليقيم الطلبة بحل المسألة الآتية:

إذا كان مجموع عددين يساوي 2، وحاصل ضربهما هو 3،
جد مجموع مقلوب هذين العددين.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لا تعد الاستراتيجيات المعاكسة أمراً جديداً فقد أخذها يعين
الاعتبار بابوس Pappus الإسكندرية حوالي 320 بعد الميلاد.
ونجد في الكتاب VII من مجموعة بابوس وصفا تفصيليا، لحد

المقابلة. وبالاستمرار على هذا المنهج العاكس، ينبغي على الطلبة أن يحددوا، الآن، هذا الزوج من الزوايا المتطابقة. إن من الغيد جدا إذا استطاع الطلبة البرهنة على أن $\triangle AEF \cong \triangle GFG$ ، لأن هذين المثلثين يمتلكان الزاويتين $\angle AED$ و $\angle CFB$ كزوج من الزوايا المتقابلة. فهل يمكن البرهنة على أن هذين المثلثين متطابقان؟ ومن الجلي عدم وجود مثل هذه إمكانية. إن جميع الطلبة لديهم معرفة عن هذين المثلثين وأن $\overline{HE} \cong \overline{GF}$. باستخدام هذا النوع من الاستدلال العقلي هو/أو هي سيفلحان قريبا في البرهنة على أن $\triangle ABH \cong \triangle CDG$ ، والتي ستساعدهما على برهنة أن $\triangle AEH \cong \triangle CFG$. بعدئذ، وبتتبع خطوات الاستدلال العاكس بالترتيب المطلوب ("التركيب") سيبلغ الطلبة الاستنتاج المطلوب بسهولة.

يبدو واضحا بأن الاستراتيجية العاكسة كانت مساعدة ومفيدة في إرساء مسار نحو الاستنتاج المطلوب. وقد أصبح المنهج العاكس لحل المسائل أكثر رسوخا، بعد أن أصبحت الحلول الناتجة أكثر أناقة وامتيازاً معنويا. كمثال على ذلك، دعنا نأخذ بعين الاعتبار المسألة الآتية والتي قد طرحت في التقييم السابق.

مسألة Problem 2

إذا كان مجموع عددين يساوي 2، وحاصل ضربهما هو 3، جد مجموع مقلوب هذين العددين.

الحل Solution

إن أول رد فعل لدى الطالب، بعد قراءة هذه المسألة سيكون بأعداد المعادلتين $xy=3$ ، $x+y=2$. إن الطالب المتعرس في مادة الجبر سوف يتبها مباشرة لحل هاتين المعادلتين آتيا. قد يحل/تحل المعادلة الأولى بدلالة y ليحصل على $y=2-x$ ، بعدئذ سيقوم بالتعويض في المعادلة الثانية بحيث أن $x(2-x)=3$ أو $x^2-2x+3=0$. ولما كان $x=1 \pm \sqrt{-2}$ فإن العددين سيكونان $1+i\sqrt{2}$ و $1-i\sqrt{2}$. ولأن سيكون مجموع مقلوبيهما:

$$\frac{1}{1+i\sqrt{2}} + \frac{1}{1-i\sqrt{2}} = \frac{(1-i\sqrt{2})+(1+i\sqrt{2})}{(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})} = \frac{2}{3}$$

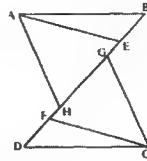
إن هذا الحل ممتاز دون شك.

وإذا استخدم الطلبة الاستراتيجية العاكسة ("التحليل")، سيقومون بداية بتفحص الاستنتاج المطلوب، يعني، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. إن مجموع هذين الكسرين هو $\frac{x+y}{xy}$. إن المعادلتين الأصليتين تظهران بسط ومقام هذا الكسر، وهذا سوف ينتج الجواب $\frac{2}{3}$ مباشرة. من الواضح أنه بالنسبة لهذه المسألة الخاصة، وجود تفوق ملحوظ للاستراتيجية العاكسة على الطريقة التقليدية - المباشرة.

مناقشة حلولها في مساعدة الطلبة على الوصول إلى فهم أعمق بهذه الطريقة.

دعنا في البداية نتأمل المسألة البسيطة الآتية من الهندسة الأولية

مسألة Problem 1



المعطى: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$$

$$\angle BAH \cong \angle DCG$$

$$\overline{BEGHFD}$$

$$\overline{GE} \cong \overline{HF}$$

برهن $\overline{AE} \parallel \overline{CF}$: Prove

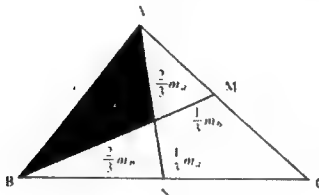
الحل Solution

إن الأفكار الأولى التي تراود ذهن الطالب الذي يحاول العمل على هذا البرهان ستتوجه صوب تأمل المعلومات المتوفرة، وما هي النقاط التي ينبغي البرهنة عليها. وبعد اخذ المعلومات المتوفرة بعين الاعتبار، فإن الطالب ذو المهارات المتدنية سوف يستمر بصورة عمية، في البرهنة على تطابق قطع المستقيمتين، والزوايا، والمثلثات لحين (إذا حصل) سيصل الاستنتاج المطلوب.

من جهة ثانية، فإن الطالب الذي يتمتع بمهارات عالية، وبعد أن يتأمل المعلومات المتوفرة لفترة قصيرة من الزمن، سوف يطالع فوراً الاستنتاج المطلوب ويبدأ العمل بصورة عاكسة من ذلك الاستنتاج ("تحليل"). في البداية سيتساءل هذا الطالب عن ماهية الطرق المتوفرة للبرهنة على توازي المستقيمتين، وهذا سيؤدي غالباً إلى البرهنة على تطابق الزوايا. وسيدرك الطلبة الأذكاء، عند هذا البرهان، بأنهم إذا كانوا قادرين على برهنة أن $\angle AED \cong \angle CFB$ ، بعدها سيكونون قادرين على برهنة أن $\overline{AE} \parallel \overline{CF}$. ولكن كيف يستطيع الطلبة البرهنة على أن $\angle AED \cong \angle CFB$ ؟ في ضوء التدريب والمهارات التي تلقاها الطلبة في الصف، فإن معظمهم سوف يتعامل - بصورة عامة - مع هذا السؤال بمحاولة إيجاد زوج من المثلثات المتطابقة، والتي تحوي على الزاويتين $\angle AED$ و $\angle CFB$ كزوج من الزوايا

الحل Solution

بدلاً من إنجاز الإنشاء المطلوب فوراً، يجب أن يكون الطلبة أكثر حكمة في استخدام الاستراتيجية المعاكسة. حيث يستطيع الطلبة افتراض الإنشاء وتفحص النتائج.



يدرك الطلبة بسرعة بأنهم يستطيعون إنشاء الثلث المظلل - أعلاه - كما أنهم يستطيعون الحصول على أطوال أضلعه $\left(r, \frac{2mb}{3}, \frac{2ma}{3}\right)$. بعدئذ يمكن تثبيت مواقع النقطتين M، و N باستخدام خاصية مركز الثقل. بعد ذلك يمكن أن تحدد النقطة C بقطع \overline{AM} و \overline{BN} . إن البدء من الاستنتاج والعمل بأسلوب معاكس، قد جعل الطلبة ينجحون في صياغة خطة لإنشاء الثلث المطلوب، بتتبع الخطوات في اتجاه معاكس ("التركيب").

وبالرغم من وجود كثير من المسائل يمكن تبسيط حلولها، بشكل ملحوظ، باستخدام الاستراتيجية المعاكسة، فهناك بالمقابل عدد كبير من المسائل تكون الطريقة التقليدية - المباشرة للحل مناسبة لها. إن من الأمور الطبيعية بالنسبة للطلّاب محاولة العمل على المسألة بالأسلوب المباشر. ولأن بات لزاماً علينا، نحن المدرسين، تشجيع طلبتنا على ترك الطريقة المباشرة عندما يصعب نوال الحل، واللجوء إلى تطبيق الحل المعاكس.

إن بعض المسائل تتطلب استراتيجيات معاكسة بصورة جزئية، لذا فإن المفيد بالنسبة لهذه المسائل المباشرة بالاستنتاج ثم العمل ارتجاعياً لحيث إنشاء مسار واضح نحو الاستنتاج.

دعنا نتأمل المسائل الآتية:

مسألة Problem 5

جد حل المعادلة الآتية: $(x-y^2)^2 + (x-y-2)^2 = 0$ حيث x, y أعداد حقيقية.

الحل Solution

إن طالب مادة الجبر سيستخدم الأسلوب المباشر لحل هذه

مسألة Problem 3

إذا كان مجموع عددين 2، وأن حاصل ضربهما 3، جد مجموع مربعي هذين العددين.

الحل Solution

لإيجاد مجموع مربعي مقلوب (العددين المذكورين في المسألة أعلاه) باستخدام المنهج المعاكس، ينبغي أن يأخذ الطلبة بعين الاعتبار، في البداية، الاستنتاج $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2$ أو $\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{y}\right)$ مرة ثانية يجب على الطلبة جمع الكسرين للحصول على $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$. وعليه فإن مقام الجواب هو $9 = (xy)^2$. ولكن احتساب البسط يمتاز بصعوبة ملحوظة. لذا ينبغي على الطلبة، الآن، إيجاد قيمة x^2+y^2 . مرة ثانية يجب أن يعاود الطلبة بالنظر إلى وراء. كيف يستطيعون توليد x^2+y^2 ? سيتمعل الطالب في اقتراح أن $(x+y)^2$ سوف ينتج عنه $x^2+2xy+y^2$ ، والذي ينتج جزئياً x^2+y^2 . يضاف إلى ذلك أن $(x+y)^2 = (2)^2 = 4$ وأن $2xy = 2 \cdot 3 = 6$. $x^2+y^2 = 2$ - وعليه تكون المسألة قد تم حلها كما يأتي:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} = \frac{-2}{9}$$

يمكن توظيف طريقة مشابهة لإيجاد قيمة $\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3$ من المعادلتين الأسليتين $xy=3$ ، $x+y=2$ مرة ثانية، فإن البدء بالاستنتاج والعمل بصورة معاكسة $\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}$ نظراً لأن الطلبة يعملون مسبقاً $(xy)^3 = (3)^3 = 27$ ، فإنهم بحاجة فقط إلى إيجاد قيمة x^3+y^3 . وكيف يستطيعون توليد x^3+y^3 ؟

من المعادلة: $(x+y)^3 = x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$

نحصل على: $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$

$$x^3+y^3 = (2)^3 - 3(3)(2)$$

$$x^3+y^3 = -10$$

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3+y^3}{(xy)^3} = \frac{-10}{27}$$

عليه سيكون:

يمكن أن تستخدم هذه الطريقة، أيضاً، في إيجاد مجموع أسس أكبر لهذه المقلوبات.

إن مسألة أخرى، والتي يؤدي حلها بنا إلى استراتيجيات معاكسة لطيفة ("التحليل")، تتضمن إنشاءات هندسية.

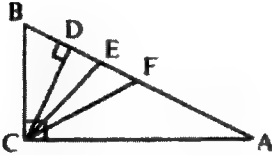
مسألة Problem 4

أنشئ مثلثاً لديك طول مستقيميهِ المتوسطين m_b ، m_c وطول c الذي يمثل الضلع التي تعد نقطتي نهايته نقطة نهاية لكل مستقيم متوسط.

أحد هذين الضلعين.

3. ليستخدّم الطليّة التحليل والتركيّب لبرهنة ما يأتي:

"في المثلث قائم الزاوية $\triangle ABC$ ، \overline{CF} هو المستقيم المتوسط المرسوم إلى الوتر \overline{AB} ، و \overline{CE} هو المستقيم المنصف للزاوية $\angle ACB$ ، و \overline{CD} هو الارتفاع للضلع \overline{AB} . برهن أن $\angle DCE \cong \angle ECF$."



4. احسب: $x^3 + \frac{1}{x^3}$ ، إذا كان $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ (الجواب: ± 123).

مرجع Reference

Posamentier, A. S., S. Krulik, Problem-Solving Strategies of Efficient and Elegant Solution:

A Resource for the Mathematics Teachers, Thousand Oaks, CA: Corwin, 1998.

المعادلة. وبعد تربيع كل متعدد حدود بصورة منفردة، سيزداد الارتباك!

إن الطلبة الذين تعرفوا، سابقاً، على الاستراتيجية المعاكسة سيحاولون بعدئذ تحليل الحل العد للمعادلة. ينبغي أن تكون قيمتي x و y بحيث يكون مجموع مربعات متعدّدات الحدود يساوي صفراً. كيف يمكن لمجموع مربعات متعدّدات الحدود أن يساوي صفراً؟ يستطيع الطلبة الإجابة على هذا السؤال بقول أن $x-y^2=0$ وأن $x-y^2=0$. لغاية هذه النقطة استخدم الطلبة الاستراتيجية المعاكسة ("التحليل"). ولكن، ينبغي أن يستمر الطلبة الآن بأسلوب مباشر ("التركيب") لحل المعادلتين $x-y^2=0$ و $x-y-2=0$ انهما.

ناقش جورج بوليا George Polya في كتابه البحث عن الحل How to Solve It الطريقة الارتجاعية في حل المسائل والتي تشابه لحد كبير الاستراتيجية المعاكسة التي نوقشت في هذا المقال. وقد أكد بوليا على أهمية دور المدرس في عرض هذه الطرق على الطلبة عندما نص في كتابه على أن "هناك نوع من المقت والكراهية السيكلوجية لهذا الترتيب المعاكس، والذي قد يمنع الطالب ذو القابلية الجيدة من فهم الطريقة إذا لم يحسن عرضها بصورة واضحة".

إنها مسؤولية معلم الرياضيات في بذل جهد مدرك للتأكيد على أهمية، وفوائد، والمحددات المحتملة للاستراتيجية المعاكسة في حل المسائل.

التقييم اللاحق Postassessment

1. إذا كان $x+y=2$ وأن $xy=3$ ، جد $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4}$.

2. أنشئ مثلث لديك طول ضلعين من أضلاعه وطول الارتفاع إلى

94

المراتب العشرية والكسور في أساسات أخرى Decimals and Fractions in Other Bases

وقد يظن المرء بأن $1.0 = 0.999999$ ، لا ريب بأن تطبيق التقانة أعلاه سينجم عنه: $x = 0.999999$ وأن $10x = 9.999999$ ، وعليه فإن $10x - x = 9$ ، وأن $x = \frac{9}{10 - 1}$ ، $x = 1$.
إن هذا العرض التوضيحي سيرشدنا إلى نظرية مهمة مفادها:
إن أي عدد كسري متكرر يمكن عرضه كعدد نسبي (يعني، نسبة بين عددين صحيحين، شريطة أن لا يساوي المقام صفراً).

البرهان Proof

ليكن وصف الكسر العشري المتكرر بالصيغة $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ حيث يمثل a_1 مرتبة عشرية وأن n يمثل طول التكرار. وكما فعلنا سابقاً، دع $x = a_1 a_2 \dots a_n \dots$ وأن:
 $10^n x = a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_n \dots$

والآن

$$\begin{aligned} 10^n x - x &= a_1 a_2 \dots a_n \\ x(10^n - 1) &= a_1 a_2 \dots a_n \\ x &= \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{10^n - 1} \end{aligned}$$

إن المرتبة العشرية المتكررة قد تم عرضها الآن بواسطة عدد نسبي. وسيرغب الطلبة الآن بتأمل الكسور المتكررة بأساسات غير 10 (لن نطلق عليها بعد هذا كسوراً عشرية!). افترض أن لدينا في الأساس 3 الكسر المتكرر: 12.12 .. ينبغي أن نرشد الطلبة إلى طرح الأسئلة الآتية:

- (1) هل يمكن عرض هذه الكسور المتكررة بواسطة عدد نسبي بالأساس 3؟
- (2) بصورة عامة، هل يمكن لأي كسر متكرر، بأي أساس كان، أن يوصف بواسطة عدد نسبي؟

ابدأ باستخدام المنهج الذي طبق مبكراً على الكسور العشرية المتكررة. دع $x = 12.12$. اسأل الطلبة كيف يمكن نقل النقطة الثلاثية Ternary Point مرتبتين إلى اليمين (لاحظ بأن النقطة الثلاثية في الأساس 3 تناظر الفارزة العشرية بالأساس 10). كيف

هدف الأداء Performance Objective
سيسوغ الطلبة المراتب العشرية المتكررة Repeating Decimals والكسور المتكررة Repeating Fractions في أساسات أخرى.

التقييم السابق Preassessment
اسأل الطلبة إيجاد العدد العشري الذي يكافئ $\frac{87}{10^2 - 1} (= \frac{87}{99})$. وتحدى الطلبة بعرض مراتب عشرية متكررة بواسطة عدد نسبي (قياسي) Rational بسيط.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies
بصورة عامة تصنف الأعداد العشرية إلى أعداد عشرية متكررة، وغير متكررة. ثم تقسم الأعداد العشرية المتكررة إلى أعداد عشرية منتهية terminating وغير منتهية Non-terminating. وغالباً ما يدرك الطلبة مباشرة بأن المراتب العشرية المنتهية تعرض عدداً نسبياً (قياسياً) خاصاً. لكن طبيعة العدد الكسري - غير المنتهي هو أكثر إثارة للاهتمام. لقد بدأنا هذا الاستكشاف بتحديد أنفسنا إلى الكسور العشرية المتكررة - غير المنتهية: 12.1212 . (الخط الذي يملو آخر مرتبتين يظهر الرقمين المتكررين). ما نريد عمله هو عرض هذا الكسر العشري بواسطة كسر نسبي بسيط فإذا افترضنا $x = 12.12$.. وأنه بعدئذٍ $100x = 12.1212$.. يطرح الأول من الأخير ينتج عنه المعادلة: $100x - x = 12$ أو $x = \frac{12}{100 - 1} = \frac{12}{99}$. لقد وجدنا الآن بأن نسبة العرض للكسر 12.12 ..

لا زالت عملية الاستكشاف مستمرة بنسق محدد، والآن لاحظ بأن $1 = \frac{12}{99} + \frac{88}{99}$ ، ولكن إذا قمنا بإضافة الكسر العشري المكافئ

$$\begin{aligned} &12.1212 \\ &+ .878787 \\ \hline &.999999 \end{aligned}$$

$$B^n x - x = a_1 a_2 \dots a_n$$

$$x = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{B^n - 1}$$

وهذا يبرهن بأن أي كسر متكرر يمكن وصفه بواسطة عدد نسبي.

التقييم اللاحق Posatassessment

ليقم الطلبة بحل التمارين الآتية:

1. إذا كانت $x = \frac{123}{10^3 - 1}$ ما هو وصفها بالمرتبة العشرية؟
2. إذا كانت $x = \frac{11256}{7^4 - 1}$ ، صف x ككسر نسبي.
3. جرد الكسر المتكرر $x = 0.2323$ عندما تكون x بالأساس 10، أو 8، أو 5.

$3^2 x = 12.12\overline{12}$. عن طريق طرح x نحصل على:

$$x(3^2 - 1) = 12, \quad 3^2 x - x = 12$$

بواسطة عدد نسبي. دع الطلبة يلاحظون الصيغة المناظرة

بالأساس 10. باستخدام هذه الأمور التوضيحية كنماذج Models وسوف نبرهن بأن الكسر المتكرر بأي أساس يمكن وصفه بواسطة عدد نسبي بذلك الأساس.

البرهان Proof

تأمل أي أساس B وأي كسر متكرر في ذلك الأساس: $a_1 a_2 \dots a_n$ ، حيث a_n هي المرتبة الكسرية للعدد وأن n هو عدد صحيح يمثل طول التكرار

$$x = a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

$$B^n x = a_1 a_2 \dots a_n a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

الأعداد المضلعة

95

Polygonal Numbers

والهندسة موضع اهتمام اليونانيين القدماء. فعلى سبيل المثال، يمكن وصف العدد 3 بثلاثة نقاط تؤلف مثلثاً، كما هو الحال بالنسبة للعدد 6.



أي نوع من متعددات الأضلاع يمكن أن يمثل العدد 4؟ والعدد 9؟ بعد أن يتوفر وقت كاف للطلبة لإيجاد متعددات الأضلاع المطلوبة، أسأل الطلبة عرض إجاباتهم. إن الأعداد التي يمكن أن تكون ذات صلة بالأشكال الهندسية يطلق عليها أعداد مضلعة Polygonal Numbers أو رمزية Figureate.

استراتيجيات التدريس Teaching Strategies

اخبر الطلبة بأن من السهل جداً إيجاد العدد الذي يقابل

يمكن أن تدرس هذه الوحدة لصف يمتلك سيطرة كافية على المهارات الأساسية بمادة الجبر الأولي. وبما أن جل محتويات الوحدة توظف التفكير الحدسي، فإنها سوف تثمر عن درجة مقبولة من التدريب. وسيكون من المفيد جداً إذا كان الطلبة على علم كاف بالتواليات الرياضية، وصيغة مجموع سلاسلها. ولكن إذا كان الطلبة يفتقرون إلى معرفة كافية بهذا الموضوع، ينبغي إعطاءهم الأولويات خلال فترة قصيرة ومعقولة.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. لديك مجموعة من متعددات أضلاع منتظمة، وسيقوم الطالب بإيجاد العدد الذي يقابلها.
2. سيكتشف الطالب العلاقات بين اثنين، أو أكثر من أعداد مضلعة مختلفة لترتب معلومة.

التقييم السابق Preassessment

اكتشف اليابانيون الأوائل بأن بعضاً من الأعداد التامة يمكن تقسيمها إلى أنماط من الوحدات. كانت هذه الصلة بين الحساب

ينبغي أن يكون واضحاً للطلبة بأن أعداد شكل للحصول على كل عدد: مثلثي، أو مربع، أو خماس ... الخ، يعد مهمة بالغة الصعوبة. وبدلاً من ذلك سوف نقوم بدراسة كيف أن الأعداد المضمنة المتعاقبة لمضلع ما يتبع بعضها الآخر، وبالنظر إلى التتابع الناتج، حاول الحصول على صيغة بالنسبة للمرتبة r الـ r Rank لكل متعدد أضلاع معلوم.

إذا ألقينا نظرة فاحصة على الصف الأول من الأعداد الرمزية التي تقابل الأعداد المثلثية، ثم عاودنا النظر إلى مراتبهم المقابلة (جدول 1) فسوف نلاحظ بأنه يمكن كتابتها كما يأتي:

$1 = r$
 $3 = (r-1) + r$
 $6 = (r-2) + (r-1) + r$
 $10 = (r-3) + (r-2) + (r-1) + r$
 $15 = (r-4) + (r-3) + (r-2) + (r-1) + r$
 وإذا نظرنا إلى المراتب سلاحاً أيضاً بأن تعاقبها يؤلف توالياً حسابياً، وبأن كل عدد مثلثي بالمرتبة r يساوي مجموع التوالية الحسابية $1, 2, 3, \dots, r$ من 1 إلى r .
 إذن يمكننا الاستنتاج بأنه يمكن الحصول على العدد المثلثي الـ r الرائي T_r تسلسلاً من المعادلة:

$$T_r = r(r+1) / 2$$

بعدد، دعنا نوجه أنظارنا نحو الأعداد المربعة:

$$1 = r^2 = 1^2$$

$$4 = r^2 = 2^2$$

$$9 = r^2 = 3^2$$

$$16 = r^2 = 4^2$$

$$25 = r^2 = 5^2$$

يبدو واضحاً بأن كل عدد مربع يساوي مربع المرتبة المناظرة له. لذا فإن العدد المربع r هو r^2 .

إن الصيغة المطلوبة بالنسبة العدد الخمس الرائي تسلسلاً يمكننا الحصول عليها إذا قمنا بكتابة كل رقم بالطريقة الآتية:

$$1 = r^2 + 0 = 1 + 0$$

$$5 = r^2 + 1 = 2^2 + 1$$

$$12 = r^2 + 3 = 3^2 + 3$$

$$22 = r^2 + 6 = 4^2 + 6$$

$$35 = r^2 + 10 = 5^2 + 10$$

وإذا قمنا بدراسة القسم الثاني من المجموع $0, 1, 3, 6, 10, \dots$ سوف نشاهد بأن كل من الأعداد المقابلة لمجموع التوالية الحسابية $0, 1, 2, 3, \dots, (r-1)$ وهي $r/2$ (أو $(r-1)/2$) لذا فإن العدد الخمس الرائي تسلسلاً هو:

$$\frac{r(r-1)}{2} + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{2r^2 + (r-1)r}{2} = \frac{(2r^2 + r^2 - r)}{2} = \frac{(3r^2 - r)}{2} = \frac{r(3r-1)}{2}$$

شكل متعدد الأضلاع - معلوم، وإذا استطعنا العثور على صيغة بحيث من خلال المعلومات التي تخص أي شكل متعدد الأضلاع-منتظم، والرتبة التي ينتمي إليها نستطيع الحصول على ذلك العدد منها.

ابداً بأخبار الطلبة ماذا تعني مرتبة من متعددات الأضلاع-المنتظمة. وبالنسبة لأي متعدد أضلاع منتظم، فإن المرتبة تعني، في ضوء ترتيبها. العدد المضلع المناظر لها. على سبيل المثال، بالنسبة لمثلث ما. فإن مرتبة $1=3$ (العدد المثلثي الأول)، مرتبة $2=6$ (العدد المثلثي الثاني)، مرتبة $3=10$ ، ... الخ.

والآن قم برسم الأشكال التي ستعرض كيفية الحصول على المراتب الخمسة الأولى للأعداد الرمزية - الأولى الخمسة (المثلثية، والمربعة، والخمسة، والسدسة، والسبعة). والاستثمار الوقت تستطيع استخدام جهاز الإسقاط الضوئي، أو يمكنك توزيع أوراق مذكرات مع الرسوميات، واصنع جدولاً مقابل لها. إن كل من الأشكال الرسومية والجدولين الآتيين يظهران بوضوح ماذا ينبغي عليك عرضه على طلبتك.

جدول (1)

	1	2	3	4	5
• مثلث					
• مربع					
• شكل خمسي					
• شكل سداسي					
• شكل سباعي					

جدول (2)

الشكل	عدد الأضلاع N	المرتبة r	1	2	3	4	5
مثلثي	3	1	3	6	10	15	20
مربع	4	1	4	9	16	25	36
مخمس	5	1	5	12	22	35	50
سدس	6	1	6	15	28	45	66
مسيح	7	1	7	18	34	55	81

لإيجاد صيغة للعدد المسدس الرائي تسلسلا r^{th} تأمل الأعداد الخمسة الأولى كما يأتي:

$$\begin{aligned} 1 &= 1r \\ 6 &= 3r = 3(2) \\ 15 &= 5r = 5(3) \\ 28 &= 7r = 7(4) \\ 45 &= 9r = 9(5) \end{aligned}$$

إن تفحص عوامل r : 1, 3, 5, 7, 9 سوف يظهر بأن كلا منها يقابل مجموع كل من المرتبة المقابلة، والمرتبة التي تسبقها مباشرة. يعني، إن كل معامل يساوي $r+(r-1)$. وعليه فإن العدد المسدس الرائي تسلسلا سيكون:

$$[r+(r-1)]r = (2r-1)r.$$

يمكن إيجاد العدد المسبح الرائي تسلسلا كما يأتي: اكتب الأعداد المسببة-السببة الأولى بالطريقة الآتية:

$$\begin{aligned} 1 &= 2r^2-1 = 2(1)^2-1 \\ 7 &= 2r^2-1 = 2(2)^2-1 \\ 18 &= 2r^2+0 = 2(3)^2+0 \\ 34 &= 2r^2+2 = 2(4)^2+2 \\ 55 &= 2r^2+5 = 2(5)^2+5 \end{aligned}$$

من المحتمل أن يكون من الصعب جدا على الطلبة التوصل إلى صيغة بالنسبة للقسم الثاني X لكل عدد $2r^2 + X$. من أجل هذا ينبغي على الطلبة إيمان النظر بالعدد لفترة قصيرة، بعدها يجب على المدرس أن يوضح مباشرة بأن كل X تساوي مجموع المتوالية الحسابية:

1- 0. 1. 2. 3, ... $(r-2)$ مطروحا منها 1 وهي $\frac{(r-2)(r-1)}{2}$. وينبغي على الطلبة اختبار الصيغة على كل من الأعداد المذكورة أعلاه. لذا فإن العدد المسبح الرائي تسلسلا سيكون:

$$\begin{aligned} 2r^2 + \frac{(r-2)(r-1)}{2} - 1 &= 2r^2 + \frac{(r-2)(r-1)-2}{2} \\ &= 2r^2 + \frac{r^2-3r+2-2}{2} = r(5r-3) \end{aligned}$$

حاول أن تشد انتباه الطلبة إلى حقيقة أننا نمتلك صيغة للمرتبة الرائية للأعداد الخمسة الخمسة الأولى. وعليه نحن قادرون الآن على إيجاد أي عدد: مثلث، أو مربع، أو خمسين، أو مسدس، أو مسبح. ولكن توجد مضلعات منتظمة بأضلاع: 8, 9, .. 20, 100. الخ ونأمل أيضاً بالوصول إلى صيغة للمرتبة الرائية لكل منهم. إن خطوتنا اللاحقة سوف تركز اهتمامها بإيجاد مثل هذه الصيغ.

ولكي نحقق هذا الأمر دعنا نكتب الصيغ التي توصلنا إليها بمراحل سابقة.

عدد الأضلاع	المرتبة r
3	$\frac{r(r+1)}{2} = \frac{r^2+r}{2} = \frac{1r^2}{2} + \frac{r}{2}$
4	$r^2 = \frac{2r^2}{2} = \frac{2r^2}{2} + \frac{0}{2}$
5	$\frac{r(3r-1)}{2} = \frac{3r^2-r}{2} = \frac{3r^2}{2} - \frac{r}{2}$
6	$r(2r-1) = \frac{(4r^2-2r)}{2} = \frac{4r^2}{2} - \frac{2r}{2}$
7	$\frac{r(5r-3)}{2} = \frac{5r^2-3r}{2} = \frac{5r^2}{2} - \frac{3r}{2}$
.	.
.	.
.	.
.	.
N	.

والآن، دعنا نلقي نظرة على العمود الأخير. سوف نلاحظ بأن معاملات الحد $\frac{r^2}{2}$ يمكن كتابتها بصيغة $(N-2)$. كذلك فإن معاملات الحد $\frac{r}{2}$ يمكن كتابتها بصيغة $(N-4)$. وعليه فإن المرتبة الرائية للعدد المضلع النوني N -gonal هي:

$$\begin{aligned} \frac{(N-2)r^2}{2} - \frac{(N-4)r}{2} &= \frac{(N-2)r^2 - (N-4)r}{2} \\ \left(\frac{r}{2}\right)[(N-2)r - (N-4)] &= \left(\frac{r}{2}\right)[(r-1)N - (r-2)] \end{aligned}$$

إن الجدول المكتمل (يتضمن المراتب الخمسة الأولى للعدد المضلع النوني) سيبدو بالصيغة الآتية:

عدد الأضلاع	المرتبة	1	2	3	4	5
3	$\frac{r(r+1)}{2}$	1	3	6	10	15
4	r^2	1	4	9	16	25
5	$\frac{r(3r-1)}{2}$	1	5	12	22	35
6	$r(2r-1)$	1	6	15	28	35
7	$\frac{r(5r-3)}{2}$	1	7	18	34	55
.
.
.
N	$\left(\frac{r}{2}\right)[(r-1)N - 2(r-2)]$	1

$$P_r = \frac{r(3r-1)}{2} = \frac{3r^2}{2} - \frac{r}{2}$$

إعادة كتابة $\frac{-r}{3}$ بصيغة $\frac{-3r}{2} + r$ ، سيكون لدينا:

$$\frac{3r^2}{2} - \frac{3r}{2} + r = \frac{3(r^2 - r)}{2} + r$$

حيث يمثل T_{r-1} العدد $\frac{3r(r-1)}{2} + r = 3T_{r-1} + r$ ، المثلثي $(r-1)^{th}$.

مثال 4 Example:

بين أن أي عدد سداسي يساوي مجموع العدد الخمس من نفس المرتبة والعدد المثلث بالمرتبة التي تليها.

الحل Solution:

$$(Hex)_r = r(2r-1) = 2r^2 - r$$

$$= \frac{3r^2 - r}{2} + \frac{r^2 - r}{2} = \frac{r(3r-1)}{2} + \frac{r(r-1)}{2} = P_r + T_{r-1}$$

التقييم اللاحق Postassessment

بعد أن أكمل الطلبة دراسة الأمثلة السابقة، ينبغي أن يكونوا قادرين على حل الأمثلة الآتية:

1. ارسم مثنى منتظم يقابل العدد المثنى بالمثال 1 (ادرس الرسوميات الخمسة الأولى للأعداد المجازية قبل مباشرة هذه المسألة).
2. جد الأعداد المضلعة (ب عشرة أضلاع) الثلاثة الأولى.
3. بين بأن أي عدد مسموع يساوي مجموع العدد السدس بنفس المرتبة والعدد المثلث بالمرتبة التي تسبقها (يعني، برهن: $(Hep)_r = (Hex)_r + T_{r-1}$).
4. بين بأن أي عدد نووني الأضلاع ($N \geq 5$) يساوي مجموع العدد بأضلاع $(N-1)$ بنفس للمرتبة والعدد المثلث بالمرتبة التي تسبقها. (تلميح: ابدأ بعدد مضلع $(N-1)$ بالمرتبة r ومثلث T_{r-1} . ثم مباشر عملية الإضافة).
5. بين أن مجموع أي عدد من الأعداد الصحيحة المتعاقبة، مبتدئاً بـ 1 هو مربع تام (يعني، عدد مربع).

عند هذه النقطة فإن من المفيد بالنسبة للطلبة العمل على بعض الأمثلة البسيطة باستخدام صيغة للعدد المضلع النوني.

مثال 1 Example:

جد الرقم المثنى الثالث Third Octagonal.

الحل Solution:

دع $N=8$ وان $r=3$. عوض هذين العددين في الصيغة

$$\frac{r}{2}[(r-1)N - 2(r-2)] = \frac{3}{2}[(3-1)8 - 2(3-2)] = \frac{3}{2}(2)8 - 2(1)$$

$$= \frac{3}{2}[16-2] = \frac{3 \times 14}{2} = 21$$

مثال 2 Example:

أي متعدد أضلاع منتظم يقابل العدد 40 إذا كانت $r=4$ ؟

الحل Solution:

في هذه الحالة نحن على معرفة بالمرتبة والعدد، ولكن ينبغي علينا إيجاد N . ستقوم بالتعويض وحل المعادلة الآتية:

$$\left(\frac{r}{2}\right)[(r-1)N - 2(r-2)] = 40$$

$$\left(\frac{4}{2}\right)[(4-1)N - 2(4-2)] = 40$$

$$2[3N - 2(2)] = 40 \quad N = 8$$

إن سيكون الشكل مثنى الأضلاع-المنتظم.

إن الأمثلة الآتية تمتاز بكونها أكثر صعوبة، لحد ما، من سابقتها وتتطلب عدة تطبيقات للصيغ لإيجاد علاقات بين الأعداد المضلعة المختلفة.

مثال 3 Example:

بين بأن العدد الخمس الرائي تسلسلا يساوي r مضافا إليها ثلاثة أضعاف العدد $(r-1)$ المثلثي.

الحل Solution:

لفرض إكمال هذه المسألة ينبغي علينا، في البداية، كتابة صيغة للعدد الخمس الرائي تسلسلا:

الشبكات

96

Networks

(1) جميع درجات الرؤوس زوجية. (2) هناك درجتا رؤوس فردية بالضبط وسبائتي برهان هاتين النتيجةين لاحقاً. هناك عدد زوجي من درجة الرؤوس الفردية في شبكة متراصة.

البرهان Proof:

دع V_1 تمثل عدد الرؤوس للدرجة 1، و V_3 تمثل عدد الرؤوس للدرجة 3، و V_n عدد الرؤوس للدرجة n . كذلك لكن $N = V_1 + V_3 + V_5 + \dots + V_{2n-1}$. حيث N هي عدد رؤوس الدرجة الفردية في شبكة متراصة - معلومة ("متراصة" تعني لا تحوي نهايات سائبة). ونظراً لوجود ثلاثة نقاط نهاية للأقواس عند V_3 وخمسة عند V_5 ، و n عند V_n ، فإن مجموع نقاط نهاية الأقواس بشبكة متراصة هو:

$$M = V_1 + 2V_2 + 3V_3 + \dots + 4V_4 + \dots + 2nV_{2n}$$

$$M - N = 2V_2 + 2V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots + (2n-2)V_{2n-1} + 2nV_{2n}$$

$$= 2(V_2 + V_3 + 2V_4 + 2V_5 + \dots + (n-1)V_{2n-1} + nV_{2n})$$

وبما أن الفرق بين عددين زوجيين هو عدد زوجي أيضاً،

$$M - (M - N) = N$$

إن شبكة متراصة يمكن اجتيازها، فقط إذا كانت تحوي، كحد أعلى، اثنين من درجة الرؤوس الفردية.

البرهان Proof:

يجب المرور خلال الرؤوس على مسار مستمر. يعني، إذا "ولج" خط في نقطة فإن آخر ينبغي أن "يغادر" النقطة ذاتها. إن هذا يفيد في تحديد نقاط النهاية. إن الرؤوس الوحيدة، والتي لا تتوافق مع هذه القاعدة، هي بدايات ونهايات عملية الاجتياز. إن هاتين النقطتين قد تكونان بترتيب فردي. تم بواسطة النظرية السابقة إرساء حقيقة ضرورة وجود عدد فردي برؤوس فردية؛ وعليه هناك إمكانية وجود 2 أو 5 من الرؤوس بالترتيب الفردي لغرض اجتياز شبكة ما. الآن ليقم الطلبة برسم كل من الشبكات التي يمكن اجتيازها والتي لا يمكن اجتيازها (باستخدام هاتين النظريتين). الشبكة 1 في التقييم السابق تمتلك خمسة رؤوس الرؤوس B، و C، و E تمتاز بدرجة زوجية والراسين A، و D لهما درجة فردية. وبما أن شكل 1 يمتلك رأسان بدرجة فردية،

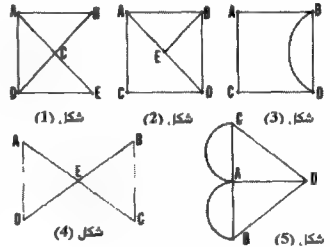
تعد هذه الوحدة درساً استهلالياً في الطوبولوجيا.

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء منحني مغلق، سيقوم الطلبة بتحديد فيما إذا كان يمكن اجتيازه versable Tra، أو لا يمكن اجتيازه.

التقييم السابق smentassesPre

ليحاول الطلبة استخدام قلم الرصاص في تتبع كل من التشكيلات الآتية دون تكرار المرور بنفس النقطة في أي جزء من أجزائه. واسأل الطلبة تحديد عدد الأقواس أو قطع المستقيم التي تمتلك نقطة نهاية عند كل من E, DA, B, C.



استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

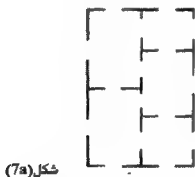
إن تشكيلات مثل الأشكال (1-5)، والتي صنعت من قطع مستقيمات و/أو أقواس مستمرة يطلق عليها شبكات Networks. إن عدد الأقواس أو قطع المستقيم التي تمتلك نقطة نهاية عند رأس محدد يطلق عليها درجة الرأس Degree of The Vertex. وبعد محاولة تتبع هذه الشبكات دون رفع أقلامهم عن الورقة، ودون معاودة عبور الخط مرة ثانية، يجب أن يلاحظ الطلبة نتيجتين مباشرتين هما أن الشبكات يمكن تتبعها (أو اجتيازها) إذا كانت:

وخلال هوهي، وخالل كوتيل، وخالل سوهيمدي، وخالل هولزت، سوف لن نمر خلال جروني.

إن معضلة جسر كونيغسبرغ تشابه المسألة المطروحة في شكل 5. إذن دعنا نلقي نظرة على الشكلين 5 و 6 ونلاحظ أوجه الشبه بينهما. هناك سبعة جسور في شكل 6، وسبعة خطوط في شكل 5. كل رأس في شكل 5 بدرجة فردية. فإذا بدأنا في شكل 6 عند نقطة D سيكون لدينا ثلاثة خيارات، نستطيع الذهاب إلى هوهي، هوينج، أو هولزت. وإذا بدأنا في شكل 5 عند نقطة D سيكون لدينا ثلاثة مسارات لكي نختار من بينها. وفي كلا الشكلين إذا كنا عند النقطة C سيكون لدينا إما ثلاثة جسور نستطيع العبور خلالها، أو ثلاثة خطوط.

وتوجد نفس الحالة بالنسبة للموقعين A و B في شكل 6، والرأسين A و B في شكل 5. ينبغي أن نشدد على أن هذه الشبكة لا يمكن اجتيازها.

إن مثالاً آخر على معضلة حيث يتبوأ موضوع قابلة اجتياز الشبكة جانبها مهما منها هي معضلة المسكن بخمسة غرف. ليتأمل الطلبة المخطط الخاص بالفرز ذي الغرف الخمسة، حيث تحتوي كل غرفة على مدخل لكل غرفة مجاورة، ومدخل آخر يؤدي إلى خارج المنزل. تكمن المعضلة في أن يكون لدينا رجل يبدأ إما من داخل المنزل، أو خارجه ويسير خلال كل مدخل مرة واحدة فقط.



شكل (7a)

ينبغي أن يشجع الطلبة على محاولة عدة مسارات، وسوف يدركون رغم أن عدد المحاولات محدود، بأن هناك الكثير من المحاولات التي يجب أن نجربها بأسلوب المحاولة - و - الخطأ لكي يكون الحل عملياً.

يجب أن يرشد الطلبة إلى مخطط شبكة يماثل هذه المسألة. يظهر شكل 7b مجموعة من المسارات الممكنة التي تربط الغرف الخمسة A، و B، و C، و O، و E، والخارج F. لقد تم تقليص المسألة، الآن، إلى الحد الذي يمكننا تحديد فيما إذا كانت الشبكة قابلة للاجتياز أم لا. فهناك أربعة رؤوس بدرجة

بالضبط. بالإضافة إلى ثلاثة رؤوس بدرجة زوجية فإنه قابل للاجتياز.

إذا بدأنا عند A ثم توجهنا إلى أسفل نحو D، عابرين نحو E. ثم ننقل راجعين إلى A، عابرين نحو B ثم إلى أسفل نحو D. نكون قد اخترنا المسار المطلوب.

تمتلك الشبكة 2 خمسة رؤوس، وبعد الرأس C الوحيد بدرجة الرأس الفردية. إن الرؤوس A، و B، و E، و D جميعاً ذات درجة فردية. وهكذا، بما أن الشبكة تحوي أكثر من رأسين فرديين، فلا يمكن اجتيازها.

الشبكة 3 يمكن اجتيازها لاحتوائها على رأسين زوجيين وبالضبط على رأسين بدرجة فردية.

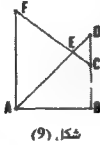
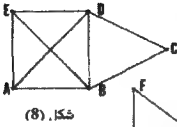
الشبكة 4 تحوي على خمسة رؤوس بدرجة زوجية، لذا يمكن اجتيازها. الشبكة 5 تحوي على أربعة رؤوس بدرجة فردية ولا يمكن اجتيازها. ولنفرض توليد منافع مناسب يشد الطلبة للموضوع اعرف لهم مسألة جسر كونيغسبرغ الشهير. حيث واجهت في القرن الثامن عشر مدينة كونيغسبرغ البروسية. والتي تقع حيث ينقسم نهر بريجل Pregel إلى رافدين. معضلة ترفيهية مفادها: هل يستطيع المرء السير عبر كل من الجسور السبعة في جولة مستمرة خلال المدينة دون أن يمر بأحد الجسور مرتين؟ في عام 1735 برهن الرياضي الشهير ليونارد أويلر Leonhard Euler (1707-1783) بأن هذه الجولة لا يمكن أن تتم وفق ما ذكر.

بين للطلبة بأن عقد مناقشة سوف يلم شمل عملهم السابق على الشبكات فيؤدي إلى حل معضلة جسر كونيغسبرغ.

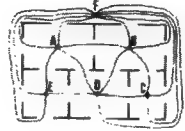


شكل (6)

أخير الطلبة بضرورة تمثيل المدينة بواسطة A، والضفة اليسرى للنهر B، والضفة اليمنى بواسطة C، والمساحة بين الزراعي المجرى الأعلى بواسطة D. فإذا بدأنا عند هولزت Holzi وسرنا نحو سوهيمدي Sohemde، ثم خلال هوينج Honig، وخالل هوهي Hohe، وخالل كوتل Kotel، وخالل جروني Grune سوف لن نغير كرامر Kramer. من جهة ثانية، إذا ابتدأنا سيرنا عند كرامر وغدينا السير إلى هوينج،



فردية، ورأسان بدرجة زوجية. ونظرا لعدم وجود الثنائ أو صفر من الرؤوس بالدرجة الفردية، بالضغط، فإن هذه الشبكة لا يمكن اجتيازها، وعليه فإن معضلة المنزل بخمسة غرف لا تمتلك مساراً للحل. والآن يمكن عرض مسائل ذات طبيعة مشابهة على الطلبة.



شكل (7b)

2. ليقم الطلبة برسم مخطط أرضية منزل، ثم تحديد إذا كان سير شخص ما ممكناً خلال كل مدخل بمرحلة واحدة فقط.

مرجع Reference

Posamentier, A. S., and W. Schulz (Eds.), The Art of Problem-Solving: A Resource for the Mathematics Teacher, Thousand Oaks, CA: Corwin, 1998.

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقم الطلبة بإيجاد إذا كانت الأشكال الآتية قابلة للتتبع دون رفع أقلامهم عن الورقة، ودون المرور فوق أي خط مرتين (يعني، قابلة للاجتياز).

التقسيم الثلاثي للزاوية – ممكن أم غير ممكن؟

Angle Trisection - Possible or Impossible?

97

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies
اسأل الطلبة تقسيم زاوية بقياس 90° إلى ثلاثة أقسام متساوية باستخدام مسطرة عدلة وفرجار فقط. وببذل قليل من المشقة ينبغي أن يكونوا قادرين على إنشاء زاوية بقياس 60° عند رأس زاوية معلومة، وهذا يكمل - افتراضياً عملية التقسيم الثلاثي. ولكن، ادع الطلبة الآن إلى تقسيم زاوية بقياس 120° إلى ثلاثة أقسام متساوية. سينشأ عن هذا الأمر صعوبات جمّة لأن من المستحيل إجراء ذلك بواسطة مسطرة عدلة وفرجار فقط. ابدأ، عند هذه النقطة، مناقشة استحالة التقسيم الثلاثي للزاوية باستخدام المسطرة العدلة والفرجار فقط بمساعدة وحدة طول واحدة وزاوية بقياس A، يمكن إنشاء قطعة خط مستقيم بطول $\cos A$ (انظر الشكل أدناه)

إن أكثر المسائل الثلاثة التي تخص العصور القديمة، والتي تعد ذات أثر يفتح أذهان طالب المدارس الثانوية، هي مسألة التقسيم الثلاثي للزاوية. وسوف تعرض هذه الوحدة مناقشة وبرهاناً ينص على أن أية زاوية لا يمكن تقسيمها ثلاثياً بواسطة مسطرة عدلة وفرجار فقط.

هدف الأداء Performance Objective

يسمح الطلبة الخطوط العريضة لبرهان على أن زاوية بقياس 120° لا يمكن أن تقسم ثلاثياً.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بإنشاءات الجبر الأولي.

تمتلك جذورا نسبية. ولتحقيق ذلك، افترضنا وجود جذر نسبي،
 $\frac{p}{q}$ ، حيث لا تمتلك p و q أي عامل مشترك أكبر من 1.
 ويتعويض ($\frac{p}{q}$)، سيكون لدينا:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{q}\right) + 1 = 0$$

$$p^3 - 3pq^2 + q^3 = 0$$

$$q^3 = 3pq^2 - p^3$$

$$q^3 = p(3q^2 - p^2)$$

وهذا يعني بأن q^2 ، وبالطبع q ، تحوي العامل p . وعليه يجب أن تكون p مساوية ± 1 . كذلك، يحل المعادلة بالنسبة لـ p^3 :

$$p^3 = 3pq^2 - q^3$$

$$p^3 = q^2(3p - q)$$

وهذا يعني بأن p و q ينبغي أن يمتلكا عاملا مشتركا، وعليه $q = \pm 1$. ونستطيع الخروج باستنتاج من هذا بأن الجذر النسبي الوحيد للمعادلة $x^3 - 3x + 1 = 0$ هو $r = \pm 1$. وبالتعويض، نستطيع بيان أن كل من ± 1 ، لا يمثلان الجذر المطلوب.

بعدئذ، افترض أن $x^3 - 3x + 1 = 0$ تمتلك جذرا قابلا للإنشاء بعدئذ، Constructible $a + b\sqrt{c}$. وبالتعويض في المعادلة المذكورة، نستطيع بيان أنه إذا كان $a + b\sqrt{c}$ جذرا بعدئذ سيكون مرافقه Conjugate $a - b\sqrt{c}$ ، جذرا أيضا. إن مجموع جذور المعادلة متعددة الحدود $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ هو $-a_n$ ، وسيكون ذلك بأن مجموع جذور المعادلة $x^3 - 3x + 1 = 0$ يساوي صفرا. فإذا كان لدينا جذران $a + b\sqrt{c}$ و $a - b\sqrt{c}$ مع جذر ثالث r ، سيكون لدينا

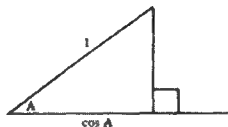
$$a + b\sqrt{c} + a - b\sqrt{c} + r = 0$$

$$r = -2a$$

ولكن a عدد نسبي، وعليه سيكون r نسبيا، وسيكون لدينا تناقض. إذن الزاوية التي قياسها 120° لا يمكن تقسيمها لثلاثا. إن هذا سيرهن جوهريا على أن أية زاوية لا يمكن تقسيمها لثلاثا بواسطة مسطرة عدلة وفرجار فقط.

التقييم اللاحق Postassessment

ليتم الطلبة بكتابة الخطوط العريضة البرهان الذي عرض في هذه الوحدة بالإضافة إلى مناقشة أهميته.



إذا استطعنا تقسيم A إلى ثلاثة أقسام متساوية، بعدئذ نستطيع إنشاء $\cos \frac{A}{3}$ أيضا. وإذا استطعنا بيان أن $\cos \frac{A}{3}$ لا يمكن إنشاؤه. بعدئذ نكون قد بينا عدم إمكانية التقسيم الثلاثي للزاوية A . هنا سنفترض بأن $m\angle A = 120^\circ$ ، ونبين عدم إمكانية تقسيم هذه الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية.

في البداية، ينبغي أن نحصل على صيغة لـ $\cos A$ بدلالة $\cos \frac{A}{3}$.

$$\cos 3y = \cos(2y + y) = \cos 2y \cos y - \sin 2y \sin y$$

$$\cos \frac{A}{3}$$

ولكن،

$$\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$$

بالتعويض،

$$\begin{aligned} \cos 3y &= \cos y (2\cos^2 y - 1) - \sin 2y \sin y \\ &= [2\cos^3 y - \cos y] - \sin 2y \sin y \end{aligned}$$

ولكن، $\sin 2y = 2\sin y \cos y$ ، وعليه سيكون،

$$\begin{aligned} \cos 3y &= [2\cos^3 y - \cos y] - \sin y (2\sin y \cos y) \\ &= [2\cos^3 y - \cos y] - 2\sin^2 y \cos y \\ &= [2\cos^3 y - \cos y] - 2\cos y (1 - \cos^2 y) \\ &= [2\cos^3 y - \cos y] - 2\cos y + 2\cos^3 y \\ &= 4\cos^3 y - 3\cos y \end{aligned}$$

افترض $3y = A$ لتحصل على:

$$\cos A = 4\cos^3 \frac{A}{3} - 3\cos \frac{A}{3}$$

بضرب طرفي المعادلة في 2 واستبدال $\cos \frac{A}{3}$ بالرمز x لنحصل على:

$$2\cos A = x^3 - 3x$$

$$x^3 - 3x + 1 = 0, \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

والآن يجب أن يستذكر الطلبة بأن أحد معايير الإنشاء، تبين بأن الجذور التي يمكن إنشاؤها ينبغي أن تكون بصيغة $a + b\sqrt{c}$ ، حيث a و b أعداد نسبية وأن c قابلة للإنشاء.

إن أول شيء بعد هذا علينا بيانه هو أن $x^3 - 3x + 1 = 0$ لا

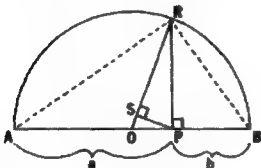
مقارنات المتوسطات

Comparing Means

98

Geometric Interpretation فإن التفسير الهندسي سيكون مناسباً في هذا المقام.

تأمل نصف الدائرة والتي قطرها $AOPB$ وفيها $AO \cong OB$ وأن $PR \perp APB$ (R تقع على نصف الدائرة). كذلك $PS \perp RSO$. افترض $AP=a$, $PB=b$.



بما أن:

$$RO = 1/2 AB = 1/2 (AP + PB) = 1/2 (a + b)$$

يمثل RO الوسط الحسابي (A.M.) بين a و b. تأمل المثلث قائم الزاوية $\triangle ARB$. بما أن $\triangle BPR \sim \triangle RPA$ ، فإن $\frac{PB}{PR} = \frac{PR}{AP}$ أو $PR = \sqrt{ab}$. وعليه فإن $(PR)^2 = (AP)(PB) = ab$ إذن PR هو الوسط الهندسي (G.M.) بين a و b.

وبما أن $\triangle RPO \sim \triangle RSP$ ، فإن $\frac{RO}{PR} = \frac{PR}{RS}$ وعليه $RS = \frac{(PR)^2}{RO}$. ولكن $(PR)^2 = ab$ و $RO = 1/2 AB = 1/2 (a + b)$ إذن $RS = \frac{ab}{1/2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$ والذي يعد الوسط التوافقي (H.M.) بين a و b.

إن هذا التفسير الهندسي يزودنا جيذاً لحد بعيد إلى مقارنة مقادير هذه المتوسطات الثلاثة. وبما أن وتر المثلث قائم الزاوية يعد أطول أضلاعه، في المثلث $\triangle ROP$ ، وفي المثلث $\triangle RSP$ ، فإن $RO > PR$ و $PR > RS$ وعليه فإن $RO > PR > RS$. ولكن بسبب وجود إمكانية بالنسبة لهذه المثلثات على الانحلال $RO \geq PR \geq RS$ والذي يدل ضمناً على أن $A.M. \geq G.M. \geq H.M.$

يمكن استخدام هذه الوحدة كجزء أساسي لدروس في مادة الإحصاء.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقارن الطلبة مقدار ثلاثة متوسطات لمدتين أو أكثر.
2. سيبرهن الطلبة علاقات المقارنة بين المتوسطات.

التقييم السابق Preassessment

بعد أن استعرض الطلبة المتوسطات الحسابية والهندسية، مع الطلبة يصفون h بدلالة a، و b، حيث تمثل a، و b، و h تتابعاً توافقياً Harmonic sequence.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابداً بتعريف المتوسطات الثلاثة (الحسابي، والتوافقي، والهندسي) بالأسلوب الآتي: افترض a، و m، و b عبارة عن تتابع حسابي. يطلق على الحد الوسط (m) اصطلاح الوسط الحسابي Arithmetic Mean. وبما أن a، و m، و b تمتلك فرقا مشتركاً

$$m - a = b - m \quad \text{وأن} \quad m = \frac{a+b}{2} = \text{الوسط الحسابي (A.M.)}$$

والآن، افترض a، و h، و b تمثل تتابعاً توافقياً. إن الحد الأوسط (h) يطلق عليه الوسط التوافقي Harmonic Mean. بما أن a، و h، و b تمتلك مقلوبات بفرق مشترك، $\frac{1}{h} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{h}$ وأن:

$$h = \frac{2ab}{a+b} = \text{الوسط التوافقي (H.M.)}$$

أخيراً، افترض a، و g، و b تمثل تتابعاً هندسياً. وبما أن كل من a، و g، و b تمتلك نسبة مشتركة $\frac{g}{a} = \frac{b}{g}$ ، وأن:

$$g = \sqrt{ab} = \text{الوسط الهندسي (G.M.)}$$

ونظراً لأن النموذج التصوري Pictorial Model غالباً ما

والذي يمثل الوسط التوافقي.

نظراً (مما ورد سابقاً) $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$

$$ab(a+b)^2 > (4ab)(ab)$$

$$\sqrt{ab} > \frac{2ab}{(a+b)} \text{ أو } ab > \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$$

إن $G.M. > H.M.$ (لاحظ إذا كان $a=b$ بعدئذ $G.M.=H.M.$).

التقييم اللاحق Postassessment

1. جد $A.M.$ ، $G.M.$ ، $H.M.$ لكل مما يأتي:
(أ) 20 و 60 (ب) 25 و 45 (ج) 3 و 15 و 45.
2. رتب $G.M.$ ، $H.M.$ ، $A.M.$ بترتيب تنازلي لمقاديرها.
3. بين أنه بالنسبة لعددتين معلومتين فإن $G.M.$ هو الوسط الهندسي بين $A.M.$ و $H.M.$.
4. برهن بأن $G.M. > H.M.$ بالنسبة لكل a ، b ، c .

مرجع Reference

Posamentier, A.S., and H.A. Hauptman, 101 Great Ideas for Introducing key Concepts in Mathematics, Thousand Oaks, CA: Corwin, 2001.

نظرية Theorem 2:

$$G.M. \geq H.M.$$

البرهان Proof:

بما أن $A.M. \geq G.M.$ بالنسبة لكل $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

عندما $\frac{1}{b} < 0$

$$\left[\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right]^{\frac{1}{b}} \leq \left[\frac{a_1^b + a_2^b + a_3^b + \dots + a_n^b}{n} \right]^{\frac{1}{b}}$$

خذ $b=1$ بعدئذ

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \geq \left[\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \right]^{-1}$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

أو $G.M. \geq H.M.$

مرة ثانية بالنسبة للعددتين a ، b ($a > b$) سيكون البرهان أكثر بساطة:

هرم باسكال

99

Pascal's Pyramid

التقييم السابق Preassessment

إذا كان طلبتك على معرفة كافية بمثلث باسكال، دعمه
ينجزون التوسعات الآتية:

$$(x+2y)^5 \quad (أ) \quad (a+b)^3 \quad (ب) \quad (a-b)^4 \quad (ج)$$

اسأل طلبتك اختبار عمليات ضربهم الجبرية بواسطة التقييم:

$$(a+b+c)^3 \quad (أ) \quad (a+b+c)^4 \quad (ب)$$

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ باستعراض مثلث باسكال. وتمتطع الإشارة إلى إن هذا المثلث لا يعود إلى باسكال بمفرده. كان المثلث بالحقيقة، معروف في الصين قبل عام 1300، وكان عمر الخيام، مؤلف الرباعيات،

إن القدرة على التوسيع والتعميم هي أكثر الأدوات المهمة التي يستطيع المعلم مساعدة الطلبة على تطويرها وتنميتها. تم في هذه الوحدة، توسيع التطبيق المعروف لمثلث باسكال في تحديد معاملات مفكوك متعدد الحدود " $(a+b)^n$ " باستخدام "هرم باسكال". لأخذ المعاملات $(a+b+c)$ بنظر الاعتبار.

أهداف الأداء Performance Objectives

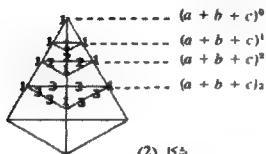
1. سيقوم الطلبة بتقييم مفكوكات ثلاثية Trinomial $(a+b+c)^n$ Exapnsions بأسي اقل.
2. سيكتشف الطلبة علاقات مهمة بين مثلث باسكال وهرم باسكال.

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 2 \ 2 \\
 1 \ 2 \ 1
 \end{array}$$

لحساب الحدود في داخل المثلث، اصف الحدود الثلاثة التي تقع فوقها، على سبيل المثال $(a+b+c)^3$ تمتلك المعاملات الآتية:

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 3 \ 3 \\
 3 \ 6 \ 3 \\
 1 \ 3 \ 3 \ 1
 \end{array}$$

أو بالرجوع إلى الهرم:



شكل (2)

ولتحديد هذه المعاملات للمتغيرات الصحيحة:

- (1) لتكن المعاملات في الصف الأول من الهرم "أ" إلى الأس الأعلى بذلك المفكوك،
 - (2) دع العناصر في الصف الثاني تكون معاملات حاصل ضرب "أ" إلى ثاني أعلى أس ومتغير آخر إلى الأس الأول.
 - (3) في الصف الثالث، قلل ثانية أس "أ" ورتب بقيمة المتغيرات الأصلي والذي يرفع إلى،
 - (4) في خلال كل صف تبقى أسس "أ" كما هي، بينما يقل أس "ب" من اليسار إلى اليمين، ويزداد أس "ج".
- تأمل، على وجه التحديد، $(a+b+c)^3$ والذي يمتلك ترتيب المعاملات:

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 3 \ 3 \\
 3 \ 6 \ 3 \\
 1 \ 3 \ 3 \ 1
 \end{array}$$

إن المفكوك التام سيكون بعدئذ:

$$a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$

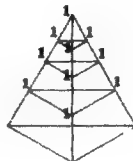
عند العمل مع هذه الأهرام سلاحظ الطلبة بأن حافة كل مثلث تقابل، بالضبط، صفاً بمثلث باسكال، يعني، حافة

على معرفة به قبل باسكال بـ 600 عام! إنا تركنا الدقة التاريخية جانباً. فإن كل صف في مثلث باسكال (أو الخيام، أو ينج هوي Ying Hui) ينتج عنه معاملات $(a+b)^n$.

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 1 \ 1 \\
 1 \ 2 \ 1 \\
 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\
 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\
 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (a+b)^0 \\
 (a+b)^1 \\
 (a+b)^2 \\
 (a+b)^3 \\
 (a+b)^4 \\
 (a+b)^5
 \end{array}$$

على سبيل المثال. لإيجاد $(a+b)^4$ استخدم المعاملات في الصف 5 بالمثلث: $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

في حين أن توسيع ذات الحدين يمكن تمثيله بواسطة مثلث منظور. فإن توسيع ثلاثي الحدود يمثل بهرم اشد تعقيداً. إن التوسيع الأول $(a+b+c)^0$ يمتلك معامل واحد 1 ونستطيع تخيله كراس للهرم. إن كل من التوسيعين التاليين يمكن بعدئذ وضعهما بقطع مثلثي في الهرم وبمعامل 1 عند كل رأس من رؤوسه.



شكل (1)

وعليه فإن كل حافة جانبية للهرم تتألف من تتابع من الوحدات، يمتلك المفكوك الثاني $(a+b+c)^1$ المعاملات $a+b+c$ ، والتي يمكن تمثيلها بالطبقة الأولى من المثلث وبمداخل مقدارها 1 عند الرؤوس،

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 1 \ 1
 \end{array}$$

هناك طريقتان لتوليد معاملات الأسس الأعلى بواسطة الهرم. في الأولى تأمل ثانية كل توسيع بوصفه مقطعا مثلثيا بالهرم. إن الأعداد على الحافات الخارجية لكل طبقة (الأعداد بين الرؤوس) يمكن الحصول عليها بإضافة العددين اللذين يقعان فوقهما مباشرة. على سبيل المثال. $2(a+b+c)$ يمتلك واحدات عند كل رأس، واثنان بينهما:

$$\#(N_r) = \frac{(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{r-1})!}{n_r!(n - n_1 - n_2 - \dots - n_r)!}$$

$$\text{وذلك لأن } n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n, \#(N_r) \dots 1, \frac{n_r!}{n_r! \cdot 0!} = 1$$

وباستخدام مبدأ العد بالنسبة لحالات r هذا، فإن عدد طرق ترتيب n من الحدود (وبتكرار r من الحدود) يمكن الحصول عليها:

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \dots 1$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_r!} = \binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots, n_r}$$

والذي يعد رمزا مناسباً للاستخدام في هذا المقام.

يجب أن يطبق الطلبة هذه الصيغة العامة على الحالة حيث $r=2$ ، وسوف يحصلون على:

$$\#C_{n1} \text{ وهو الحد المألوف } \binom{n}{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \binom{n_1}{n_1}$$

والآن، ينبغي أن يكون الطلبة على استعداد تام لمعالجة نظرية متعدد الحدود، فلقد طلب منهم في التقسيم السابق فك $(a+b)^4$. والآن يجب عليهم ملاحظة أن هناك بعض الحدود التي قد تظهر لأكثر من مرة. على سبيل المثال، الحد $aaab$ ، والذي يكتب غالباً بصيغة a^3b يظهر $\binom{4}{3}$ مرات. إن هذا يقابل عدد ترتيبات $aaab$. وبالنسبة لمثل هذا الحد فإن نفس القضية تنطبق على الدوام.

والآن يجب أن يأخذ الطلبة بنظر الاعتبار فك $(a+b+c)^4$. ولحساب هذا التوسيع فعلاً، يستطيع الطلبة ضرب تجمعات مختلفة لأعضاء كل عامل من العوامل للحصول على كل حد. على سبيل المثال، إن بعضاً من 81 حداً سوف يبدو كما يأتي: $cbcb, abab, abac, aabb, aaab, aaaa$ ، إن هذه الحدود تكتب غالباً بصيغة $a^4, a^3b, a^2b^2, a^2bc, b^2c^2$.

يظهر a^2b^2 في القائمة السابقة مرتين، ولكن في التوسيع التام (لـ 81 حداً) سوف يظهر $\binom{4}{2,2,0} = \frac{4!}{2!2!0!} = 6$ مرات. إذن إذا سئل طالب إيجاد معامل الحد $a^2b^2c^2$ في التوسيع $(a+b+c)^6$ ، سيقيم فقط بحساب $\frac{6!}{3!1!2!} = 60$ ، وعليه فإن التوسيع التام يمكن كتابته كما يأتي:

$$\#C_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

وسيكون الطلبة، بالوقت الحاضر، جاهزين لاعتبار المسألة الأصلية، بإيجاد عدد ترتيبات AAABBBCC.

ينبغي أن يرشد الطلبة بمعنىاً خلال التطوير الآتي:

دع $\#(A)$ تمثل "عدد طرق اختيار مواقع لحروف A". نظراً لوجود ثلاثة رموز A، ينبغي اختيار 3 مواقع من 8 مواقع.

يمكن أن يتم ذلك C_3^8 أو $\binom{8}{3}$ طرق. إذن $\#(A) = \binom{8}{3} + \frac{8!}{3!5!}$

بنفس الطريقة $\#(B) = \binom{5}{3} + \frac{5!}{3!2!}$ ، نظراً لأن 3 مواقع بالنسبة لرموز B ينبغي اختيارها من المواقع الخمسة المتبقية. إن هذا الأمر سيرتكب لنا موقعين لاختيارها لرموز C. ونظراً لبقاء موقعين فقط، فهناك طريقة واحدة لاختيار هذين الموقعين، يعني

$$\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{2!}{2!0!} = 1 \text{ وضع بأن } 0! = 1 \text{ في ضوء التعريف.}$$

باستخدام مبدأ العد، $\#(A \& B \& C) = \#(A) \cdot \#(B) \cdot \#(C)$

$$= \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$$

إن الصيغة الأخيرة يرمز لها غالباً بما يلي $\binom{8}{3,3,2}$ والتي تمثل عدد الطرق لترتيب ثمانية حدود تتألف من تكرارات 3 حدود، 3 حدود، و 2 حد.

لنميز فهم هذه القائمة، اسأل طلبتك تحديد عدد الطرق التي يمكن من خلالها ترتيب حروف كلمة Mississippi. إذا أخذنا بنظر الاعتبار التكرارات (يعني 4-S's, 2-P's, 1-M, 4-I's) سيحصل الطلبة على

$$\frac{11!}{1!1!10!9!8!7!6!5!4!3!3!2!} = 34,650$$

ينبغي أن يوجه الطلبة إلى تعميم هذا الأسلوب في عد لغاية n من الحدود، والتي تتضمن n_1 حداً من نوع ما، و n_2 حداً من نوع آخر، و n_3 حداً من نوع ثالث، ...، n_r حداً من آخر نوع. من الواضح أن $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r$. بتطبيق الأسلوب الذي ورد سابقاً، ينبغي أن تمثل $\#(N_1)$ "عدد الطرق التي يمكن خلالها اختيار n_1 مواقع من n مواقع المتوفرة". إذن

$$\#(N_1) = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}$$

و $\#(N_2) = \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}$ ، ونظراً لأن هناك $(n-n_1)$ من المواقع المتبقية والتي من خلالها سيتم اختيار مواقع n_2 . وبنفس الطريقة:

2. جد الحد في مفكوك:

$$(2x^2 + y^3 + \frac{1}{2}z)^7$$

والذي يحتوي على x^4 و z^4 . إن الحد العام للمفكوك

$$a+b+c=7 \text{ حيث } \binom{7}{a,b,c} (2x^2)^a (-y^3)^b (\frac{1}{2}z)^c$$

إن الحد الذي يحتوي على x^4 و z^4 فيه $a=2$, $c=4$, $b=1$.
بتعويضها في الحد العام أعلاه نحصل على:

$$\binom{7}{2,1,4} (2x^2)^2 (-y^3)^1 (\frac{1}{2}z)^4 = \frac{7!}{2!1!4!} (4x^4) (-y^3) (\frac{1}{16}z^4) \\ = \frac{-105}{4} x^4 y^3 z^4$$

التقييم اللاحق POSTASSESSMENT

1. ليقيم الطلبة بإيجاد معامل a^2b^3d في مفكوك

$$(a+b-c-d)^8$$

2. اسأل الطلبة ببيان كيفية اشتقاق معاملات أي حد من حدود

مفكوك متعدد الحدود.

3. ليقيم الطلبة بذلك $(2x+y^2-3)^5$.

$$(a+b+c)^4 = \sum_{n_1+n_2+n_3=4} \frac{4!}{n_1!n_2!n_3!} a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3}$$

من هنا فإن نظرية متعدد الحدود يمكن تتبعها بسهولة:

$$(a_1+a_2+a_3+\dots+a_r)^n = \sum_{n_1+n_2+n_3+\dots+n_r=n} \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_r!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_3^{n_3} \dots a_r^{n_r}$$

ورغم كونها مرهقة وثقيلة، فقد يرغب بعض الطلبة بالبرهنة

على هذه النظرية بواسطة الاستقراء الرياضي.

يظهر أدناه تطبيقان لنظرية متعدد الحدود.

1. قم بـك وتبسيط: $(2x+y-z)^3$

$$= \binom{3}{3,0,0} (2x)^3 (y)^0 (-z)^0 + \binom{3}{0,3,0} (2x)^0 (y)^3 (-z)^0 + \binom{3}{0,0,3} (2x)^0 (y)^0 (-z)^3 \\ + \binom{3}{2,1,0} (2x)^2 (y)^1 (-z)^0 + \binom{3}{2,0,1} (2x)^2 (y)^0 (-z)^1 + \binom{3}{1,1,1} (2x)^1 (y)^1 (-z)^1 \\ + \binom{3}{0,2,1} (2x)^0 (y)^2 (-z)^1 + \binom{3}{0,1,2} (2x)^0 (y)^1 (-z)^2 \\ + \binom{3}{1,0,2} (2x)^1 (y)^0 (-z)^2$$

$$(2x+y-z)^3 = 8x^3+y^3-z^3+12x^2y-12x^2z+6xy^2+6xz^2-12xyz-3y^2z+3yz^2$$

حل جبري لمعادلات تكعيبية

Algebraic Solution of Cubic Equations



أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء بعض المعادلات التكعيبية، سيقوم الطلبة بإيجاد حلولها.

2. بإعطاء مسألة حرفية والتي تتطلب حلاً لمعادلة تكعيبية، سيقوم

الطلبة بإيجاد الحلول الحقيقية (حيثما تطلب ذلك) للمسألة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد أتقنوا العمليات مع المعادلات التربيعية، كذلك ينبغي أن يكون لديهم خلفية جيدة في الأعداد المركبة وحساب الثلاث.

يعود اهتمام الإنسان بالمعادلات التكعيبية إلى العصور الغابرة حيث البابليين القدماء حوالي 1800-1600 ق.م. ولكن، الحل الجبري لمعادلات الدرجة الثالثة هو أحد نتاجات عصر النهضة الإيطالية.

لهذا فإن حل المعادلات التكعيبية يترافق مع أسماء رياضيين طليان لامعين مثل: سكيبيون ديل فيرو Scipione del Ferro، ونيقولودي بريشيا Nicolo de Brescia (يعرف باسم تارتاجليا Tartaglia)، وجيرولامو كاردان Girolamo Cardan، وأخيراً رافائيل بومبيلي Rafael Bombelli.

وعليه فإن الجذور الثلاثة للواحد هي: 1، و α ، و α^2 ، حيث يمكن أن تكون $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ أو $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$.

مثال 2 Example 2:

جد الجذور التكعيبية للعدد الحقيقي a . ولدينا $a = a(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$ ، وعليه فإن

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{2k\pi}{3} - i \sin \frac{2k\pi}{3} \right) \quad \text{حيث } k=0,1,2$$

ولكن، $\cos \frac{2k\pi}{3} - i \sin \frac{2k\pi}{3}$ حيث $k=0,1,2$ سوف يعطي ثلاثة جذور للواحد (انظر مثال 1). إذن، إذا كان الجذر

الحقيقي لـ a هو a' ، فإن الجذور الثلاثة لـ a ستكون: a' ،

$$a'\alpha^2، a'\alpha، \text{ حيث تكون } \alpha \text{ أما } \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ أو } -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

والآن دعنا نأخذ بنظر الاعتبار المعادلة التكعيبية العامة:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

حيث تمثل a ، b ، c ، و d أعداداً مركبة اختيارية arbitrary ويمكن أن تختصر هذه المعادلة إلى صيغة أبسط دون الحد الثاني،

وذلك عن طريق إجراء التحويل $x = y - \frac{b}{3a}$ ، وسيكون لدينا:

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

$$a\left(y^3 - \frac{b}{a}y^2 + \frac{b^2}{3a^2}y - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(y^2 - \frac{2b}{3a}y + \frac{b^2}{9a^2}\right) + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

وسيكون لدينا،

$$ay^3 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)y + \left(-\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0$$

والآن إذا أجرينا الآتي:

$$\frac{-b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = d' \quad \text{وأن} \quad \frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c = c'$$

وستصبح المعادلة $ay^3 + c'y + d' = 0$

ولتجنب الكسور في حل هذه المعادلة، قمنا بتقسيمها على a ،

$$y^3 + 3py + 2q = 0 \quad \text{وكتابتها بالأسلوب الآتي:}$$

يطلق على المعادلة الأخيرة اسم "المعادلة التكعيبية

المختصرة"، وكما بيينا سابقاً، فإن أي معادلة تكعيبية يمكن

اختصارها إلى هذا الشكل.

لحل المعادلة المختصرة، تم اعتبار المتطابقة الآتية:

$$(a+b)^3 - 3ab(a+b) - (a^3+b^3) = 0$$

وإذا قورن التماثل بالمعادلة المختصرة، سيكون لدينا:

$$a^3 + b^3 = -2q, \quad ab = -p, \quad a+b = y$$

بأن علينا إيجاد قيمتي a و b فقط لإيجاد y . ويمكن إنجاز ذلك

بحل نظام المعادلات:

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استعرض جذور الأعداد المركبة بالأسلوب الآتي:

يمكن الحصول على الجذر النوني n th للعدد المركب z عن

طريق الجذر النوني للقيمة المطلقة Absolute Value، r ،

وتقسيم النطاق ϕ بواسطة n . إن هذه العملية سوف تمنحك القيمة

الرئيسية للجذر. إن الصيغة العامة للحصول على جميع جذور z

هي:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right]$$

وبالنسبة لـ $k=0$ ، فإن هنا ينتج القيمة الرئيسية، أما بالنسبة

لقيم $k=1,2,3,\dots,n-1$ سنحصل على بقية الجذور.

مثال 1 Example 1:

جد جذور مكعب الواحد. لدينا:

$$1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ, \quad \text{وعليه } \phi = 0^\circ, \quad \text{وأن } r=1. \text{ يعدنث ستكون}$$

$$\text{الصيغة العامة } z = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \quad \text{حيث } k=0,1,2.$$

إذا كانت $k=0$ ، $z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$ (القيمة الرئيسية)

وإذا كانت $k=1$ ،

$$z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$$

$$= -\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

إذا كانت $k=2$ ،

$$z_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ$$

$$= -\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

لاحظ بأن كل من الجذور المركبة للواحد تولد الجذر الآخر.

ولإجراء ذلك، سيكون علينا أخذ الأس الثاني والثالث لهذه

الجذور فقط على سبيل المثال، إذا أخذنا

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \text{سنحصل على:}$$

$$z_2^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = z_3, \quad \text{وإن: } z_2^2 = z_3.$$

$$z_3^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$$

وبنفس الطريقة،

$$z_3^2 = z_2, \quad \text{وإن: } z_3^2 = z_2.$$

$$z_1^2 = 1, \quad \text{وإن: } z_1^2 = 1.$$

هذه المعادلة لاستبعاد الحد ذي الدرجة الثانية. إن عملية

التحويل هي: $x = y - \frac{b}{3a}$. في هذا المثال ستكون $b=3$, $a=-1$

وعلية ستكون $d=13$, $c=9$. إذن $x = y - \frac{3}{3(-1)} = y - 1$

بتعويض $(y-1)$ بدلا من x في المعادلة

$$(y-1)^3 + (y-1)^2 + 9(y-1) - 13 = 0$$

أو

$$(y^3 - 3y^2 + 3y - 1) + (y^2 - 2y + 1) + 9(y - 1) - 13 = 0$$

وعليه فإن المعادلة $y^3 - 6y^2 - 20y + 20 = 0$ هي المعادلة المختصرة من أجل

ذلك ستكون

$$p^3 = 8, p = 2, 3p = 6, q^3 = 100, q = -10, 2q = 20$$

إذن $\sqrt{p^3 + q^3} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ وأن

$$a = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{3})^3} = 1 + \sqrt{3}$$

$$b = \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{1 - 3\sqrt{3} + 9 - 3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(1 - \sqrt{3})^3} = 1 - \sqrt{3}$$

بعدئذ ستكون حلول المعادلة المختصرة كما يأتي:

$$y_1 = a + b = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) = 2$$

$$y_2 = ad + ba^2 = (1 + \sqrt{3})\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + (1 - \sqrt{3})\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + 3i$$

$$y_3 = aa^2 + ba = (1 + \sqrt{3})\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + (1 - \sqrt{3})\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - 3i$$

ولكن $x = y - 1$ إذن

$$x_1 = y_1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$x_2 = y_2 - 1 = -1 + 3i - 1 = -2 + 3i$$

$$x_3 = y_3 - 1 = -1 - 3i - 1 = -2 - 3i$$

إذن، في هذا المثال، كان لدينا بالحلول جذر حقيقي واحد،

وجذري مرافق عدد مركب.

لقد درسنا في هذه الوحدة (وهي الوحدة الأولى بين وحدتين)

الحل العام للمعادلة التكعيبية. وفي الثانية، سوف نقوم بدراسة

حالات مختلفة، قابلة للاختصار وغير قابلة له، في حل

المعادلات باستخدام صيغة كاردان.

التقييم اللاحق Postassessment

إن الطلبة الذين أوفوا بمتطلبات أهداف الأداء، ينبغي أن

يكونوا قادرين على إنجاز الأمثلة الآتية:

$$1. \text{ جد جذور المعادلة } x^3 + 6x^2 + 17x + 18 = 0$$

$$2. \text{ حل المعادلة: } x^3 - 11x^2 + 35x - 25 = 0$$

$$3. \text{ جد حل المعادلة } x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$a^3b^3 = -p^3 \quad ab = -p$$

أو

$$a^3 + b^3 = -2q \quad a^3 + b^3 = -2q$$

ومن المعادلة الثانية سيكون لدينا $b^3 = -2q - a^3$ ، وبتعويض

هذه القيمة في المعادلة الأولى، سيكون $a^3(2q + a^3) = -p^3$ ، وعليه

فإن $a^6 + 2a^3q - p^3 = 0$. إذا جعلنا $a^3 = v$ ، سنحصل على المعادلة

$$v^2 + 2qv - p^3 = 0$$

التربيعية الآتية $v^2 + 2qv - p^3 = 0$

إن جذري هذه المعادلة التربيعية هي:

$$v_1 = -q + \sqrt{q^2 + p^3}$$

$$v_2 = -q - \sqrt{q^2 + p^3}$$

ونظرا لوجود تناظر بكل من a و b في نظام المعادلات، نستطيع

أخذ v_1 أو v_2 لكي تكون a^3 أو b^3 بصورة اختيارية، لذا:

$$b^3 = -q - \sqrt{q^2 + p^3} \quad \text{وأن} \quad a^3 = -q + \sqrt{q^2 + p^3}$$

وعليه فإن $a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$ وأن

$$b = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

ولكن $y = a + b$ ، إذن:

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

والتي نطلق عليها صيغة كاردان Cardan's Formula للمكعب.

وبما أن كل من a^3 و b^3 تمتلك ثلاثة جذور، يبدو بأن تلك

المعادلة تمتلك تسعة جذور.

ولكن ليست هذه هي السألة، لأنه بسبب $ab = -p$ ، فإن الجذور

التكعيبية لكل من a^3 و b^3 ينبغي أن تؤخذ على شكل أزواج

بحيث أن حاصل ضربها (وهو ab) ويكون عددا نسبيا $-p$.

والآن، نحن على علم بأن جذور a^3 التكعيبية هي: a (القيمة

الرئيسية)، $a\alpha$ ، $a\alpha^2$ ، حيث تمثل α أحد الجذور المركبة للواحد.

بنفس الطريقة، فإن جذور b^3 التكعيبية هي: b ، $b\alpha$ ، $b\alpha^2$.

ولكن، إذا كان من الضروري أن يكون حاصل ضرب a و b

عددا نسبيا، سيكون لدينا الحلول الوحيدة المتاحة: (a, b) ،

$(a\alpha, b\alpha^2)$ ، لأن:

$$ab = -p$$

$$a\alpha \cdot b\alpha^2 = ab\alpha^3 = ab = -p \quad (\alpha^3 = 1)$$

$$a\alpha^2 \cdot b\alpha = ab\alpha^3 = ab = -p$$

وعليه فإن قيم y هي: $a\alpha^2 + b\alpha$

$$a + b, \quad a\alpha + b\alpha^2$$

ولكن $x = y - \frac{b}{3a}$ ، وعليه فإن جذور المعادلة التكعيبية سيكون

إيجادها متى علمنا قيمة y .

مثال 3 Example:

حل المعادلة $x^3 + 3x^2 + 9x^2 - 13 = 0$ ، أولا، يجب أن نختر

حل معادلات تكعيبية

Solving Cubic Equations



يبدو واضحاً من صيغة كاردان، بأن طبيعة الحلول سوف تعتمد على قيمة q^2+p^3 والتي من أجل هذا السبب أطلق عليها مميزات الكعب Discriminant. وقد أطلق هذا الاسم، لأن q^2+p^3 الموجودة تحت الجذر التربيعي سوف ينتج عنها قيمة حقيقية أو خيالية في ضوء إشارة المجموع q^2+p^3 .

وقبل مناقشة المميز، سيكون من المفيد إعادة كتابة حلول المعادلة المختصرة بالأسلوب الآتي:

$$y_1 = a + b; y_2 = a\alpha + b\alpha^2 = a\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + b\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right);$$

$$y_3 = a\alpha^2 + b\alpha = a\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + b\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

وبالتبسيط:

$$y_1 = a + b; y_2 = -\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{3}i; y_3 = -\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sqrt{3}i$$

والآن دعنا نتأمل المميز q^2+p^3 .

(أ) إذا كان $q^2+p^3 > 0$ ، وأن كل من a و b يمتلكان قيمة حقيقية واحدة، بعدئذ سننتج أن a و b سيكونان حقيقيين أيضاً. وهكذا، سيكون كل من $a+b$ ، $a-b$ حقيقيين أيضاً. وعليه سيكون لدينا، إذا كان $a+b=m$ وأن $a-b=n$ ، وأن حلول المعادلة المختصرة هي:

$$y_1 = a + b = m; y_2 = -\frac{m}{2} + \frac{n}{2}\sqrt{3}i; y_3 = -\frac{m}{2} - \frac{n}{2}\sqrt{3}i$$

إن، إذا كان $q^2+p^3 > 0$ ، سيكون لدينا جذر حقيقي واحد، وجذري مرافق تخيلي.

مثال 1 Example

حل المعادلة $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$. بداية يجب أن نستبدل الحد الرابع، وستكون عملية التحويل لهذا المثال:

$$x = y - \frac{B}{3A} = y - \frac{-6}{3} = y + 2$$

إن، بالتعويض بـ $y+2$ بدلا من x في المعادلة:

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 10(y+2) - 8 = 0$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + 10y + 20 - 8 = 0$$

$$y^3 - 2y - 4 = 0 \text{ (المعادلة المختصرة)}$$

في أولى وحدتين حول المعادلات التكعيبية، قمنا بدراسة الحل العام للكعب. وفي هذه (الثانية)، ستقوم بدراسة حالات متعددة، قابلة للاختصار وغير قابلة له، في حل المعادلات باستخدام صيغة كاردان.

هدف الأداء Performance Objective

1. بإعطاء بعض المعادلات التكعيبية، سيقوم الطلبة بتحليلها لمعرفة طبيعة الحلول التي سيحصلون عليها عندما ستحل هذه المعادلة.
2. سيقوم الطلبة بحل معادلات تكعيبية معلومة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد اتقنوا العمليات مع الأعداد المركبة والمعادلات التربيعية. كذلك ينبغي أن يكون لديهم خلفية جيدة في حساب المثلثات.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استعرض محتويات الوحدة السابقة حول المعادلات التكعيبية بالأسلوب الآتي: لديك معادلة تكعيبية عامة $AX^3 + BX^2 + CX + D = 0$ ، وتوفر دائماً إمكانية إلغاء حد الدرجة الثانية بإجراء التغييرات على المتغيرات $x = y - \frac{B}{3A}$. إن عملية التحويل هذه سوف تؤدي بنا إلى معادلة بصيغة $y^3 + 3py + 2q = 0$ ، والتي يطلق عليها المعادلة التكعيبية المختصرة أو القياسية.

يمكن الحصول على حل المعادلة المختصرة بواسطة صيغة كاردان، $y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$ ، إذا كان $b = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$ و $a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$ ، وستكون جذور المعادلة التكعيبية المختصرة $y_1 = a + b$ ، $y_2 = a\alpha + b\alpha^2$ ، $y_3 = a\alpha^2 + b\alpha$ حيث $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $\alpha^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

ومنى وجدت قيم y_1 ، y_2 و y_3 ، سيمكن الحصول على حل المعادلة التكعيبية العامة باستخدام التحويل $x = y - \frac{B}{3A}$.

هذا المثال تتوفر لدينا المعادلة المختصرة، لذا:

$$p^3 = -64 \quad \text{وأن} \quad 3p = 12 \Rightarrow p = 4$$

$$q^2 = 64 \quad \text{وأن} \quad 2q = 16 \Rightarrow q = 8$$

إن $q^2 + p^3 = 64 - 64 = 0$. وهذا يعني بأن الحل سوف يحوي على ثلاثة جذور حقيقية، اثنان منهما متساويين.

وستكون قيم a و b كما يأتي:

$$a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$b = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

لأن الجذور هي:

$$y_1 = a + b = -4$$

$$y_2 = a\alpha + b\alpha^2 = -2(\alpha + \alpha^2) = -2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2$$

$$y_3 = a\alpha^2 + b\alpha = -2(\alpha + \alpha^2) = -2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2$$

ج) إذا كانت $q^2 + p^3 < 0$ ، سيكون كل من a ، b أعداداً مركبة لأن الجذر التربيعي للمميز سيكون سالبا في هذه الحالة. وعليه، إذا كانت قيم $a = M + Ni$ ، $b = M - Ni$ ، وستكون حلول المعادلة المختصرة كما يأتي:

$$y_1 = a + b = 2M$$

$$y_2 = -\frac{2M}{2} + \frac{2Ni}{2}\sqrt{3}i = -M - \sqrt{3}N$$

$$y_3 = -\frac{2M}{2} - \frac{2Ni}{2}\sqrt{3}i = -M + \sqrt{3}N$$

والتي تمتاز بكونها جذورا حقيقية وغير متساوية. ولكن، لا يوجد ثمة طريقة حسابية عامة، أو جبرية لإيجاد القيمة المبسطة للجذور التكعيبية للأعداد المركبة. وعليه ستكون فائدة صيغة كاردان محدودة في هذه الحالة، ولأجل هذا السبب يطلق عليها الحالة غير القابلة للاختصار Irreducible case.

يمكن الحصول على حل هذه الحالة باستخدام حساب المثلثات.

إن، عندما تكون صيغة كاردان لها الشكل:

$$y = \sqrt[3]{u + vi} + \sqrt[3]{u - vi}$$

فنطلق،

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\theta = \frac{u}{v}$$

وعليه فإن الجذور التكعيبية لهم ستكون:

$$y = \sqrt[3]{r} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{3} + i \frac{\sin \theta + 2k\pi}{3} \right] + \sqrt[3]{r} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{3} - i \frac{\sin \theta + 2k\pi}{3} \right]$$

$$\sqrt[3]{r} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{3} - i \frac{\sin \theta + 2k\pi}{3} \right]$$

إن،

$$p^3 = -\frac{8}{27} \quad \text{و} \quad p = -\frac{2}{3} \quad \text{،} \quad 3p = -2$$

$$q^2 = 4 \quad \text{و} \quad q = -2 \quad \text{،} \quad 2q = -4$$

$$q^2 + p^3 = 4 - \frac{8}{27} = \frac{100}{27} > 0$$

إن، نعلم أن في الحل أحد الجذور يجب أن يكون حقيقيا، والآخران تخيليين مترافقين. وقيم كل من a و b هي:

$$a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{100}{27}}} = \sqrt[3]{2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}}$$

$$b = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{100}{27}}} = \sqrt[3]{2 - \frac{10}{3\sqrt{3}}}$$

وبالتبسيط:

$$a = \sqrt[3]{\frac{6\sqrt{3} + 10}{3\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} + 1}{\sqrt{27}}} = \sqrt[3]{\frac{(3 + i)^3}{\sqrt{27}}}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{6\sqrt{3} - 10}{3\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} - 1}{\sqrt{27}}} = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3} - i)^3}{\sqrt{27}}}$$

$$a = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad b = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3}}$$

وعليه فإن الحلول المختصرة للمعادلة تصبح:

$$y_1 = a + b = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3}} = 2$$

$$y_2 = a\alpha + b\alpha^2 = \left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$y_3 = a\alpha^2 + b\alpha = \left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

وبالتبسيط:

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -1 + i, \quad y_3 = -1 - i$$

وعليه فإن حلول المعادلة العامة هي:

$$x_1 = y_1 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$x_2 = y_2 + 2 = -1 + i + 2 = 1 + i$$

$$x_3 = y_3 + 2 = -1 - i + 2 = 1 - i$$

ب) إذا كانت $q^2 + p^3 = 0$ ، فإن a ، b متساويين، لذا فإذا كانت m تمثل القيمة الحقيقية المشتركة لـ a و b ، سيكون لدينا:

$$y_1 = m + m = 2m$$

$$y_2 = -\frac{m + m}{2} + \frac{m - m}{2}\sqrt{3}i = -m$$

$$y_3 = -\frac{m + m}{2} + \frac{m - m}{2}\sqrt{3}i = -m$$

إن، سيكون لدينا في هذه الحالة بأن جميع الجذور حقيقية، وأن اثنان منها متساويين.

مثال 2 Example: جد جذور المعادلة $x^3 - 12x + 16 = 0$.

وعليه

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

إذن، الجذور هي:

$$x_1 = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3} = 1 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = 2\sqrt{2}(\cos 135^\circ) = 2\sqrt{2}(-\cos 45^\circ)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$$

$$x_3 = 2\sqrt{2}(\sin 15^\circ) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3} = 1 + \sqrt{3}$$

إن الحالات القابلة للاختصار يمكن أن توظف مساعدة حساب المثلثات.

التقييم اللاحق POSTASSESSMENT

إن الطلبة الذين أوفوا بأهداف الأداء ينبغي أن يكونوا قادرين على إنجاز التمارين الآتية: حلل ثم بعدئذ حل المعادلات التكبيئية الآتية:

- 1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
- 2) $x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = 0$
- 3) $x^3 - 75x + 250 = 0$
- 4) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

حيث $k=0, 1, 2$

وإذا بسطنا هذا التعبير نحصل على:

$$y = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{3}$$

حيث $k=0, 1, 2$

وعليه فإن الجذور الثلاثة هي:

$$y_1 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\theta}{3}; \quad y_2 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\theta + 2\pi}{3};$$

$$y_3 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\theta + 4\pi}{3}$$

مثال 3 Example:

حل المعادلة $x^3 - 6x - 4 = 0$

من هذه المعادلة، سيكون لدينا $3p = -6$ وأن $2q = -4$ ، وعليه $p^3 = -8$ ، $q^2 = 4$ ، $p^3 + q^2 = -4$ وأن $\sqrt{p^3 + q^2} = 2i$.
بعدئذ سيكون الحل: $y = \sqrt{2 + 2i} + \sqrt{2 - 2i}$ ، إذن

$$r = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}, \quad \tan \theta = \frac{2}{2}, \quad \tan \theta = 1,$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

من أجل هذا فإن جذور المعادلة هي:

$$x_1 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\theta}{3} = 2\sqrt[3]{\sqrt{8}} \cos \frac{\pi}{12} = 2\sqrt{2} \cos 15^\circ$$

$$x_2 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\theta + 2\pi}{3} = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi/4 + 2\pi}{3} = 2\sqrt{2} \cos 135^\circ$$

$$x_3 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\theta + 4\pi}{3} = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi/4 + 4\pi}{3} = 2\sqrt{2} \cos 225^\circ$$

ولكن،

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\sin \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

حساب مجاميع السلاسل المنتهية

Calculating Sums of Finite Series

103

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \end{aligned}$$

نطلق على هذا المجموع "سلسلة منتهية" لعناصر التتابع S_n, u_n, \dots, u_1 يصف المجموع الكلي لهذه العناصر. على سبيل المثال، إذا كان لدينا التتابع 1, 2, 3, 4، فإن السلسلة هي $1+2+3+4 = S_4$ وأن المجموع هو 10.

إن هذا المثال يعد مثالا بسيطا، ولكن إذا أخذنا بنظر الاعتبار "n" ومن الحدود 1, 2, 3, 4, ..., n، بدلا من أربعة حدود فحسب، قلن تكون عملية إيجاد مجموعهم بالأمر السهل $S_n = 1+2+3+\dots+n$. في بعض الأحيان، هناك طرق سهلة لحساب مجموع سلسلة محددة، ولكننا لا نستطيع تطبيق تلك الطريقة بذاتها على جميع السلاسل. على سبيل المثال، فإن السلسلة السابقة، $1+2+3+\dots+n$ ، يمكن حسابها باستخدام حيلة بارة:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \\ 1+2 &= 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} \\ 1+2+3 &= 6 = \frac{3 \cdot 4}{2} \\ &\dots\dots\dots \\ 1+2+3+\dots+n &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

والذي يمثل المجموع الكلي للسلسلة. وهذا يعني إذا أردنا حساب مجموع السلسلة $1+2+3+\dots+10$ سيكون لدينا:

$$S_{10} = \frac{10(10+1)}{2} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

لا نستطيع تطبيق هذه الحيلة على كل سلسلة، وعليه، يجب علينا إيجاد طريقة أكثر شمولاً تتيح لنا إمكانية حساب مجموع بضعة سلاسل، وستقدم النظرية الآتية الطريقة المذكورة:

أضحى الاستقراء الرياضي راسخا تماما في مناهج المدارس الثانوية. وتوفر الكثير من الكتب المدرسية مجموعة متنوعة من التطبيقات على تقانة هذا النوع من البرهان. إن أكثر التطبيقات شيوعا هي تلك التي تهتم بالبرهنة على أن سلسلة محددة تمتلك صيغات معلومة كمجاميع. ورغم أن معظم الطلبة ينجزون البرهان بالإطار المطلوب، لكن بعضهم قد يتساءل عن كيفية الحصول على مجموع سلسلة محددة. وستزودك هذه الوحدة بإجابة لطلب الطالب باشتقاق صيغ لمجاميع سلاسل محددة.

هدف الأداء Performance Objective

1. بإعطاء بعض السلاسل المنتهية، سيقوم الطلبة بإيجاد مجاميعها.
2. سيقوم الطلبة بتطوير صيغ لحساب مجموع مجموعة متباينة من السلاسل المنتهية.

التقييم السابق Pressment

ينبغي أن يكون الطلبة قد أتقنوا العمليات مع الصيغات الجبرية، والدوال، ومفاهيم التتابع المنتهية، والسلاسل.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استعرض مفاهيم التتابعات والسلاسل بالأسلوب الآتي:
التتابع المنتهية Finite Sequence هو عبارة عن مجموعة منتهية من الحدود أو العناصر المرتبة، يرتبط كل منها بواحد أو أكثر من العناصر السابقة بطريقة محددة بشكل من الأشكال.

أمثلة Examples:

1. 1, 3, 5, 7, ..., 19
2. $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin 20x$
3. 2, 4, 6, 8, ..., 2n

والآن دعنا نتأمل أي تتابع متناه للعناصر u_1, u_2, \dots وسنجد بأننا نستطيع الحصول على المجاميع الجزئية الآتية:

نظرية Theorem: دعنا نأخذ بنظر الاعتبار سلسلة منتهية $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$. إذا استعملنا إيجاد دالة $F(n)$ بحيث أن $u_n = F(n+1) - F(n)$ ، بعدئذ سيكون:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = F(n+1) - F(1)$$

البرهان Proof:

لدينا بواسطة الفرضية:

وعليه، $u_n = F(n+1) - F(n)$ ، إذا قمنا بتطبيقها بالنسبة لكل مما يأتي $n-1, n-2, \dots, 2, 1$ سوف نحصل على العلاقات الآتية:

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & F(n+1) - F(n) \\ u_{n-1} & = & F(n) - F(n-1) \\ u_{n-2} & = & F(n-1) - F(n-2) \\ \vdots & & \vdots \\ u_2 & = & F(3) - F(2) \\ u_1 & = & F(2) - F(1) \end{array}$$

إذا قمنا الآن بإضافة هذه العلاقات، سوف نحصل على: $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = F(n+1) - F(1)$ والذي يبرهن على صحة النظرية.

وقبل أن نجعل الطلبة يباشرون العمل على التطبيقات، دعهم يتأملون الأمثلة الآتية:

1. جد مجموع السلسلة $1+2+3+\dots+n$. نظراً لكون $u_n = n$ ، سوف نأخذ بنظر الاعتبار $F(n) = An^2 + bn + c$ (يجب استخدام متعدد حدود يزيد بدرجة واحدة عن u_n). وعليه فإن $F(n+1) = A(n+1)^2 + b(n+1) + c$. وفي ضوء النظرية المذكورة أعلاه، يجب أن يكون لدينا:

$$\begin{aligned} u_n &= F(n+1) - F(n) \\ n &= [A(n+1)^2 + b(n+1) + c] - [An^2 + bn + c] \\ n &= 2An + (A+B) \end{aligned}$$

وعليه. بحساب معاملات أسس n ، سنحصل على: $2A=1$ ، $A+B=0$. يحل هاتين المعادلتين أننا سيكون لدينا: $\frac{1}{2}$. $A = \frac{1}{2}$ ، $B = -\frac{1}{2}$ ، من أجل هذا، $F(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + C$ ، $F(1) = C$ ولن $F(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) + C$. إذن.

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+n &= F(n+1) - F(1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

2. جد مجموع السلسلة: $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$. بما أن $u_n = n^2$ سوف نأخذ بنظر الاعتبار

$F(n) = An^3 + Bn^2 + Cn + D$ (درجة واحدة أعلى من u_n). نظراً لأن الأس لـ $F(n)$ سوف يبطل في $F(n+1) - F(n)$ ، إذن، $F(n+1) = A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1) + D$ ، والآن

$$\begin{aligned} u_n &= n^2 = F(n+1) - F(n) \\ n^2 &= [A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1) + D] - [An^3 + Bn^2 + Cn + D] \\ n^2 &= 3An^2 + (3A+2B)n + (A+B+C) \end{aligned}$$

بمساواة معاملات أسس n ، نحصل على: $3A=1$ ، $3A+2B=0$ وأن $A+B+C=0$ ثم نقوم بحل هذه المعادلات

$$\begin{aligned} C &= 1/6, B = -1/2, A = 1/3 \\ \text{أنها نحصل على: } & \\ \text{إذن،} & \\ F(n) &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + D \\ F(n+1) &= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) + D \\ F(1) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + D = D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 &= F(n+1) - F(1) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

3. جد مجموع السلسلة $1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3$ ، بما أن u_n هي من الدرجة الثالثة، فإن

$$\begin{aligned} F(n) &= An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E \\ \text{وأن} & \\ F(n+1) &= A(n+1)^4 + B(n+1)^3 + C(n+1)^2 + D(n+1) + E \\ \text{وإن} & \\ u_n &= (2n-1)^3 = F(n+1) - F(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1 &= \\ 4An^3 + (6A+3B)n^2 + (4A+3B+2C)n + (A+B+C+D) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{وبمساواة المعاملات، نحصل على:} & \\ B &= -8, \text{ وأن } 6A+3B = -12, \text{ وأن } A=2, \\ D &= -6, \text{ وأن } 4A+3B+2C = -6, \text{ وأن } A+B+C+D = -1, \\ \text{وعليه فإن،} & \\ F(n) &= 2n^4 - 8n^3 + 11n^2 - 6n + E \\ F(n+1) &= 2(n+1)^4 - 8(n+1)^3 + 11(n+1)^2 - 6(n+1) + E \\ \text{وأن } F(1) &= -1 + E \text{، إذن} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3 &= F(n+1) - F(1) \\ &= 2(n+1)^4 - 8(n+1)^3 + 11(n+1)^2 - 6(n+1) + E - (-1+E) \\ &= 2n^4 - n^2 = n^2(2n^2-1) \end{aligned}$$

4. جد مجموع السلسلة:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

بعد ممارسة تدريب ومران كاف ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على إيجاد $F(n)$ بسهولة أكبر.

التقييم اللاحق Postassessment

إن الطلبة الذين استوفوا بمتطلبات أهداف الأداء، يجب أن يكون قادرين على إنجاز التمارين الآتية:

1. جد مجموع السلسلة $1 + 8 + 27 + \dots + n^3$
2. جد مجموع السلسلة $1/5 + 1/25 + 1/125 + \dots + 1/5^n$
3. جد الصيغة الخاصة بمجموع متوالية حسابية منتهية.

دعنا نأخذ بنظر الاعتبار $F(n) = \frac{A}{2^n}$ وعليه فإن

$$F(n+1) = \frac{A}{2^{n+1}} \text{ وبما أن } u_n = F(n+1) - F(n) \text{ إذن}$$

$$\frac{1}{2^n} = \frac{A}{2^{n+1}} - \frac{A}{2^n}.$$

وعليه فإن $F(n+1) = -\frac{1}{2^n}$ ، وأن $F(1) = -1$. من أجل هذا،

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = F(n+1) - F(1) = -\frac{1}{2^n} + 1 = 1 - \frac{1}{2^n}$$

صيغة عامة لمجموع سلسلة بصيغة $\sum_{t=1}^n t^r$

A General Formula

for the Sum of Series of the Form $\sum_{t=1}^n t^r$

الآتي، إن السلسلة هي عبارة عن عناصر بتتابع محدد. على سبيل المثال، إذا كان لدينا تتابع من العناصر $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ، فإن هذه السلسلة يمكن أن تمثل أيضاً بالرمز $\sum_{t=1}^n u_t$ ، إذن،

$$\text{الرمز } \sum_{k=1}^n k^2 \text{ يعني: } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

إن مثالاً آخر للسلسلة هو الذي يتمثل

$$\sum_{i=1}^k \left(\begin{array}{c} \\ \end{array} \right) \quad \text{بواسطة}$$

بعد حساب مجموع السلسلة المتقاربة Convergent من الموضوعات المهمة. ولكن لا يوجد ثمة صيغة عامة لحساب مجموع أي من السلاسل المتقاربة.

ستزودك هذه الوحدة بصيغة عامة لحساب مجموع سلسلة

$$\text{من نوع محدد } \sum_{t=1}^n t^r.$$

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء بضعة سلاسل منتهية بصيغة $\sum_{t=1}^n t^r$ ، ستقوم الطلبة

بإيجاد مجموعها.

2. سيعرض الطلبة فهماً للتقانة المستخدمة في إيجاد صيغ عامة لسلسلة خاصة ومحددة.

التقييم السابق Preassment

ينبغي أن تكون لدى الطلبة معرفة جيدة بنظرية ذات الحدين، ومستوى مقبول من المعرفة بالسلاسل والجبر الخطي الأولي.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استعرض مبدأ السلاسل، ونظرية ذات الحدين بالأسلوب

وعليه في معادلة (1) سيكون لدينا،

$$n^r = \sum_{k=0}^{r+1} b_k \left[\sum_{m=1}^k \binom{k}{m} n^{k-m} \right]$$

ستؤدي هذه المعادلة إلى المنظومة الآتية من المعادلات

$$\binom{r+1}{1} b_{r+1} = 0$$

$$\binom{r+1}{2} b_{r+1} + \binom{r}{1} b_r = 0$$

$$\binom{r+1}{3} b_{r+1} + \binom{r}{2} b_r + \binom{r+1}{1} b_{r-1} \dots = 0$$

$$\dots = 0$$

$$\binom{r+1}{m} b_{r+1} + \binom{r}{m} b_r + \binom{r-1}{m-2} b_{r-1} \dots = 0$$

$$\dots = 0$$

$$\binom{r+1}{r+1} b_{r+1} + \binom{r}{r} b_r + \dots + \binom{1}{1} b_1 \dots = 0$$

إن هذه المنظومة من المعادلات يمكن أن توصف من خلال مصفوفة بالشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} \binom{r+1}{1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{r+1}{2} & \binom{r}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{r+1}{3} & \binom{r}{2} & \binom{r-1}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \binom{r+1}{m} & \binom{r}{m-1} & \binom{r+1}{m-2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \binom{r+1}{r+1} & \binom{r}{r} & \binom{r-1}{r-1} & \binom{r-2}{r-2} & \dots & 1 \\ \binom{r+1}{r+1} & \binom{r}{r} & \binom{r-1}{r-1} & \binom{r-2}{r-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{r+1} \\ b_r \\ b_{r-1} \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذا أطلقنا على هذه المصفوفات الثلاثة A، X، B، على التوالي، سيكون لدينا AX=B. ولكن A هي مصفوفة قطرية

فرضية مساعدة Lemma:

دعنا نتأمل سلسلة متناهية $\sum_{r=1}^n U_r$ ، إذا استطعنا إيجاد دالة f(n) بحيث أن:

$$\sum_{r=1}^n U_r = f(n+1) - f(1) \text{، بمعدن } u_n = f(n+1) - f(n)$$

البرهان Proof:

لدينا الفرضية التي تنص على أن $u_n = f(n+1) - f(n)$ ، وعليه إذا قمنا بتطبيقها بالنسبة إلى $1, 2, 3, \dots, n-2, n-1$ ، وسوف نحصل على العلاقات الآتية:

$$u_n = f(n+1) - f(n)$$

$$u_{n-1} = f(n) - f(n-1)$$

$$u_{n-2} = f(n-1) - f(n-2)$$

$$\dots$$

$$u_2 = f(3) - f(2)$$

$$u_1 = f(2) - f(1)$$

وإذا قمنا بإضافة هذه العلاقات، سوف نحصل على $\sum_{r=1}^n U_r$ يساوي $f(n+1) - f(1)$ والذي يبرهن على صحة هذه النظرية.

لتكن $\sum_{i=1}^n i^r$ هي السلسلة التي ينبغي الحصول على مجموعها.

لفرض الفرضية المساعدة، يمكن أن نأخذ بعين الاعتبار الدالة

الاختيارية $f(n) = \sum_{k=0}^{r+1} b_k n^k$ حيث يمثل b أي عدد حقيقي وأن n هو أي عدد صحيح موجب. إذن،

الفرضية للفرضية المساعدة إلى هذه الدالة بالنسبة للسلسلة $f(n+1) = \sum_{k=0}^{r+1} b_k (n+1)^k$ ، إذا قمنا الآن بفرض شرط

وسيكون لدينا:

$$u_n = f(n+1) - f(n)$$

$$n^r = \sum_{k=0}^{r+1} b_k (n+1)^k - \sum_{k=0}^{r+1} b_k n^k \quad \text{أو}$$

$$n^r = \sum_{k=0}^{r+1} b_k [(n+1)^k - n^k]$$

$$n^r = \sum_{k=0}^{r+1} b_k [(n+1)^k - n^k] \quad (1)$$

ولكن في ضوء نظرية ذات الحدين،

$$(n+1)^k = \sum_{m=0}^{r+1} \binom{k}{m} n^{k-m}$$

$$(n+1)^k - n^k = \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} n^{k-m}$$

وإن

$$\sum_{r=1}^n t^r = n \sum_{k=0}^{r+1} \left[b_k \binom{k}{0} n^{k-1} + b_k \binom{k}{1} n^{k-2} + \dots + b_k \binom{k}{k-1} \right]$$

والآن إذا أطلقنا على $b_k \binom{k}{j} = c_j$ سيكون لدينا

$$\sum_{r=1}^n t^r = n \sum_{j=0}^r c_j n^j$$

عندما $j=0$ والذي يؤدي أن $k=0, b_0 \binom{0}{j} = c_j = c_0$

تكون $b_{r+1} \binom{r+1}{j} = c_j$ ، فإن $k=r+1$ ، والتي تدل

ضنا على أن $j=r$ ، فإن النظرية التي تقول: إن الصيغة العامة لسلسلة بصيغة $\sum_{r=1}^n t^r$ هي $n \sum_{j=0}^r c_j n^j$ حيث

$b_{r+2} \binom{r+2}{j} = c_j$ بالنسبة لجميع $j \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$ وأن

$b_{r+1} \binom{r+1}{j} = c_j$ بالنسبة لجميع $j \in \{0, 1, 2, \dots, r+1\}$.

مثال 1 Example: جد $\sum_{r=1}^n t^2$.

في هذا المثال $r=2$ ، وعليه سيكون لدينا:

$$\begin{pmatrix} \binom{3}{1} \\ \binom{3}{2} \\ \binom{3}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \binom{2}{1} \\ \binom{2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

إذن، $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ وأن A^{-1} هي:

$$A^{-1} = \frac{(Adj.A)^t}{Det.A} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^t}{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}^t}{6}$$

وعليه فإن:

Diagonal Matrix، إذن $\det A = \prod_{i=1}^{r+1} (t_i^i) = 0$ وعليه توجد

A^{-1} (Det A) والتي تساوي في الحالة البسيطة

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Product بالطريقة التي يمثل بها \sum "المجموع". إذن يوجد لدينا $X = A^{-1}B$ فإذا كانت أي عنصر بـ A^{-1} ، والذي

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r+1,1} \end{pmatrix}$$

يدل ضمنا على أن

لأن B هي عمود متجه Column Vector. إذن:

$$\begin{pmatrix} b_{r+1} \\ b_r \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r+1,1} \end{pmatrix}$$

ولكن هذا يعني بأن، $b_{r+2} = a_{r+1}$ بالنسبة لجميع $i \in \{1, 2, 3, \dots, r+1\}$.

وعليه بالنسبة للدالة $f(n) = \sum_{k=0}^{r+1} b_k n^k$ سيكون لدينا:

$$f(n+1) = \sum_{k=0}^{r+1} b_k (n+1)^k \text{ \& } f(1) = \sum_{k=0}^{r+1} b_k$$

حيث $b_{r+2} = a_{r+1}$ بالنسبة لجميع $i \in \{1, 2, 3, \dots, r+1\}$.

إذن، بواسطة الفرضية المساعدة السابقة،

$$\sum_{r=1}^n t^r = \sum_{k=0}^{r+1} b_k (n+1)^k - \sum_{k=0}^{r-1} b_k$$

$$\sum_{r=1}^n t^r = \sum_{k=0}^{r+1} b_k [(n+1)^k - 1] \quad (II)$$

ولكن بواسطة نظرية ذات الحدين، سيكون لدينا بأنه:

$$(n+1)^k - 1 = \binom{k}{0} n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \dots + \binom{k}{k-1} n$$

إذن في معادلة (II)

$$\sum_{r=1}^n t^r = \sum_{k=0}^{r+1} b_k \left[\binom{k}{0} n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \dots + \binom{k}{k-1} n \right]$$

أو

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{إن مقلوب المصفوفة A سيكون بعدئذ}$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{وأن}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(-1) \quad \text{وأن} \quad b_0 = \frac{1}{2}(1) \quad \text{وأن} \quad \text{بعدئذ،}$$

$$f(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n + a_2)$$

$$f(n+1) = \frac{1}{2}[(n+1)^2 - (n+1) + a_2]$$

$$f(1) = \frac{1}{2}(a_2)$$

بعدئذ،

$$\sum_{K=1}^n K = f(n+1) - f(1) = \frac{1}{2}[(n+1)^2 - (n+1)] \\ = \frac{1}{2}n(n+1)$$

وبعد ممارسة تمرين كاف، ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حل التمارين الآتية.

التقييم اللاحق Postassessment

لقيم الطلبة بإكمال التمارين الآتية:

$$1. \text{جد مجموع: } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

$$2. \text{جد مجموع } \sum_{K=1}^n K^5$$

$$3. \text{ما هي التفسيرات في النظرية العامة، إذا كانت في } t' \text{ عددًا زوجيًا.}$$

$$X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وأن

$$\left. \begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{6}(2) \\ b_2 &= \frac{1}{6}(-3) \\ b_1 &= \frac{1}{6}(1) \end{aligned} \right\} \quad \text{والتي تدل ضمنا على} \quad \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{إن: } f(n) = \frac{1}{6}[2n^3 - 3n^2 + n + b_0]$$

$$f(n) = \frac{1}{6}[2n^3 - 3n^2 + n + b_0]$$

$$f(n+1) = \frac{1}{6}[2(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + (n+1) + b_0]$$

$$\text{وأن: } f(1) = \frac{1}{6}(b_0) \quad \text{فإن مجموع السلسلة سيكون،}$$

$$k^2 = f(n+1) - f(1) = \frac{1}{6}[2(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + (n+1)] \\ = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

مثال 2 Example

جد مجموع $1 + 2 + 3 + \dots + n$. في هذا المثال فإن السلسلة هي

$$\sum_{k=1}^n K \quad \text{وأن } K=1 \text{، إذن، ستكون المعادلة:}$$

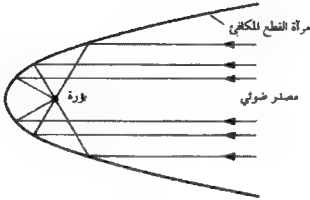
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{بعدئذ.}$$

آلة حاسبة للقطع المكافئ

A Parabolic Calculator

105



شكل (2)

أهداف الأداء Performance Objective

- سيقوم الطلبة برسم قطع مكافئ - مناسب وإجراء بعض عمليات الضرب معه.
- سيقوم الطلبة برسم قطع مكافئ - مناسب وإجراء بعض عمليات القسمة عليه.
- سيدير الطلبة (تحليلياً) سبب "عمل" طريقة الضرب المطروحة في هذه الوحدة.

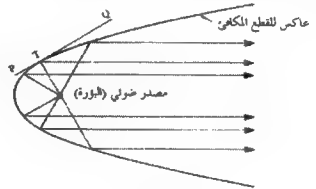
التقييم السابق Preassessment

قبل عرض هذه الوحدة على الطلبة، ينبغي أن يتأكد المعلم من أن طلبته قادرين على رسم مخطط لقطع مكافئ، وكونهم قادرين على إيجاد معادلة خط مستقيم، إذا توفرت لديهم نقطتان من نقاطه.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليقيم الطلبة بوسم الإحداثيات والقطع المكافئ $y=x^2$ على ورقة مخططات رسومية ذات حجم كبير (يفضل أن تكون من النوع الذي يحوي على مربعات صغيرة - خطوط بيانية). كما يجب أن تتم عملية الرسم بصورة بالغة الدقة. ومتى اكمل الطلبة عملهم على الرسم، فسوف يكونون على استعداد لإجراء الحسابات. على سبيل المثال، افترض بأنهم يرغبون بضرب

بعد إكمال تعليم خصائص القطع المكافئ للصف الحادي عشر بصف الرياضيات. قد يرغب المعلم بمناقشة بعض تطبيقات القطع المكافئ. ويمكن أن يناقش المعلم خصائص الانعكاس لسطح القطع المكافئ مثل الضوء الساقط، أو المرآة في التلسكوب. إن المصدر الضوئي عند بؤرة سطح القطع المكافئ العاكس (شكل 1) يعكس الأشعة بعيداً عن السطح في مسارات متوازية Parallel Paths. ويمكن أن يلاحظ بأن زاوية الشعاع الساقط FTP، تساوي زاوية الانعكاس FTQ.



شكل (1)

يستخدم نفس المبدأ في التلسكوب (شكل 2) (أو وحدة الرادار). ولكن في هذه الحالة فإن الأشعة المتولدة في مصادر خارجية والمنعكسة عن المرآة (أو شاشة الرادار) إلى البؤرة، والتي تتألف من كاميرا، أو جهاز آخر من الأجهزة التحسس الضوئي.

إن تطبيقات أخرى مثل مسار القطع المكافئ للأجسام المدفوعة سوف تؤخذ بنظر الاعتبار. وكذلك الحال مع تطبيق غير مألوف للقطع المكافئ والذي يتضمن خصائصه على المستوى الديكارتي Cartesian Plane.

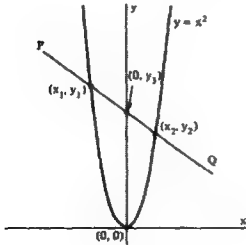
إن هذا الأنموذج سوف يعرض طريقة لاستخدام القطع المكافئ على المستوى الديكارتي بوصفه آلة الحساب تستخدم في عمليات الضرب والقسمة. إن التجهيز الوحيد الذي سيقترن إليه الطلبة هو أوراق مخططات رسومية ومسطرة عدلة.

سيكون المعلم على جانب كبير من الحكمة عندما يعرض على الطلبة مجموعة متباينة من التمارين الفكرية لكي يزدادوا ألفة بهذه التقنية، ويمكن أن يستخدم الطلبة مسطرة عدلة (دون رسم مستقيم) لقراءة الإجابات من الرسم البياني. بعد إكمال التدريب والمران الكافي، سيصبح الطلبة شغوفين بمعرفة سبب عمل هذه التقنية. وللبهنة على أنها تعمل، ليقم طلبة الصف باعتبار الحالة العامة الآتية (شكل 4).

ليقطع \overleftrightarrow{PQ} القطع المكافئ $y=x^2$ عند النقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، ويقطع المحور الصادي عند النقطة (Q, y_3) . يجب على هذا البرهان أن يستنتج بأن $y_3 = |x_1 x_2|$.
:البرهان Proof

ميل \overleftrightarrow{PQ} ميل $\overleftrightarrow{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1$ (بما أن $y_1 = x_1^2$ و $y_2 = x_2^2$)

يمكن وصف ميل \overleftrightarrow{PQ} بأي نقطة (x, y) ، وكما يأتي
وعليه فإن $\frac{y - y_1}{x - x_1} = x_1 + x_2$ ستكون معادلة \overleftrightarrow{PQ} عند النقطة $(0, y_3)$

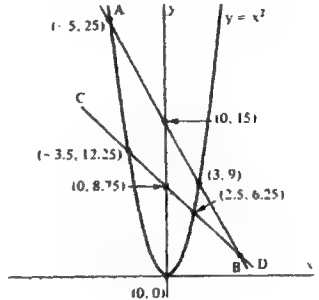


شكل (4)

$$\frac{y_3 - y_1}{0 - x_1} = x_1 + x_2 \text{ وسيكون}$$

وأن $y_3 = x_1^2$ ولكن $y_3 = x_1^2 - x_1 x_2 + y_1$ إذن $y_3 = -x_1 x_2$ ولكن هذا موجب، وعليه $y_3 = |x_1 x_2|$.
بمعرفة هذا البرهان قد يرغب الطلبة اختبار قطع مكافئ آخر في محاولة لاستبدال $y=x^2$ بقطع مكافئ "أكثر ملائمة" إن هذا النهج سيزود الطلبة بمجمع من التحريات الإضافية. فعلى

5x3. فسيقومون. ببساطة: يرسم مستقيم يصل بين نقطة على القطع المكافئ والإحداثي الأول Abscissa هو 3 ونقطة الإحداثي الأول هي 5-. إن نقطة حاصل ضرب 3 و 5 هي إحداثي النقطة حيث يقطع هذا المستقيم المحور الصادي y-axis (شكل 3: AB)



شكل (3)

لزيد من التمرين دع الطلبة يقومون بضرب 3.5x2.5. هنا يجب عليهم رسم المستقيم الذي يحوي النقاط (2.5, 6.25) و (3.5, 12.25). هذه هي النقاط على القطع المكافئ $y=x^2$ ، والتي إحداثيها الأول هما (2.5 و 3.5). إن إحداثي النقطة حيث يقطع هذا المستقيم (شكل 3، \overleftrightarrow{CD}) المحور الصادي هي حاصل ضرب 2.5 و 3.5 وهو 8.75. بصورة عامة فإن حجم الرسم البياني سوف يحدد درجة الثقة التي يمكن الوصول إليها. ويجب أن يدرك الطلبة بأن النقاط الواقعة على القطع المكافئ والتي كان إحداثيها الأول -2.5 و 3.5 يمكن استخدامها بدلاً من النقاط التي إحداثيها الأول 2.5 و -3.5 في المثال السابق.

عند هذه النقطة قد يسأل المعلم الطلبة عن كيفية استخدام نفس النهج في إجراء عملية القسمة.

إن ملاحظة الطلبة لعملية القسمة بوصفها معكوس عملية الضرب. سوف يقترح بأن \overleftrightarrow{CD} يمكن استخدامها لتقسيم الآتي:
3.5 ÷ 8.75. إن نقطة التقاطع التي يصنعها \overleftrightarrow{CD} مع القطع المكافئ. النقطة (2.5, 6.25)، سوف تثمر الجواب 2.5.

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقيم الطلبة برسم القطع المكافئ $y=x^2$ واستخدامه بعدئذ في حل التمارين الآتية:
 (أ) 5×4 (ب) 4.5×5.5
 (ج) $4 \div 2.5$ (د) $1.5 \div 0.5$
2. ليبين الطلبة كيفية استخدام $y = \frac{1}{2}x^2$ لإنجاز عمليتي الضرب والقسمة.

سهيل المثال. يمكن استخدامها في "إنشاء" مستقيم بطول \sqrt{a} . حيث سيحتاج الطالب إلى إنشاء مستقيم مواز لمحور السينات فقط، ويقطع محور الصادات عند النقطة $(0, a)$. إن قطعة ذلك المستقيم، والتي تقع بين محور الصادات والقطع المكافئ سيكون لها طول مقداره \sqrt{a} . ينبغي أن تشجع التحريات الإضافية التي يمارسها الطلبة في هذا المضمار.

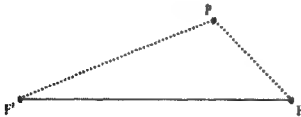
إنشاء قطوع ناقصة

Constructing Ellipses

الطريقة Method I:

الإنشاء نقطة فنقطة Point-By-Point

- إن أحد تعاريف القطع الناقص هو: عبارة عن بؤرة نقطة P، والتي تتحرك بحيث أن مجموع أبعادها عن نقطتين ثابتتين ومعلومتين F و F' ، يكون ثابتاً على الدوام. من شكل 1، يتضمن التعريف الذي أوردناه قبل قليل أن
- $$PF + PF' = \text{ثابت} \quad (1)$$



شكل (1)

بصورة مألوفة فإن هذا الثابت سوف يعطى قيمة 2a، ويبدو بأنه ليس ثمة صعوبة كبيرة في اشتقاق معادلة القطع الناقص من هذا التعريف:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

لا رعب أن كلا من إنشائي الإبهام البسيط Popular

تزود هذه الوحدة الطالب بوسيلة جيدة لإنشاء القطوع الناقصة وباستخدام المسطرة العدلة والفرجار.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة برسم نقاط على القطع دون استخدام معادلة.
2. سوف يستخدم الطلبة علاقة الدائرة بالقطع الناقص في إنشاء قطوع ناقصة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد اكملوا السنة المباشرة بمادة الرياضيات، وعلى دراية كافية بمبادئ المتطابقات المثلثية. وستسهم المعرفة الكافية بالهندسة التحليلية في مساعدة الطلبة، أثناء دراستهم لهذه الوحدة، بيد أنها ليست ضرورية جداً. أسأل الطلبة إنشاء قطع ناقص باستخدام أي طريقة (يعني، تحليلياً، أو باستخدام أدوات خاصة).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد فحص محاولات الطلبة لإنشاء قطع ناقص، دعهم يأخذون بعين الاعتبار دقة العمل الذي قاموا بإنجازه. قد يحاول بعض الطلبة الرسم يدوياً، بينما يعمد آخرون إلى رسم منحنى مناسب على قطعة من ورق الرسوم التخطيطية. إن هذا الأمر سوف يكون عاملاً مشجعاً يؤدي بنا إلى طريقة I.

إن تغيير موقع F سينتج عنه تغيير في حجم، وشكل القطع الناقص، يضاف إلى ذلك، إن البؤرة الثانية F' التي تقع على \overleftrightarrow{FQ} تمتد عبر O بمساقتها المحددة.

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليتم الطلبة برسم شكل 3 على مقاس أكبر مثل $FF'=6''$.

إن تلوين المناطق الناتجة عن نقاط تقاطع الدوائر قد يبرهن على كونه يفي بالمتطلبات.

2. ليتم الطلبة برسم دائرة نصف قطرها r ، ومركزها O .

وسيقوموا بعدئذ بتثبيت موقع النقطة F ، داخل الدائرة،

ورسم \overleftrightarrow{OF} . من الواضح، إن $OF > r$. بعدئذ دعهم يرسمون نصف قطر اختياري OQ ، ثم صل FQ ، وحدد

نقطة منتصف M . ثم ليقيموا بإنشاء عمود عند النقطة M قاطعا \overline{OQ} عند النقطة P . بعدئذ تقع P على قطع

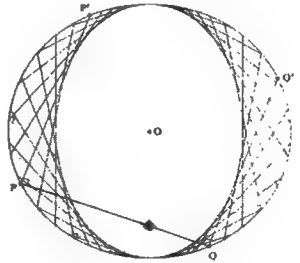
ناقص إحدى بؤرتيه F . يضاف إلى ذلك، مد \overleftrightarrow{MP} خلال

النقطة P بحيث يكون مماساً لنفس القطع الناقص. ليتم الطلبة بإكمال هذا الإنشاء وتبريره.

مرجع

Posamentier, A.S., and H.A. Hauptman, 101 Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics, Thousand Oaks, CA: Corwin, 2001.

ارسم وترا يمر بالنقطة F ويقطع الدائرة عند النقطتين P و Q . وباستخدام قالب مثلث قائم الزاوية أو مسطرة النجار بشكل حرف T ، أنشئ عمودين على P و Q ليلتقيان مع الدائرة عند النقطتين P' و Q' ، على التوالي. بعدئذ، كل من $\overleftrightarrow{PP'}$ و $\overleftrightarrow{QQ'}$ مماس لقطع ناقص تعد النقطة F إحدى بؤرتيه. استمر بهذا الإجراء لمجموعة مشابهة من الأوتار PQ ، للحصول على مخطط يشابه ذاك المعروض في شكل 5.

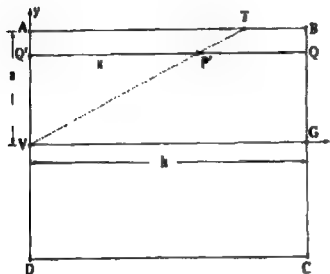


شكل (5)

يرتكز برهان هذا الإنشاء إلى معكوس النظرية الآتية: المحل الهندسي لنقطة تقاطع مماس القطع الناقص مع العمود المقام عليه من أي بؤرة هو عبارة عن دائرة. إن البرهان على هذه النظرية يمكن العثور عليه في:

Bower's An Elementry Treatise on Analytic Geometry, PP.139-140.

نقاط على \overline{AV} . ارسم $\overline{V1}$ والذي سيلتقي bb' عند النقطة P' . استمر بهذا النوال مع بقية النقاط بعدد ستكون النقطتان P ، P' والنقاط الأخرى، والتي تم الحصول عليها بنفس الطريقة، على القطع المكافئ حيث يكون V رأس القطع و \overline{VG} محوره. **البرهان Proof:** من شكل 3، ليكن \overline{AD} محور الصادات، \overline{VG} محور السينات (انظر شكل 4).



شكل (4)

لتكن b على \overline{BG} ونطلق على b' و Q على \overline{AV} ونرسم $\overline{V1}$ و $\overline{Q'Q}$ بحيث يلتقيان عند النقطة P' . دع $AV = a$ ، $VG = h$ ، $x = O'P'$ ، $GQ = y = VQ'$ بواسطة الإنشاء (يعني، تم اختيار النقطتين T و Q بهذه الخاصية)،

$$\frac{AT}{AB} = \frac{GQ}{GB} \quad \text{و} \quad \frac{AT}{h} = \frac{y}{a} \quad (2)$$

من مثلثات متشابهة $VQ'P'$ و VAT ،

$$\frac{x}{y} = \frac{AT}{AV} = \frac{AT}{a} \quad \text{أو} \quad AT = \frac{ax}{y} \quad (3)$$

بتمويض هذه القيمة لـ AT في (2) نحصل على،

$$\frac{ax}{h} = \frac{y}{a} \quad \text{أو} \quad \frac{a^2x}{y} = hy \quad (4)$$

بحل المعادلة (4) بدلالة y ينتج:

$$y^2 = \frac{a^2x}{h} \quad (5)$$

والتي تمتاز بصيغة مشابهة لتلك في معادلة (1)، حيث

مناقشة Discussion: بواسطة الإنشاء، ستكون المسافة العمودية لكل من P أو P' من $\overline{DD'}$ مساوية لكل من FP أو FP' .

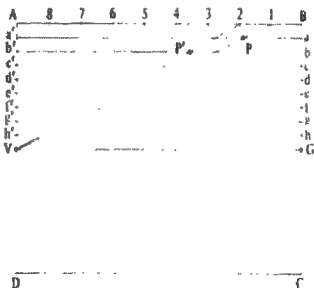
إن تعريف القطع المكافئ يركز إلى مثل هذه المساواة بالمسافة ولنقاط متغيرة عن مستقيم ثابت ونقطة ثابتة. إن القطع المكافئ هو المحل الهندسي لنقاط تبعد كل منها بمساافة عن نقطة ثابتة تساوي المسافة التي تبعد بها عن مستقيم ثابت. إن المستقيم $\overline{DD'}$ يشار إليه بوصفه الدليل Directrix وأن عموده النصف هو محور القطع المكافئ.

إذا كانت M نقطة تقاطع المحور والدليل $\overline{DD'}$ ، وبافتراض $FM = 2p$ ، فليس ثمة صعوبة في بيان أن معادلة القطع المكافئ هي $(1) \quad 4px = y^2$ باستخدام صيغة المسافة والتعريف أعلاه. إن نقطة منتصف المستقيم \overline{MF} ، V هي رأس قطع المكافئ، ويشار إليها غالباً بوصفها نقطة انقلاب القطع المكافئ.

الطريقة Method II

الإنشاء نقطة – نقطة Point-by-Point

ارسم المستطيل $ABCD$ (انظر شكل 3) ولتكن النقطتين V و G نقطتي منتصف كل من \overline{AD} و \overline{BC} ، على التوالي.



شكل (3)

لنقسم كل من \overline{AB} و \overline{BG} إلى نفس العدد من الأجزاء المتساوية. مبدئين من النقطة B ، ولكن النقاط المتتالية بالتقسيمات المتساوية 1، 2، 3، ... على \overline{AB} و a, b, c, \dots على \overline{BG} . ارسم $\overline{aa'}$ عمودياً على \overline{BG} . (لاحظ بأن a', b', c', \dots هي

أنشئ زاوية قائمة أحد شعاعها \overrightarrow{FQ} ورسم الخط الممتد إلى حافة الورقة مع الشعاع الآخر للزاوية القائمة. كرر هذا الإجراء مع النقاط الأخرى Q' ، Q'' ، ... إن المخطط الناتج ينبغي أن يكون مشابهاً لشكل 5، وأن الشكل "المغلف" بواسطة جميع هذه المستقيمات سيكون عبارة عن قطع مكافئ.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم طلبتك برسم زاوية بأي قياس، على أن يكون ذراعها متساويين بالطول. ابتدئ من الرأس، ودعمهم يقوموا بقياس نفس المسافات على طول كل ذراع، وتأشير كل مقطع على كل ذراع بالتأشيرات 1، 2، 3، 4، ...، 10، مع تأشير الرأس بالرمز 0. بعدئذ اسأل الطلبة وصل النقطة 10 على أحد الذراعين مع النقطة 1 على الذراع الآخر. راقب الطلبة في عملهم على وصل النقاط 9 و 2.8 و 3 مستمرين على هذا النموذج، وتأكد دائماً بأن مجموع الأرقام المرتبطة سيكون 11. إن الظاهر الناتج سوف يكون مشابهاً لشكل 5 إلى حد ما. وسيقوم الطلبة برسم غلاف للقطع المكافئ. دع الطلبة يحاولون تبرير هذا الإنشاء بالإضافة إلى الإنشاء في شكل 5.

مرجع Reference

Posamentier, A.S, and H.A. Hauptman, 101 Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics, Thousand Oaks, CA: Corwin, 2001.

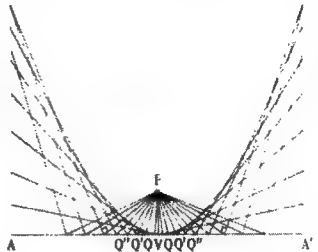
$$4P = \frac{a^2}{h} \quad (6)$$

بما أن p هي المسافة بين الرأس والبؤرة، فإن حل (6) بدلالة p سوف يحدد موقع البؤرة بدلالة a و h بالمستطيل الأصلي.

طريقة Method III

إنشاء غلاف Envelop Construction

عند الحافة السفلى لورقة بمقاس $11'' \times 8\frac{1}{2}''$ تمسك بها بصورة عمودية. ارسم مستقيماً على كامل عرض الورقة (انظر شكل 5). ارمز لهذا المستقيم بـ AA' وبنقطة منتصفه V . حدد موقع النقطة F على العمود النصف، بمسافة 1 بوصة فوق V . على كل من جهتي V . حدد النقاط Q ، Q' ، Q'' ، ...، بزيادة تدريجية صغيرة جداً، المسافة المتتالية من V إلى Q ، Q' إلى Q'' ، ... ضع قالب مثلث قائم الزاوية أو مسطرة نجار على شكل حرف T بحيث أن الساق يمر بالنقطة F وأن رأس المثلث قائم الزاوية يلاقي أي من النقاط Q ، Q' ، Q'' .



شكل (5)

استخدامات منحنيات المستوى الأعلى لتقسيم زاوية ثلاثياً

Using Higher Plane Curve to Trisect an Angle

دع $m\angle AOP = \theta$ ويكون $OP = r$. بعدد بواسطة الفرضية $m\angle APO = 2\theta$ ، والتي بواسطتها سيتبع $3\theta - m\angle OAP = \pi$ عبر النقطة A مسافة مقدارها a وحدة، مع تثبيت النقطة B. بعدد $m\angle BAP = 3\theta$ بواسطة قانون الجيوب،

$$\frac{r}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{2a}{\sin 2\theta} \quad (1)$$

والتي سينتج عنها

$$r = \frac{2a \cdot \sin(\pi - 3\theta)}{\sin 2\theta} \quad (2)$$

بما أن:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \sin(\pi - 3\theta) = \sin 3\theta$$

فإن أنسب تعويض للمعادلة (3) تعطي

$$r = \frac{a \cdot \sin 3\theta}{\sin \theta \cos \theta} \quad (3)$$

إن كون:

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = \sin \theta (3 - 4 \sin^2 \theta)$$

سيجعل معادلة (3) تتمر بما يأتي.

$$r = \frac{3a - 4a \cdot \sin^2 \theta}{\cos \theta} \quad (4)$$

$$\text{دع } \theta^2 \sin - 1 = \theta^2 \cos - 1 \text{ في معادلة (4).}$$

$$r = \frac{-a + 4a \cdot \cos^2 \theta}{\cos \theta}$$

والتي يمكن تبسيطها بسهولة عن طريق جعل

$$\frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta \text{ إلى:}$$

$$r = a(4 \cos \theta - \sec \theta) \quad (5)$$

إن المعادلة القطبية المطلوبة لمحور التقسيم الثلاثي Trisectrix لـ Maclaurin.

بوضع P على الجهة المقابلة لـ \overrightarrow{OA} (شكل 1) فإن اشتقاقاً مشابهاً سوف ينتج عنه.

$$r = a(4 \cos \theta - \sec \theta) \quad (6)$$

ستقدم هذه الوحدة اثنين من منحنيات المستوى العليا - الجبرية مع عرض تحليلي ومرئي (تجريبي) لكيفية إجراء عملية التقسيم الثلاثي لزاوية ما.

هدف الأداء Performance Objective

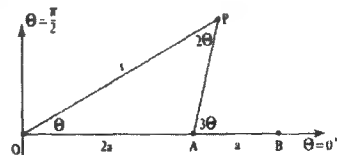
1. بإعطاء ظروف محددة لمحل هندسي، سيتعلم الطلبة كيفية رسم منحنى مباشرة من المحل الهندسي ودون استخدام معادلة.
2. بإعطاء معادلة قطبية Polar. سيقوم الطلبة برسم المنحنى على ورقة بمحاور قطبية.
3. بإعطاء أحد المنحنيات التي نوقشت خلال هذه الوحدة، سيعمد الطلبة إلى تقسيم أي زاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد مارسوا بعض التمارين مع المحاور القطبية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

يمكن اعتبار عملية تقسيم زاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية كتتابع لمسألة المحل الهندسي الآتية: لديك المثلث $\triangle OAP$ بالقاعدة الثابتة \overline{OA} والرأس المتغير P، جد المحل الهندسي لنقاط بحيث أن $m\angle OPA = 2m\angle POA$. (انظر شكل 1).
لتكن النقطة O قطب نظام المحاور القطبية وأن \overline{OA} هو الخط الأولي، حيث تكون إحداثيات A، $(2a, 0)$.



شكل (1)

فحسب. وفي حالة $0^\circ < \theta < 65^\circ$ ، تأمل نقطة اختيارية C بحيث

$$\vec{COA} \text{ د.ع قياس للمعكس } \angle BAP = 195^\circ \text{ Reflex}$$

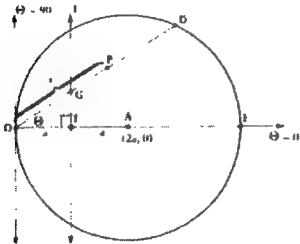
وهكذا تقع P أسفل \vec{COA} . بعدئذ $\angle COP = 60^\circ$ فيحافظ على خاصية التقسيم الثلاثي.

لاحظ أنه بالنسبة لـ $60^\circ < \theta$ ، ينبغي وجود فرعي محاذي أعلى وأسفل \vec{OB} . بصورة معاكسة، لديك (5)، إنها أكثر صعوبة لحد ما عند محاولة بيان أن كل نقطة P تقع على محور التقسيم الثلاثي وأن قياس:

$$m\angle BOP = \frac{1}{3} m\angle BAP.$$

إن البرهان يستند إلى بيان أن $\angle OPA = 20^\circ$ ، والتي ينجم عنها $m\angle BAP = 30^\circ$.

يمكن الحصول على معادلة (5) والخاصة بمحور التقسيم الثلاثي للاكولورين، أيضاً، من مسألة المحل الهندسي الآتية (انظر شكل 3).



شكل (3)

لديك النقطة O، قطب نظام المحور القطبي، والنقطة $E(4a, 0)$. عند النقطة $A(2a, 0)$ وهي المركز، ارسم دائرة نصف قطرها 2a. ارسم خط مستقيم يمر بالنقطة $F(a, 0)$ وعمودي على \vec{OE} . عين نقطة اختيارية D على محيط نصف الدائرة "العلوي"، وارسم \vec{OD} قاطعا L عند النقطة G. ثم قم بتعيين النقطة P اختيارياً على \vec{OD} بحيث $OP = GD$. إن المعادلة القطبية الناتجة سوف تكون مشابهة لمعادلة (5). (تلميحات

بما أن $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ وأن $\sec(\theta) = \sec(-\theta)$ ، سيتبع

عما سبق بأن (5) متناظرة بالنسبة إلى \vec{OA} . إذن، وكما تم تأكيده بواسطة (6)، بالنسبة لجميع النقاط للمحل الهندسي أعلى \vec{OA} ، هناك نقاط أسفل منه مقابلة له أيضاً (إن هذه النقاط المقابلة هي انعكاسات في \vec{OA}).

لرسم المحل الهندسي، فإن تحديد θ في (5) و (6) سوف يؤدي، بالطبع، إلى تزويدنا بنقاط لمحور التقسيم الثلاثي.

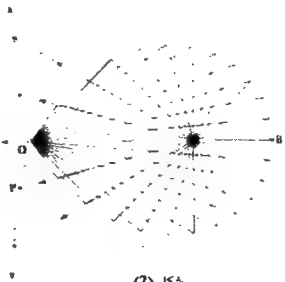
لنعم الطلبة بإعداد نسخة مماثلة تماماً للمثلث $\triangle AOP$ على ورقة مخططات بمحاور قطبية، بحيث أن O تقع على نقطة الأصل. وأن \vec{OA} على المحور الأفقي (عند $\theta = 0$ دائري). بعدئذ يجب قيام الطلبة برسم نقاط مختلفة للمنحنى ثم رسم المنحنى ذاته.

والآن يستطيع الطلبة استخدام المخطط الأصلي (على ورق اعتيادي). إن المنهج الجديد لرسم المنحنى سيكون برسم النقاط ثم رسم مستقيمتها بصورة مباشرة من الشروط المحددة للمحل الهندسي.

سيحتاج المرء إلى تحديد قيم مختلفة لـ θ فقط، والقيم المقابلة 3θ للزاوية $\angle BAP$. مع بقاء \vec{OB} قاعدة ثابتة لكل من هذه الزوايا وأن تقاطع الذراع الثاني لكل زاوية سوف تنتج عنه نقطة P.

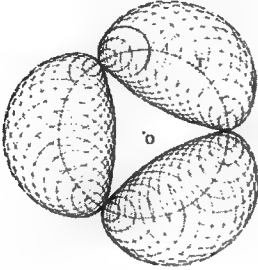
يظهر شكل 2 مثل هذا الإنشاء ولقيم تتراوح $0^\circ \leq \theta \leq 55^\circ$ في 5 فواصل.

في حالة $\theta = 0^\circ$ ، 60° لا يوجد ثمة مثلث بل \vec{OB}



شكل (2)

120° ، وأن $\overline{OI'}$ يقسم المنحنى تناظرياً عند $m\angle\theta = 60^\circ$ ، فإن المطلوب الوحيد سيكون الحصول على أطوال TP بين $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ ، وفي فواصل بقياس 6. إن هذه الأطوال قد تم الحصول عليها عبر أعداد رسوم دقيقة للمواقع العشرة المطلوبة لكل من الدائرتين المتدحرجتين.



شكل (3)

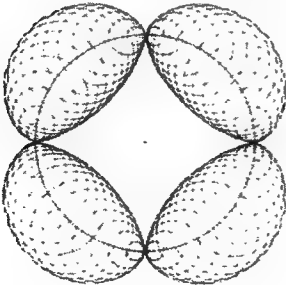
التقييم اللاحق Postassessment

لاختبار مقدار استيعاب الطلبة لموضوع المسارات الدويرية الفوقية والتحقية، دعهم يقومون بإكمال التقارير الآتية.

1. يمرض شكل (4) أدناه النتائج التي تم الحصول عليها عندما

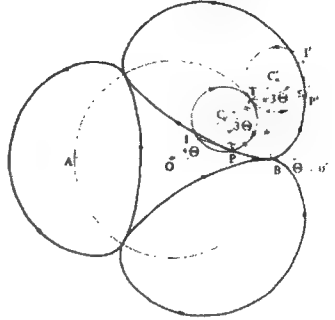
$b = \frac{a}{4}$ برر وجود 4 قرنائات للمسار الدويري التحتي وأخرى للمسار الدويري الفوقي.

2. عم بالنسبة $b = \frac{a}{n}$ ، $n = 5, 6, \dots$.



شكل (4)

دويري فوقي بثلاثة قرنائات. تحتاج كل دائرة إلى ثلاثة دورات كاملة قبل أن تعود ثابتة إلى النقطة B. بعدد ستكون الدائرة الثابتة محيطاً للمثلث Deltoid ودائرة داخلية بالنسبة لقرنائات المسارات الدويرية - الفوقية الثلاثة.



شكل (2)

إن الخطوط الآتية قد رسمت في كل دائرة: \overline{CP} ، \overline{IP} ، $\overline{IP'}$ ، $\overline{IP''}$ للدائرة C، $\overline{CP'}$ ، $\overline{CP''}$ للدائرة C'.

ليبرر طلبتك سبب ذلك.

(1) طول $TP = \text{طول } TB = \text{طول } TP'$ بعدد بين بأن:

$$m\angle TCP = 3\theta = m\angle T'CP' \quad (2)$$

بما أن أنصاف أقطار الدائرتين C و C' متساويين،

$\triangle TPC \cong \triangle T'P'C'$ (SAS)، وأن الأضلاع المقابلة:

$$TP = TP' \quad (3)$$

لاحظ بأن $m\angle TPI = 90^\circ = m\angle T'P'I'$ ، يضاف إلى ذلك

بأننا قد قررنا مسبقاً وبدون برهان أن كلا من \overline{PI} و $\overline{P'I'}$

يمسكان المثلثية عند النقطة P والمسار الدويري الفوقي عند النقطة P'،

على التوالي. يمكن الشور على مزيد من التفاصيل في مرجع (2).

إن معادلة (3) أعلاه تدل ضمناً على أن الدائرة التي مركزها T،

ونصف قطرها $TP = TP'$ ستكون مماسة لكل منحن عند P و P'.

لا شك أن التغير في T سيصاحبه تغيير مقابل في طول $\overline{TP'}$

(أو \overline{TP}). وقد عرضنا في شكل 3 النتيجة النهائية التي تم

الحصول عليها عندما رسمت دوائر لكل 60 موقع وبتباعد

متساوي عن T على طول الدائرة الثابتة. لقد استثمرنا خصائص

التناظر لكل منحن للتقليل من حجم العمل المطلوب لتحديد

الأطوال المتغيرة لقطعة \overline{TP} ، ونظراً لأن كل منحن يكرر ذاته كل

مراجع Reference

- Beard, Roberts, S., Patterns in Space, Creative Publication, 1973.
- Lockwood, E.H., A Book of Curve, Cambridge University Press, 1961.

- 3 اعد رسماً للحالة $b = \frac{a}{4}$ (الكليوي The Nephroid) وأعرض مرثياً بأن المحل الهندسي لنقطة ثابتة على الدائرة المتحركة - الداخلية هو قطر الدائرة الثابتة.
- 4 كرر بالنسبة للحالة $b=a$ (القليبي Cardioid). وبين أن جميع الدوائر المتمركزة في T تمر خلال نقطة ثابتة، يعني أحد المحال الهندسية ينحل إلى نقطة.

التتابع التوافقي

The Harmonic Sequence

$$\frac{1}{9/28} = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$$

والآن يجب أن يحفز الطلبة على تعلم المزيد حول تتابع التوافقي.

تأمل ثلاثة أو أكثر من الحدود في تتابع حسابي. على سبيل المثال، $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. أن تتابع مقلوبات هذه الحدود $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}$ يطلق عليه التتابع التوافقي. إن اصطلاح "توافقي" قد جاء من خاصية الأصوات الموسيقية. فإذا صدرت الأصوات الموسيقية عن مجموع من الأوتار ذات الشد المتجانس، والتي تتناسب أطوالها إلى $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ ، سوية، فإن التأثير يطلق عليه "متناغم (متوافق) Harmonious" بالنسبة للأذن. إن هذا التتابع هو تتابع توافقي، كما هو الحال مقلوبات الحدود في تتابع حسابي، $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

لا توجد صيغة عامة لوصف مجموع الحدود في تتابع توافقي. وتعالج المسائل التي تتعامل مع تتابع التوافقي بدلالة التتابع الحسابي الذي يرتبط بصله معها.

هناك نظريتان من المفيد أخذها بعين الاعتبار في هذا المقام:

نظرية 1 Theorem:

إذا أضيف ثابت إلى (أو طرح من) كل حد في تتابع حسابي، بعددث سيكون التتابع الجديد حسابياً أيضاً (وبنفس الفارق المشترك).

من الأفضل عرض هذه الوحدة على الصف بعد إتقانه العمل على التتابعات الحسابية والهندسية.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتعريف التتابع التوافقي.
2. سيعرض الطلبة التتابع التوافقي بصورة هندسية.
3. سيحل الطلبة مسائل بسيطة بالتتابعات التوافقية.

التقييم السابق Preassessment

أسأل الطلبة إيجاد الحد الرابع بالتتابع $1\frac{1}{3}, 1\frac{11}{17}, 2\frac{2}{13}$

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن رد الفعل، الطبيعي، الصادر عن الطلبة سيكون بمحاولة إيجاد الحد الرابع بالتتابع أعلاه عن طريق امتحانها بإيجاد فرق مشترك. وعندما لا تنجح هذه المحاولة، سيتوجهون صوب نسبة مشتركة. وخلال فترة قصيرة سوف يشعر طلبك بإحباط كبير. الأمر الذي سيعمّنك فرصة جيدة لتحفيز طلبك نحو نوع "جديد" من التتابع.

أسأل الطلبة كتابة كل حد بصيغة كسر غير حقيقي ثم كتابة مقلوباتها. وسينتج عن هذا $\frac{13}{28}, \frac{17}{28}, \frac{21}{28}$ أو $\frac{13}{28}, \frac{17}{28}, \frac{3}{4}$. إن الفحص الإضافي لهذا التتابع الجديد سوف يؤثر بوضوح إلى كونه تتابع حسابي وبفارق مشترك مقداره $-\frac{4}{28}$. والآن يستطيع الطلبة إيجاد الحد الرابع - المطلوب بسهولة ويسر،

تأمل المثلث $\triangle ABC$ ، حيث ينصف \overline{AD} الزاوية $\angle BAC$ ، وينصف \overline{AE} الزاوية $\angle CAF$ ، وأن النقاط B ، D و C ، و E تقع على استقامة واحدة، (انظر شكل 8). يمكن البرهنة بسهولة أنه بالنسبة لنصف الزاوية الخارجي \overline{AE} ، $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}$ (يعني، ارسم $\overline{GC} \parallel \overline{AE}$ ، $\overline{AG} = \overline{AC}$ كذلك $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AG} = \frac{AB}{AC}$ بنفس الطريقة فنعالج منصف الزاوية الداخلي \overline{AD} ، اجري البرهان برسم

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ ، وعليه $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AF} = \frac{AB}{AC}$ ؛ $AF = AC$ ؛ $\overline{CF} \parallel \overline{DA}$ ، يمكن بعد ذلك القول بأن النقطتين B و C تفصلان النقطتين D و E بصورة توافقية. والآن افترض \overline{BDCE} هو خط عددي، ونقطة B بوصفها نقطة الصفر، والنقطة D على إحداثي r ، ونقطة C على إحداثي s ، والنقطة E على إحداثي t . من أجل هذا، $BC=s$ ، $BD=r$ ، و $BE=t$ وينبغي علينا عرض أن r ، s ، و t تكون تتابعاً توافقياً. بما أن $\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CE}$ ، أو $\frac{r}{t-s} = \frac{s}{t}$ ، وعليه $\frac{r}{t-s} = \frac{s}{t}$ ، $\frac{BC-BD}{BE-BC} = \frac{BD}{BE}$ ، $\frac{CD}{CE} = \frac{BD}{BE}$ سيكون $t(s-r) = r(t-s)$ وأن $ts-tr = rt-ts$. $ts-tr = rt-ts$ يتقسم كل حد على $\frac{1}{r}$ ، $\frac{1}{s}$ ، $\frac{1}{t}$ ، نحصل على $\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{t}$ والذي يؤشر أن $\frac{1}{r}$ ، $\frac{1}{s}$ ، $\frac{1}{t}$ تكون تتابعاً حسابياً. إذن، r ، s ، t تكون تتابعاً توافقياً. والآن ينبغي أن يكون لدى الطلبة نظرة جيدة واستبصار واضح بالتتابع التوافقي.

التقييم اللاحق Postassessment

1. قم بإعداد معادلة وحدود التابع التوافقي a ، b ، c . (استخدم التعريف).
 2. جد الحد السادس والعشرين بالتتابع:
- $$2, 1, \frac{12}{2}, \frac{12}{13}, \frac{9}{16}, \frac{1}{19}, \dots$$
3. برهن أنه إذا كانت a^2 ، b^2 ، c^2 تتابع حسابياً، بعدئذ $(a+b)$ ، $(c+b)$ ، $(b+c)$ تؤلف تتابعاً توافقياً.

نظرية 2 Theorem:

إذا ضرب أي حد في تتابع حسابي (أو قسم) بواسطة ثابت، فإن التابع الناتج سيكون حسابياً أيضاً (ولكن مع فارق مشترك مختلف).

إن برهان هاتين النظريتين قد ترك كتمرين للطلبة.

يمتاز برهاني هاتين النظريتين ببساطة وكونه مباشراً ولا يحتاج إلى عناية خاصة في هذا المقام. ولكن المثال الآتي سيسهم في مساعدة الطلبة على نيل تسهيلات أثناء التعامل مع التتابعات التوافقية.

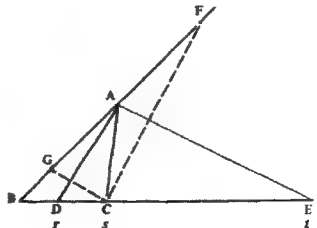
مثال Example:

إذا كانت a ، b ، c تتابعاً توافقياً، برهن أن $\frac{a}{a+b}$ ، $\frac{b}{b+c}$ ، $\frac{c}{c+a}$ تكون تتابعاً أيضاً.

الحل Solution:

بما أن $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ ، $\frac{1}{c}$ تكون تتابعاً حسابياً فإن: $\frac{a}{a+b}$ ، $\frac{b}{b+c}$ ، $\frac{c}{c+a}$ تكون تتابعاً حسابياً أيضاً. ويمكن إعادة كتابة هذا التابع بصيغة $1 + \frac{a+b}{c}$ ، $1 + \frac{a+c}{b}$ ، $1 + \frac{b+c}{a}$ وعليه تعد $\frac{a+b}{c}$ ، $\frac{a+c}{b}$ ، $\frac{b+c}{a}$ تتابعاً حسابياً. إذن $\frac{a}{a+b}$ ، $\frac{b}{b+c}$ ، $\frac{c}{c+a}$ تشكل تتابعاً توافقياً.

لا ريب أن أحد أكثر الجوانب التي تستأثر بالاهتمام لأي تتابع هي كيفية إنشاء أنموذج هندسي للتتابع ذاته. إن إحدى التفسيرات الهندسية للتتابع التوافقي يمكن الحصول عليه من نقاط تقاطع منصفات الزاوية الداخلية والخارجية بمثلث مع أضلاع المثلث ذاته.



التحويلات والمصفوفات

Transformations and Matrices



استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

في البداية، ينبغي أن يجعل المعلم طلبته على معرفة كافية بمجموعة الأعداد المرتبة في المصفوفة. ثم اخبر الطلبة بأن المصفوفة بحجم $A \times B$ تحتوي على a من الصفوف و b من الأعمدة التي تستقر داخل قوسين. وعندما تكون $a=b$ يطلق على المصفوفة "مصفوفة مربعة Square" ينبغي أن يشاهد الطلبة بأن إضافة المصفوفات يتضمن إضافة الأعداد في المواقع المتناظرة بكل مصفوفة. على سبيل المثال:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$$

وعليه أن يلاحظ الطلبة بأنه يجب على المصفوفات التي يراد جمعها أن تكون بنفس الحجم (الأبعاد).

عند عرض أسلوب ضرب المصفوفات على الطلبة، ينبغي عليك استخدام الصيغة العامة الآتية. ولاحظ بعناية علاقة العمود-الصف بين معاملات المصفوفتين في حال الضرب.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

والآن يستطيع الطلبة وصف موقع أي نقطة، إما بدلالة محاورها (x, y) ، أو بواسطة مصفوفة 2×1 ، ويطلق عليه "متجه الموقع" Position Vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ والذي يمثل المتجه من نقطة الأصل إلى النقطة.

قد تجد أن من الأفضل استخدام عبارة "يوضع على is mapped onto" عندما تصف تأثير التحويل. إن رمز هذه العبارة باستخدام المصفوفات هو "→".

توفر عمليات النقل Translation مقدمة بسيطة إلى استخدامات المصفوفات.

ستسهم هذه الوحدة في صياغة جبرية لمناقشة التحويلات الهندسية باستخدام المصفوفات.

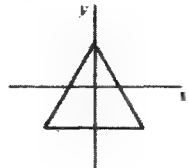
أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء تحويل هندسي محدد سيقوم الطلبة بتسمية مصفوفة 2×2 والتي لها تأثيرات على هذا التحويل.
2. بإعطاء مصفوفة 2×2 معلومة، سيقوم الطلبة، بمعالجة سريعة. بتسمية تحويل كل تأثيرات المصفوفة.

التقييم السابق PREASSESSMENT

1. ارسم المثلث ΔABC على مستوى ديكارتي رؤوسه: $A(2, 2)$ ، $B(4, 2)$ ، $C(2, 6)$. اكتب المحاور A' ، و B' ، C' والتي تنتج عندما يمر المثلث ΔABC بالتحويلات الآتية:

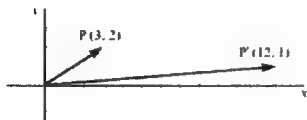
- أ. النقل بمقدار 5- وحدة في الاتجاه السيني و 2 وحدة في الاتجاه الصادي.
 - ب. الانعكاس عبر المحور السيني.
 - ج. الدوران بـ 90° حول نقطة الأصل.
 - د. زيادة معامل القياس 2 مع وجود المركز عند $(2, 2)$.
2. لديك مثلث متساوي الأضلاع كما يظهر في الشكل الآتي، بحيث يبعد كل رأس بنفس المسافة عن نقطة الأصل، قم بإدراج التحويلات الهندسية والتي تغادر موقع المثلث دون تغير. وافتراض عدم تمييز الرؤوس.



شكل (1)

بالتدريب على ضرب المصفوفات، وهي مهارة يقتفرون إليها بشدة قبل مباشرة العمل على بقية هذا الموضوع، والثاني، وهم الأهم في هذه الاستراتيجية، إن الطلبة يبدأون بالتفكير أن المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (أو أي مصفوفة من نوع 2×2) كتحويل للنقطة $P(3, 2)$ على النقطة $P'(12, 1)$.

ينبغي أن يصاحب كل مثال من هذا النوع مخطط توضيحي، كما في الشكل 2.



(شكل 2)

عندما يصبح الطلبة على معرفة كافية بالفكرة العامة بأن أي مصفوفة 2×2 تمثل عملية تحويل، يجب على المعلم أنذاك أن يكون على أهبة الاستعداد لأن يعرض لهم كيف أن بعض مصفوفات 2×2 تمثل تحويلات خاصة كالتي أصبحوا على معرفة كافية بها. على سبيل المثال، يمكن للمعلم أن يعطيهم المصفوفة ونقطة، على التوالي (وكما يأتي).

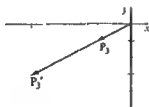
$$1. \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



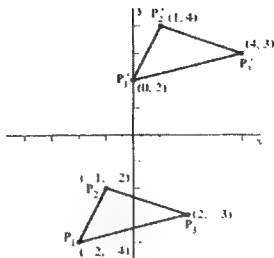
$$2. \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$3. \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$



سيدرك الطلبة التحويلات في هذه الأمثلة كما في (1) انعكاس (عبر المحور الصادي)، (2) تدوير موجب بـ 90° ، (3) تكبير بمعامل قياس 3. وللتأكيد على موضوع بأنه لم تكن محض مصادفة أن هذه المصفوفات قد أكملت التحويلات، اسأل الطلبة



إن نقل المثلث $3P_2P_1P_3$ إلى $3P'_2P'_1P'_3$ يمكن تسميته بصيغة مصفوفة

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

تمثل هنا "متجه النقل" Translation Vector، يعني أنها تنقل $2(x, y)$ وحدة بالاتجاه السهني و 6 وحدات بالاتجاه الصادي. ينبغي أن يشاهد الطلبة بسهولة ويسر بأنه عبر إضافة المصفوفات أن كل نقطة P_3, P_2, P_1 توضع على P'_3, P'_2, P'_1 على التوالي، يعني:

$$P_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = P'_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = P'_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = P'_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

إن إضافة مصفوفة بـ 1×2 موقع متجهات يمكن على هذا الأساس أن تصف عملية نقل في مستوى ثنائي الأبعاد Two-Dimension. يجب أن يعطي الطلبة عدة أمثلة وتمارين حيث تنتقل نقطة محددة (x, y) إلى أي نقطة أخرى $(2x, 2y)$ بالاختيار المناسب لمصفوفة 1×2 بحيث:

$$\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x2 \\ y2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}$$

إن عمليات التدوير Rotation، والانعكاسات Reflections، والتكبير Enlargement تعد أكثر تشويقاً، ولكي نقوم بوصفهم جبرياً سنحتاج إلى مصفوفات 2×2 . يجب أن يعطي الطلبة، أولاً، مثالين أو ثلاثة أمثلة من النوع

الصف قد امسك بالمفتاح الذي سيوصلهم إلى أهداف الأداء. تأكد فيما إذا كان طلبة الصف قادرين على إجابة كل من نوعي المسائل الآتية:

$$1. \text{ أي نوع من التحويل يمكن إنجازه بتطبيق المصفوفة } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

على متجهي الوحدة؟

اعرض لهم بأن $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ وكذلك $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ قد انتقل على $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ وأن $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ وكذلك $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ قد انتقل على $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

استنتج بأن $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ هو عبارة عن تكبير بمعامل قياس 2.



2. أي مصفوفة تؤثر التحويل: الدوران بواسطة 180° ، متمركزة على نقطة الأصل؟ اسأل الطلبة رسم تأثير دوران 180° على متجه القاعدة.

تحقق معهم بأن $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ وأن $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. واسألهم عن النتائج التي ستعطيها المصفوفة 2×2 : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ كذلك $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. يجب أن يكون الطلبة على معرفة تامة بأن $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ يعطي العمود الأول بالمصفوفة 2×2 وأن $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ يعطي العمود الثاني.

وعليه فإن المصفوفة هي $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. وسوف ترد الكثير من الأمثلة والتعاريف تشابه تلك التي وردت في الاختبار البعدي.

وبالاعتماد إلى ما يصبو إليه، فقد يرغب المعلم بمناقشة التحويل للعكس Inverse Transformation، عند هذه النقطة، (يعني، ذلك الذي يقوم بعكس تأثير التحويل الأصلي) والتحويلات التي تتبعها تحويلات أخرى في نفس المسألة. يجب أن يكون المعلم مدركاً، أيضاً، قيمة استخدام المصفوفات، لأن معكوس المصفوفة يمثل معكوس التحويل، وأن ضرب مصفوفتين 2×2 يعرض تأثير تحويل يليه آخر.

أخذ النقطة العامة $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ وضربها بكل مصفوفة من هذه المصفوفات. وستكون إجابات الطلبة، على التوالي، $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ ،

$\begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$ من أجل هذا سيرى الطلبة (قد تحتاج الحالة الثانية

إلى نظرة عميقة) بأن المصفوفات $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ،

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ قد اكتملت بلا شك، في الحالة العامة، التحويلات

التي تعرفوا عليها في الأمثلة الخاصة.

لتحقيق أهداف الأداء، وكيف أن المصفوفات توفر أداة سهلة في العمل التحويلي، بين ماذا تفعل المصفوفة 2×2

بوحدة المتجهات $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

اختر أي مصفوفة من نوع 2×2 ، كما في المثال السابق،

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، واسأل طلبك القيام بضرب هذه المصفوفة مع وحدة المتجهين i و j .

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



استخدم مثلاً آخر:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$



استمر مع المزيد من الأمثلة لحين يصبح واضحاً لدى الطلبة بأن: في أي مصفوفة 2×2 ، فإن الضرب بـ

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ سوف يعطي العمود الأول $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ ، وأن الضرب بـ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

يعطي العمود الثاني $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. بعبارة أخرى، إن المصفوفة تنقل

متجهي القاعدة $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ على $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ على التوالي.

عندما يترك جميع الطلبة هذا الاستنتاج، بعدد يكون

التقييم اللاحق Postassessment

1 أي من التحويلات تمثل المصفوفة؟

$$(أ) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(ب) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(ج) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. جد المصفوفة لكل من التحويلات:

أ. الانعكاس على المستقيم $y=x$.ب. التكبير والمركز على نقطة الأصل، وبمعامل تكبير $\frac{1}{2}$.ج. الدوران بـ 90° .

طريقة الفروقات

The Method of Difference

(1, 8, 27, ...) n^3 . سادك أحد الطلبة بسرعة بأن الحد النونييمكن الوصول إليه بواسطة $n^2 + n$.

حاول أن تستبطن بأن عددا محدودا من مثل هذه التتابعات

يمكن إنتاجها باستخدام دوال متعددة الحدود المعروفة. بعدئذ

وضح للطلبة أن الطريقة البسيطة لإيجاد كل من الحد العام

ومجموع هذه التتابعات.

ويطلق على هذه الطريقة "طريقة الفروقات"، ورغم عدم

تعليمها بصورة عامة، لطلبة المدارس الثانوية، ولكنها رغم ذلك

تقع في متناولهم.

ليقم الطلبة بإعداد "الفروقات بين الحدود المتتالية" بالتتابع

أعلاه، وبعدئذ استمر بالعملية كما يظهر أدناه:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 12 & 36 & 80 & 150 & 252 & \dots \\ 10 & 24 & 44 & 70 & 102 & 140 & \dots \\ & 14 & 20 & 26 & 32 & 38 & \dots \\ & & 6 & 6 & 6 & 6 & \dots \end{array}$$

لاحظ بأننا قد أدركنا مستقيما من الفروقات والذي تتساوى فيه

جميع الحدود. واختبار هل أن هذه الحادثة هي عرضية

فحسب، دع الطلبة ينشئون تتابعات من مقدرات الحدود مثل

 $5n^2 + 3$ ، $2n^3 + 3$ ، مستعربين على هذا النوال، وبعدئذ كرر

العملية بأخذ الفروقات المتتالية. إن إجماعا سوف يبرز سريعا

بأن المستقيم الأخير وبحود متساوية هو بلا ريب سمة مميزة لمثل

هذه التتابعات. إن البرهان السوري لهذه القضية (رغم بساطته)

ليس ضروريا في هذا الوقت. لقد تم توفير الأعداد الكافي من

التحفيز لفرض اختبار الحالة المعروضة أدناه.

سرحب الكثير من الطلبة، والذي يمتلكون معرفة كافية بالتواليات الحسابية والهندسية، بالفرصة التي ستتيح لهم توسيع أبعاد معرفتهم بالتتابعات والسلاسل بصورة أكثر شمولاً من النوال البسيطة.

هدف الأداء Performance Objective

1 بإعطاء حدود كافية من تتابع يكون حده النوني عبارة عن

دالة نسبية محددة لـ n ، يقوم الطلبة بتأليف مجموعة

تتكون من الترتيبات المتوالية للفروقات.

2 بإعطاء مثل هذه المجموعة، سيستخدم الطلبة بعدئذ

طريقة الفروقات لإيجاد صيغ للحد النوني n^{th} Term

ومجموع الحدود النونية الأولى.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة ملمين بالنظرية ذات الحدين بالنسبة

للأس الموجب التام، والذي يدرس على نحو مألوف في المدارس

الثانوية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

أبدأ الدرس في تحدي الصف بإيجاد الحد العام للتتابع 2،

12. 36. 80. 150. 252، ... وبعد أن برهنت الجهود الأولية

للطلبة في إيجاد المتواليات الحسابية والهندسية المعروفة على عدم

نجاحها، حاول أن تلمح بأن التتابعات من هذا النوع يمكن

نوليدها بواسطة متعدد حدود منفرد، مثل $n^2(1,4,9,...)$ و

$$U_n = U_1 + (n-1)\Delta U_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \Delta_2 U_1 + \dots + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta_3 U_1 + \dots + \Delta_{n-1} U_1 \quad (6)$$

إذا توفرت رغبة كافية، يمكن الحصول بسهولة على البرهان الصوري للمعادلة (6) باستخدام الاستقراء الرياضي بعد إنشاء المقابلة:

$$a_{C_r} + a_{C_{r-1}} + \dots + a_{C_1} = a_{C_r}$$

وقد يرغب بعض المعلمين بإعادة كتابة المعادلة (6) بحيث يشابه الرمز الذي يستخدم غالباً في معالجة المتواليات الحسابية. ولإنجاز ذلك، ليكن الحد الأول من المتابع "a"، بينما تكون الحدود الأولى لكل مرتبة تالية من الفرق: $3d, 2d, 1d, \dots$ بعدد سيكون الحد النوني كما يأتي:

$$l = a + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots \quad (7)$$

إيجاد مجموع الحدود النونية الأولى

Finding the Sum of First n-Terms

اختبر المجموعة الآتية، والتي تعد فيها للمرة الثانية الحدود U_1, U_2 حدوداً بالمتابع المعلوم الذي نريد الحصول على مجموع.

O_1	S_2	S_3	S_4	S_5	\dots
U_1	U_2	U_3	U_4	\dots	\dots
ΔU_1	ΔU_2	ΔU_3	\dots	\dots	\dots

(8)

لاحظ بأن حدود S قد نشأت بواسطة العلاقات، مثل:

$$S_2 = O + U_1 = U_1$$

$$S_3 = S_2 + U_2 = U_1 + U_2$$

$$S_4 = S_3 + U_3 = U_1 + U_2 + U_3$$

$$S_5 = S_4 + U_4 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

إن، إذا استطعنا العثور على صيغة لـ S_{n+1} فسوف نجد أيضاً

مجموع الحدود النونية الأولى. ولإيجاد S_{n+1} يستطيع المرء تطبيق

المعادلة السابقة (6) ببساطة على المجموعة (8) أعلاه. وقبل

مباشرة ذلك، ينبغي أن يقارن الطلبة، بعناية، (8) مع (2).

بعدد، ينبغي أن يصبح جلياً بأن التطبيق المناسب للمعادلة (6)

سوف ينتج عنه:

$$S_{n+1} = 0 + nU_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta U_1 + \dots + \Delta_n U_n$$

أو

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = nU_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta U_1 + \dots + \Delta_n U_n \quad (9)$$

وكتوضيح للموضوع، دعنا نجمع المربعات النونية الأولى للأعداد الصحيحة،

المتابع المعطى: $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6 \dots$

المرتبة الأولى للفرق: $\Delta U_1, \Delta U_2, \Delta U_3, \Delta U_4, \Delta U_5 \dots (2)$

المرتبة الثانية للفرق: $\Delta_2 U_1, \Delta_2 U_2, \Delta_2 U_3, \Delta_2 U_4 \dots$

المرتبة الثالثة للفرق: $\Delta_3 U_1, \Delta_3 U_2, \Delta_3 U_3 \dots$

إن الرمز سيكون واضحاً بذاته لجميع الذين قاموا بكتابة

مجموعة من المجموعات السابقة. إذن:

$$\Delta U_3 = U_4 - U_3, \Delta_2 U_3 = \Delta U_4 - \Delta U_3, \dots$$

إذا كان رمز دلتا Δ محظوراً لحد كبير لدى البعض، فيمكن استبداله بسهولة بالحرف D .

من طريقة أعداد كل إدخال في (2) يمكن أن يلاحظ: بأن أي حد يساوي مجموع الحد الذي يليه مباشرة مضافاً إلى الحد الذي يقع على الجهة اليسرى أسفله.

وباستخدام هذه الملاحظة البسيطة فحسب، نستطيع الآن

وصف كل حد من المتابع المعلوم كدالة للحدود التي تقل عنها

وسوف يصنع حدود الجهة اليسرى. إذن

$$\Delta U_1 + U_1 = U_2 \quad (3) \quad \text{كذلك، } \Delta U_2 + U_2 = U_3, \text{ وأن:}$$

$$\Delta U_2 = \Delta U_1 + \Delta_2 U_1$$

$$U_3 = (U_1 + \Delta U_1) + (\Delta U_1 + \Delta_2 U_1)$$

$$U_3 = U_1 + 2\Delta U_1 + \Delta_2 U_1 \quad (4)$$

بالإشارة إلى معادلة (2) ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على متابعة الاستدلال الذي يؤدي إلى صيغة تخص U_4 بدلالة U_1 .

$$U_4 = U_3 + U_3 - \Delta U_3 + \Delta U_2 = \Delta U_3 + \Delta U_2 + \Delta U_1$$

$$\Delta U_2 = \Delta U_1 + \Delta_2 U_1 \quad \text{وأن } \Delta_2 U_2 = \Delta_2 U_1 + \Delta_3 U_1$$

$$\Delta_3 U_1 + 2\Delta_2 U_1 + \Delta U_1 = \Delta U_3$$

والآن باستخدام المعادلتين (3) و (4):

$$U_4 = (U_1 + 2\Delta U_1 + \Delta_2 U_1) + (\Delta U_1 + 2\Delta_2 U_1 + \Delta_3 U_1)$$

$$U_4 = U_1 + 3\Delta U_1 + 3\Delta_2 U_1 + \Delta_3 U_1 \quad (5)$$

وبجمع الانتباه إلى الصيغ المستقرة داخل الإطار لكل من U_2, U_3 .

U_4 يستطيع العلم استنباط الحقيقة بأن المعاملات العديدة

المتضمنة هي تلك التي تعود إلى نظرية ذات الحدين. لاحظ بأن

المعاملات المستخدمة للحد الرابع $(1+3+3+1)$ هي تلك الموجودة

في تحديد ثنائي الحد لأُس ثلاثة. وإذا بقي ذلك صادقا بصورة

عامة، ينبغي أن تكون قادرين على كتابة:

التقييم اللاحق Postassessment

ليقيم الطلبة بإيجاد الحد النوني ومجموع n من الحدود لكل مما يأتي:

$$(1) \dots 26, 17, 10, 5, 2 \dots$$

$$(2) \dots 125, 64, 27, 8, 1 \dots$$

$$(3) \dots 432, 280, 168, 90, 40, 12 \dots$$

ليقيم الطلبة بتوليد تتابعات، تخصهم، من متعددات حدود بسيطة، ثم يتحدون بها زملائهم في إيجاد الحد العام.

$$1, 4, 9, 16, 25 \dots$$

$$3, 5, 7, 9 \dots$$

$$2, 2, 2 \dots$$

إن مجموع :

$$n^2 = n.1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2$$

$$= \frac{6n + 9n(n-1) + 2n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

سيؤكد الطلبة بسرعة على صلاحية هذا التعبير. ومرة ثانية، كما نوهنا سابقاً، يستطيع المعلم انتخاب إعادة كتابة (9) بدلالة a, d_1, d_2, \dots, d_n وعلى هذا النوال.

تطبيق الاحتمالات على كرة القاعدة Probability Applied to Baseball



لم يقوموا بدراسة نظرية ذات الحدين)، وبالمقابل فإن الطلبة الأقدم يحتاجون إلى تهيئة أقل منها بكثير.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ينبغي أن يبدأ الدرس بمناقشة غير رسمية حول أي فريق يرجح فوزه بسلسلة العالم. وينبغي أن تجلب قصصات الجرائد التي تضم "الفرق" لكي يشد الطلبة إلى الموضوع بصورة أكبر. وأن هذا سوف يؤدي، مباشرة إلى التساؤل عن عدد المباريات المطلوبة لاتخاذ القرار.

طول السلسلة Length of Series

إذا رمز إلى سلسلة العالم بواسطة تتابع من الحروف التي تمثل الفريق الفائز NAANAA، تعني أن الاتحاد الوطني فاز بالمبارتين الأولى والرابعة بينما خسر في بقية المباريات)، تحدى طلبة الصف بإيجاد العدد الكلي للنتائج الممكنة.

ناقش الحل بدلالة "التبادل للأشياء" والتي لا تختلف جميعها". لاحظ ضرورة اعتبار الحالات المنفصلة للأهداف أربعة، خمسة، ستة، أو سبعة. واستنتج بأن المقيد في المسألة هو أن الفريق الفائز يجب أن يقوِّز باللمبة الأخيرة دائماً.

في كل سنة تتزامن الشهور الأولى للمدرسة مع الشهر الأخير لرابطة كرة القاعدة (baseball الأساسي). إن لعب سلسلة العالم World Series في أكتوبر يوفر عادة مورداً للإلهاء Distraction. ولكن بالنسبة لمعلمي الرياضيات يمكن أن يسخر هذا الحدث لتزويد طلبة الصف بتحفيز مناسب لحشد من تطبيقات الاحتمالات والتي تمتاز بقيمة أكاديمية جوهرية.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء فرق تقابل "فرق سلسلة العالم"، سيقيم الطلبة بحساب العدد المتوقع للمباريات التي سيتم خوضها.
2. بإعطاء متوسط الضربات لأي ضارب Hitter، سيقيم الطلبة باحتساب احتمال إحرازه لأي عدد معلوم من الضربات خلال اللعبة.

التقييم السابق Preassessment

إن الدراسة السابقة للتباديل والاحتمالية لا تعد ضرورية إذا تم توفير مناقشة تقديمية للطلبة حول الموضوع. إذن فالوضع مناسب للطلبة المتقدمين - الياقيين في المدارس الثانوية (والذين

بنفس الطريقة، وبالعودة إلى الوراء للعمل الذي اجري على التبادلات عند بداية الفرس، يكون من السهل عرض أن

$$10p^2q^2(q^2+p^2) \text{ (سلسلة 6 مباريات } p) \text{ وأن}$$

$$20p^3q^3(p+q)=20p^3q^3[p+q=1] \text{ (سلسلة 7 مباريات } p).$$

وعندما تكون المعلومات الكاملة قد استُنِيطت، يمكن توسيع جدول 2 إلى 5، 6 و 7 مباريات بالنسبة لمختلف الفرق الأولية. عند هذه النقطة، يمكن تقديم الطلبة إلى (أو يذكروا بـ) المفهوم المهم للتوقع الرياضي، $E(X)$. أن توفر الاحتمالات لكل نتيجة، $E(X)$ على طول السلسلة يمكن حسابها بسهولة.

الفرق 1:1

X-عدد المباريات	4	5	6	7
P(X)	.13	.24	.31	.31

$$E(X) = \sum X_i P(X_i) = 5.75$$

(يمكن تجنب الرمز \sum)

جدول 3

احتمالات الضربات Batting Probabilities

إن معظم الطلبة الذين يتابعون مباريات كرة القاعدة يعتقدون بأنهم يمثلون فهمًا واضحًا بمعنى "متوسط الضربات Batting Average"، والمعاني التي تتضمنها بالنسبة للضارب الذي يسمى إلى المباراة. من أجل هذا تحدد الصف باحتساب احتمالات حصول لاعب على ضربة واحدة، كحد أدنى، في أربعة مرات عند المنازلة إذا كان متوسط ضرباته على طول الموسم 25. قد يشعر البعض بوجود يقين افتراضي للضربة، نظراً لأن

$$\frac{1}{4} = 0.25.$$

ابدأ التحليل، كالسابق، باستخدام تتابع من الحروف لتأشير أداء الضارب (تدل NHNN على ضربة للمرة الثانية صعوداً). مرة ثانية، احسب العدد الكلي للتتابعات المحتملة، والذي يعتقد بأن يكون 16. ويمكن أن ينصح الطلبة الضعفاء بكتابة كل هذه التبادلات.

اختر أبسط حالة NNNN. ومن العمل السابق، فإن احتمالية هذه النتيجة يجب أن تكون جولية للطلبة لوصفها

$$P = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{(3)^4}{(4)^4} = \frac{81}{256} = 0.32 = \text{(عدم الضرب)}$$

(استدع $P(H) = \frac{3}{4}$ وأن $P(N) = \frac{1}{4}$.)

وبما أن جميع التتابعات الأخرى تتضمن ضربة واحدة، كحد أدنى، فإن احتمالاتهم المركبة هي $1 - 0.32 = 0.68$. إذن هناك فقط احتمال 68 بالمائة بأن الضارب سوف يحقق ضربة واحدة في

يمكن أن يعد جدولاً بالنتائج كما يأتي:

عدد المباريات التي أُجريت	4	5	6	7
عدد التتابعات	2	8	20	40

جدول (1)

فيما يتعلق بالاحتمالات فإن السلسلة سوف تستمر فعلاً: أربعة، خمسة، ستة، أو سبعة مباريات، وأن هذا الأمر يعتمد بلا شك على قوة الفرق. وسيدرك معظم الطلبة حذسياً بأن دلائل الفوز بالنسبة للسلسلة الطويلة سوف تزداد عندما تكون الفرق متكافئة فيما بينها، والعكس بالعكس.

إذا توفرت صحيفة "الفرق" يمكن أن يترجم ذلك إلى احتمالات فوز A، $P(A)$ ، وفوز B، $P(B)$. إذا كانت الفرق $m:n$ بعدد $p=m/(m+n)$.

بعد مناقشة مقيدة تستعرض خلالها المبادئ التي تشمل احتمالات الحوادث غير المعتمدة (والموضحة بإلقاء قطع النقود)، ينبغي أن يصبح واضحاً بأن احتمالية اكتساح الرابطة الأمريكية هو $P(4 \text{ في } A) = P(4 \text{ في } B)$. بنفس الطريقة $q^4 = P(4 \text{ في } N)$ ، وأن الاحتمالية الكلية لسلسلة المباريات الأربعة هي ببساطة $q^4 + p^4$. إن خير مكافئة للطلبة تكمن بإيجادهم لتأكيد ملموس لحدوسهم. لذا فإن من الأفضل تعويض القيم المختلفة لكل من P و q والتي تنتج عن الفرق المختلفة، كما تعرض في جدول (2) أدناه.

إذا كانت أفضلية A على الفرق	1:1	2:1	3:1
(سلسلة بأربع مباريات) P	.13	.21	.32

جدول (2)

يجب أن يشجع الطلبة على توسيع جدول القيم هذا. وقبل احتساب أرجحية سلسلة بخمس مباريات، استدع العمل الذي أنجز عند البداية لتحديد عدد التتابعات الممكنة للمباريات الخمسة. فهناك ثمانية من هذه التتابعات: (AAAA، AAAAA، AANAA، AAANA، ANNNN، ANNNN، ANNNN، ANNNN). وعلى جراً والاحتمالية المصاحبة لكل أول من الأربعة يمكن الحصول عليها بواسطة

$$p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p = q \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p = p \cdot q \cdot p \cdot p \cdot p = q \cdot q \cdot p \cdot p \cdot p = q^4$$

نظراً لكون النتائج مقصورة بصورة متبادلة، فإن احتمالية $p(4 \text{ في } A) = 4q^4q$ وبالمثل $p(4 \text{ في } N) = 4p^4p$ وأن الاحتمال الكلي لسلسلة بخمسة مباريات هو:

$$4p^4q + 4pq^4 = 4pq(p^3 + q^3)$$

كرة القاعدة مثل محاولات برنولي، وبالأخص في حالات منفردة مثل سلسلة العالم.

ومع ذلك، ليس ثمة قيمة في جعل الطلبة يناقشوا إحساسا "بالمرتبة الأولى للتقريب". في نفس الوقت فإن استبصارهم بتطبيقات الرياضيات يمكن تعميقه بمجابهة موضوع يشعرون خلاله بمستوى مقبول من الدراية وإنهم مؤهلين لعملية التقييم.

التقييم اللاحق Postassessment

ليتم الطلبة بما يأتي:

1. فك جدول 2 بالنسبة لكل من (سلسلة 5 مباريات) P، P(6)، P(7)، بالنسبة للفرق المعروضة، بالإضافة إلى فرق أخرى من الواقع.
2. اعد إنشاء جدول 3 بالنسبة لفرق من نوع 2:1، 3:1 وبعدئذ احسب E(X) لهذه الحالات.

أربعة مرات على الأقل. بينما لا تعد هذه النتيجة مروعة، ولكنها تستلزم بالتأكيد بعضاً من إعادة التشكيل بأسلوب التفكير لدى مجموعة من الطلبة.

بنفس الأسلوب، يمكن حساب الاحتمالات لحالات: الضربة الواحدة (أربعة نتائج محتملة)، الضربتان (سنة نتائج محتملة). وهكذا ... إن الموضوع أعلاه يمثل أمثلة على تجارب ذات الحدين. ومحاولات برنولي Bernoulli.

ناقش مع الصف تعريف محاولة برنولي، ومعيار تجربة ثنائي الحد باستخدام الرسوم التوضيحية مثل إلقاء حجر النرد، وإلقاء قطعة النقود. وهلم جرا. استنبط من الطلبة تقديرهم لدى أهمية هذه المفاهيم وتطبيقها على أحداث أخرى من الواقع الحياتي كما في اتحادات الشج في علم الجينات، ونجاح العمليات الطبية مثل الجراحة، وأخيراً نجاح ضارب الكرة في كرة القاعدة. هناك تحديدات ملازمة عندما نحاول معالجة أداء

مقدمة إلى التحويلات الهندسية

Introduction to Geometric Transformation



التحويلات قبل هذه الوحدة. وستكون المعرفة الكافية بالدوال ذات فائدة ملموسة أثناء دراسة هذه الوحدة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

سيهتم القسم الأول من هذه الوحدة بعرض مقدمة موجزة للتحويلات الثلاثة الخاصة بالحركة الصلبة والتي تشمل: التقلات، والتدويرات، والانكاسات.

ينبغي أن يستذكر الطلبة بأن دالة "واحد-إلى-واحد" و "على" هي عبارة عن تطابق. يعني $\overline{AB} \xrightarrow{\text{على}} \overline{CD}$ تدل ضمناً على أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

التقلات Translations

تأمل $\alpha \xrightarrow{\text{على}} T: \alpha$ ، يعني وضع المستوى بأكمله على ذاته في اتجاه متجه معلوم 7.

مبتدئين بمقدمة إلى التحويلات الثلاثة للحركة الصلبة Rigid، ستسهم هذه الوحدة بعرض كيفية إنشاء مجموعة حيث تكون العناصر تحويلات.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتعريف النقل، والتدوير، والانعكاس.
2. سيميز الطلبة التحويل المناسب من مخطط يعرض تغيير الموقع.
3. سيختبر الطلبة مسلمة الزمرة بالنسبة لمجموعة من التحويلات تحت التركيب.

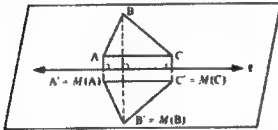
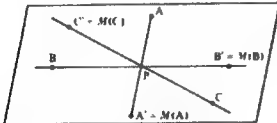
التقييم السابق Preassessment

يجب أن تعرض هذه الوحدة عندما يكون الطلبة قد أنقنوا مبادئ الهندسة. ويتنبأ أن يكون الطلبة على معرفة كافية بمبدأ الزمرة، ولكنهم لن يكونوا بحاجة إلى التمرس مسبقاً إلى

3. إذا كان ℓ في المستوى، كيف أن $\ell' = R_{90}(\ell)$ يتصلان؟ (التعامد).
4. ما هو معكوس R_{90} ؟ (R_{270} أو R_{630} ... الخ، أو R_{90}).
5. ما هو معكوس R_{180} ؟ (R_{180}).
6. إذا كان $R_a R_b$ يعني دوران b° يتبعه دوران a° ، صف $R_{48}, R_{36}, R_{24}, R_6^4, R_3^3, R_2^2$.
7. بسط $R_{180} \circ R_{200} = R_{200}$ ، $R_{360} = R_{720}$ ، $R_{360} = R_{720}$.
8. بسط $R_{270} = R_{90}$ ، $R_{360} = R_{0}$.
9. بسط $R_{480} = R_{480-360} = R_{120}$.

الانعكاسات Reflections

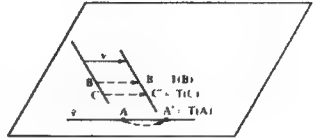
تأمل $\alpha: \ell \rightarrow \ell'$ على M_ℓ ، وضع المستوى يكمله على ذاته كما حدد بواسطة الانعكاس في نقطة أو مستقيم.



لإيجاد انعكاس نقطة A في نقطة معلومة P، قم بتحديد موقع النقطة A' على الشعاع AP (في الجهة المقابلة للنقطة P كما في A) بحيث $AP = A'P$. في الشكل أعلاه، A' هي صورة (أو انعكاس) A.

لإيجاد انعكاس نقطة A في مستقيم معلوم ℓ ، ثبت موقع النقطة A' على المستقيم العمودي على ℓ ويحتوي على A، بنفس المسافة عن ℓ كما A، ولكن في الجهة المقابلة. في الشكل السفلي، أعلاه، انعكست نقاط المثلث (والمثلث ذاته) في ℓ . مرة ثانية، هناك بعض الأسئلة لطبيعت:

1. ما هو معكوس M_ℓ ؟ (M_ℓ).
2. كيف تختلف الصورة عن صورتها السابقة؟ (اختلاف الاتجاه، أو "صورة مرآة").
3. كيف يغير انعكاس مستقيم في نقطة معلومة اتجاه المستقيم؟



في الشكل أعلاه، تم نقل كل نقطة في المستوى إلى نقطة جديدة في المستوى باتجاه ومسافة متجه النقل v . وفي هذا المقام $T(B) = B'$ ، حيث تمثل B' صورة B تحت النقل. وضعت النقاط على طول المستقيم ℓ ، والذي يوازي v ، على نقاط أخرى للمستقيم ℓ' .

لضمان فهم جيد لهذا النوع من التحويل اسأل طلبك الأسئلة الآتية:

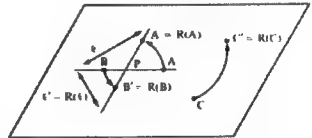
1. ما هي الخطوط التي رسمت على ذواتها؟ (تلك الموازية لمتجه النقل).

2. أي النقاط التي رسمت على ذواتها؟ (لا يوجد).

3. أي متجه يحدد مقلوب T؟ (سالب المتجه v).

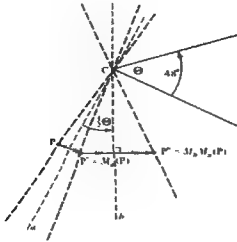
التدويرات Rotations

تأمل: $\alpha: R \rightarrow R$ على M_α ، يعني وضع المستوى يكمله على ذاته كما حدد بواسطة تدوير أي زاوية حول نقطة. سوف نتفق على أن نأخذ بعين الاعتبار التدويرات عكس عقرب الساعة فقط ما لم يحدد بطريقة أخرى.



تمثل R في الشكل أعلاه دورانًا بمقدار 90° حول P. إن الأسئلة التالية سوف تسهم بمساعدة طلبك على فهم هذا التحويل.

1. هل هناك ثمة نقاط توضع على ذاتها بواسطة الدوران R (نعم). (P).
2. هل هناك أي مستقيم يوضع على ذاته بواسطة الدوران R (لا)، ما لم يكون الدوران بمقدار 180° ، ويكتب R_{180} ، يعدد فإن أي مستقيم خلال مركز الدوران (P) سوف يوضع على ذاته).



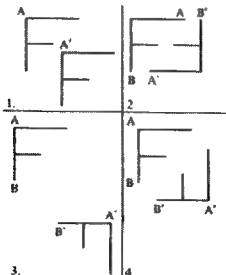
ارسم مستقيمين يمران خلال مركز الدوران C، ويؤلّفان زاوية بقياس $\frac{1}{2}\theta$. اختر أية نقطة P وقم بعكسها خلال المستقيم a ثم اعكس تلك الصورة خلال المستقيم b.

ولفرض الملائمة، ينبغي علينا استخدام المستقيم a قبل المستقيم b. وباستخدام زوجي المثلثات المتطابقة في الشكل أعلاه، نستطيع بسهولة البرهنة بأن $M_b M_a(P) = P$ هو بالحقبة يساوي $R_\theta(P)$.

والآن نستطيع استبدال النقلات والتدويرات بتركيب من الانعكاسات، أسأل طلبتك التحقق من أن زمرة من التحويلات لازالت يمتلك اليد. يجب عليهم عرض جميع الخصائص الأربعة المدرجة أعلاه.

التقييم اللاحق Postassessment

1. عرف النقل، والتدوير، والانعكاس.
2. صف كلاهما يأتي كتحويل منفرد.
3. بين أن الانعكاسات تؤلف زمرة تحت عملية التركيب.



(يغير ترتيب النقاط على المستقيم من الجهة المعلومة إلى الجهة الماكسة).

4. صف كل مما يأتي:

أ- $M_1(m)$ ، حيث ℓ/m .

ب- $M_1(n)$ ، حيث $\ell \perp n$ هو نفس المستقيم ℓ كما في (m).

ج- $M_1(k)$ ، حيث أن ℓ منحرف نحو k.

تؤلف k' نفس الزاوية مع ℓ كما تفعل k وفي نفس النقطة مثل k ولكن على الجهة القابلة لـ ℓ .

الزمر Groups

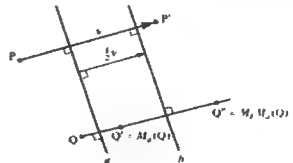
لفرض مناقشة زمرة من التحويلات فإن من المفيد استعراض

تعريف الزمرة ذاتها.

- 1 مجموعة بعملية واحدة.
- 2 خاصية مشاركة ينبغي أن تكون صحيحة.
- 3 ينبغي وجود عنصر تماثل أو تطابق.
- 4 كل عنصر يجب أن يمتلك معكوساً له.

إن اخذ العناصر بعين الاعتبار كثلثات أنواع من التحويلات سوف يحمل معه مزيداً من الارتباك، وعليه ينبغي علينا عرض ما يأتي (أ) أي نقل هو نتيجة لانعكاسين، و (ب) أي دوران هو نتيجة لانعكاسين. إن هذا الموضوع سوف يمكننا من العمل مع الانعكاسات على وجه الحصر. إن الكلمة "نتيجة" كما قد استخدمت أعلاه تشير إلى "تركيب Composition" التحويلات؛ يعني، إجراء تحويل بعد آخر.

أ- لبيان أن أي نقل T_v يكافئ تركيب انعكاسين، تأمل الشكل أدناه:



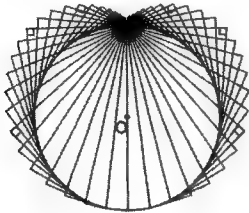
عند أي نقطة نهاية لكل متجه $\frac{1}{2}v$ تأمل المستقيمتان العموديتان على v . بواسطة الانعكاس فإن أي نقطة Q في مستقيم a ويمدّد في مستقيم b، نحصل على Q'' ، والتي هي $T_v(Q)$. يعني، $M_b M_a(Q) = Q'' = M_b M_a(Q)$ وأن $M_a(Q) = Q'$ ب- لبيان أن أي دوران R_θ يكافئ تركيب انعكاسين، تأمل الشكل أدناه:

الدائرة والقلب



The Circle and Cardioid

ولا يحتاج هذا المماس إلى أن ينشأ بالطريقة الكلاسيكية مستخدمين مسطرة عدلة وفرجار، ولكن بواسطة قالب مثلث، أو مسطرة النجار على شكل حرف T، وذلك عن طريق جعل أحد ساقي المثلث تمر خلال مركز الدائرة. إن رسم مماس للدائرة بهذه الطريقة يركز إلى حقيقة كون المماس إلى الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر عند نقطة التماس. ومن نقطة ثابتة، A، على محيط الدائرة (حيث أن النقطة A هي إحدى النقاط الـ 36)، اسقط عمودياً ليلقي t عند النقطة P. والآن أنشئ أعمدة على جميع النقاط (باستثناء النقطة A)، لكل مماس مكرراً الخطوة السابقة والخاصة بإسقاط عمود من A إلى t.



شكل (2)

إن الشكل الناتج سيبدو كما يظهر في شكل 2؛ إن المحل الهندسي لجميع تلك النقاط P هو عبارة عن قلب. بعدئذ ستكون النقطة A الطرف المستقيم بالقلب. في شكل 2، تم إلغاء بعض مستقيميات الإنشاء في شكل 1 لتحسين الرسم النهائي. كذلك، استخدمت 48 نقطة على طول دائرة القاعدة في شكل 2 للحصول على تأثيرات تظهر أكثر تماسكاً. أخيراً، لاحظ بأن اتجاه القلب في شكل 2 يختلف عن ذاك في شكل 1 بتدوير القلب حول A بمقدار 90° باتجاه عقرب الساعة.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء دائرة، سيكون الطلبة قادرين على رسم قلب دون استخدام معادلة.
2. سيكون الطلبة قادرين، وبواسطة التجريب، على توليد منحنيات غير القلب.

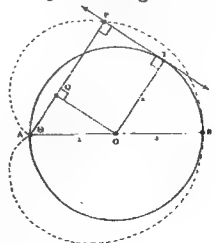
التقييم السابق Preassessment

قدم الطلبة إلى القلب عن طريق جعلهم يعدون جدولاً بقيم المعادلة $r = 2a(1 + \cos \theta)$. بعدئذ ليقم الطلبة بتحديد موقع النقاط المقابلة على مخطط بإحداثيات قطبية. وبعد أن يتموا العمل على إنشاء هذا المنحنى، والذي عرف بالقلب "Cardioid" (يشبه شكل القلب) بواسطة دي كاستيلون de Castillon في عام 1741. ينبغي أن يجذب الطلبة إلى تأمل بعض الطرق غير التقليدية والخاصة بإنشاء هذا المنحنى.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

طريقة Method I

أسأل الطلبة رسم دائرة قاعدة Base Circle، O، بقطر 3 إنشات، تتمركز بصورة متعادلة على ورقة بمقاس 8 × 11". باستخدام المنقلة قم بتقسيم المحيط إلى 36 نقطة بمساافات تباعد متساوية (انظر شكل 1). خلال أي من هذه النقاط الست وثلاثين، T، أنشئ مماساً، t، للدائرة.



شكل (1)

البرهان Proof

في شكل 1، لتكن A النقطة الثابتة على الدائرة O. لتكن A أيضاً القطب، والقطر \overline{AB} المستقيم الأولي، بنظام الإحداثيات القطبية. ارسم \overline{OT} . إذن، $\overline{AP} \parallel \overline{OT}$. من نقطة O اسقط عموداً ليلاقى \overline{AP} عند النقطة Q.

بعدئذ $\overline{OQ} \parallel \overline{TP}$ وأن $\angle OPTQ$ هو مستطيل. لتكن $r = AP$ ، $OT = OP = a$ وأن $\angle BAP = \theta$. بعدئذ من شكل 1

$$r = AQ + QP \quad (1)$$

في المثلث قائم الزاوية $\triangle AQO$ $\cos \theta = \frac{AQ}{a}$ بحيث

$$AQ = a \cdot \cos \theta \quad (2)$$

مع $QP = a$ واستخدام (2)، و (1) يصبح:

$$r = a \cdot \cos \theta + a \quad (3)$$

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

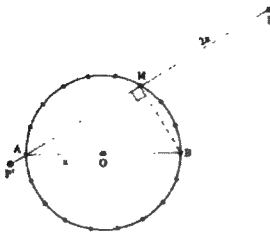
والتي تمثل المعادلة القطبية للقلب.

إن الطريقة الإجرائية التي عرضت أعلاه هي مثال على كيفية تكوين منحنى الدواسة لمنحنى محدد (يعني، يشار إلى القلب على أنه دواسة للدائرة O من ناحية A). إن جميع منحنيات الدواسة يمكن الحصول عليها بهذه الطريقة: تم اختيار بعض النقاط الثابتة بصورة اختيارية، وغالباً تكون على المنحنى ذاته، ومن تلك النقاط تسقط أعمدة على المسارات المختلفة لمنحنى مستقل.

إن المحل الهندسي لنقاط تقاطع الأعمدة على كل مماس من نقطة ثابتة يعرف بمنحنى الدواسة. ولو أن مماس الدائرة يمكن إنشاؤه بسهولة، ومن ثم رسم منحنى الدواسة، فإن إنشاءات الدواسة ذات الطبيعة المراثية لازالت تشكل تحدياً ملموساً.

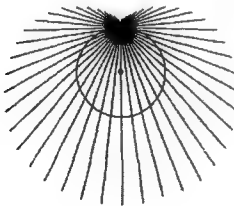
طريقة Method II

كما في طريقة I، ارسم دائرة قاعدة بقطر 3 بوصات، باستثناء أن الدائرة يجب وضعها في موقع يبعد 1 بوصة على يسار مركز الدائرة وعلى ورقة بمقاس $8\frac{1}{2}'' \times 11''$ يسك بها عمودياً (انظر شكل 3). قسّم الدائرة إلى 18 نقطة تبعد عن بعضها بمسافات متساوية. ضع على القطر الرمز $AB=2a$ مع نقطة ثابتة للمرة الثانية. لتكن M إحدى هذه النقاط الـ 18، ولتكن متميزة عن A. ضع حافة مسطرة مؤشرة على النقطة M، شريطة التأكد من مرور المسطرة خلال النقطة A. عين موقع النقطتين P، P' على



شكل (3)

المستقيم \overline{AM} ، على جهتي النقطة M، وبمسافة مقدارها 2 وحدة عن النقطة M. إذن النقطة M هي نقطة منتصف $\overline{PP'}$. استمر بالنسبة لجميع هذه النقاط مثل M، حيث أتبع للنقطة M الانتقال إلى كل من النقاط المتبقية (لنقاط الـ 18 التي اختيرت أولاً) حول المحيط إن المحل الهندسي لجميع هذه النقاط P، P' هو عبارة عن قلب (انظر شكل 4).



شكل (4)

البرهان Proof

في الشكل 3، ارسم \overline{MB} ، ودع $AP=r$ ، وكذلك $\angle BAM = \theta$. بما أن $\triangle AMB$ هو مثلث قائم الزاوية،

$$AM = 2a \cdot \cos \theta \quad (4)$$

ولكن،

$$r = AM + MP \quad (5)$$

وبواسطة الإنشاء، $MP=2a$. بتعويض هذا بالإضافة إلى تعويض

(4) في (5)، نحصل على:

$$r = 2a \cdot \cos \theta + 2a$$

$$r = 2a(1 + \cos \theta)$$

$$(6)$$

للدائرة C_1 عند النقطة O ، قد تم دمجتها الآن إلى الموقع العريض في شكل 5، حاملة معها نقطة ثابتة P . المطلوب هو المحل الهندسي لـ P .

الدائرة C_2 هي الآن مماسة للدائرة C_1 عند النقطة T . إن الخط الذي يصل النقطتين C_1 و C_2 سوف يمر خلال T . بما أن $PT \cong OT$ ، $C_2P = a$ ، فإذا رسم $m\angle OC_1T = m\angle PC_2T$ ، $PT \cong OT$ بالإضافة إلى \overline{OP} ، سنحصل على شبه المنحرف متساوي الساقين OC_1C_2P ، وأن $m\angle POF = \theta$.

اسقط أعمدة من O و P إلى $\overline{C_1C_2}$ بحيث تلقي معه عند النقطتين D و E ، على التوالي. على الفور سيكون: $\triangle ODC_1 \cong \triangle PEC_2$ ، والتي سينتج عنها $C_1D = EC_2$. في المثلثين ODC_1 و PEC_2 .

$$C_1D = a \cdot \cos \theta \quad (8)$$

وأن،

$$C_2E = a \cdot \cos \theta \quad (9)$$

والآن،

$$C_1C_2 = 2a = C_1D + DE + C_2E \quad (10)$$

بتمويض (8) و (9) في (10) وبتذكر أن $DE = OP = r$ ،

$$2a = a \cdot \cos \theta + r + a \cdot \cos \theta \quad (11)$$

والذي سينتج عنها بعد التبسيط،

$$r = 2a(1 - \cos \theta) \quad (12)$$

وهذه المعادلة تناظر المعادلة (7).

إن مفهوم درجة الدائرة بصورة سلسلة على محيط دائرة أخرى، ثابتة، قد تمت دراستها بصورة جيدة. وأن المحل الهندسي لنقطة على محيط الدائرة المتدرجة سيؤدي إلى ظهور منحني يطلق عليه المسار الدويري الفوقي Epicycloid، والذي يعد القلب حالة خاصة من حالاته. أن تغيير نسبة الدائرة الثابتة سينتج عنه مجموعة معروفة من منحنيات المستوى الأعلى.

التقييم اللاحق Postassessment

أرجع إلى الطريقة I لرسم التغيريين الآتيين، ويعمل ذلك، حاول الحصول على معادلة تشابه (3):

(أ) اختر النقطة الثابتة A "خارج" الدائرة بحيث تبعد بمسافة $2a$ وحدة من O ؛

(ب) اختر النقطة الثابتة A "داخل" الدائرة بحيث تبعد بمسافة $\frac{2}{a}$ وحدة عن O .

تؤلف a تناظراً مع (3) باستثناء الثابت $2a$. وبالنسبة لـ $\theta + 180^\circ$ ، نحصل على P' ، بحيث أن $r = AP'$. وبما أن $\theta + 180^\circ = -\cos \theta$ سنكون قد حصلنا على:

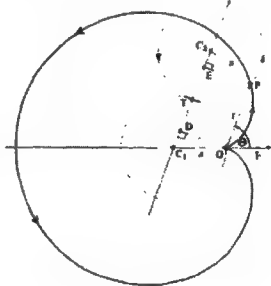
$$r = 2a(1 - \cos \theta) \quad (7)$$

فنكون قد كررنا الخطوات أعلاه.

إن إنشاء القلب الذي أوردناه هنا هو مثال على منحنى محارة الأذن Conchoide Curve. وباستخدام هذه التقانة مع قطع ناقص، فإن استخدام النقطة الثابتة قد يكون طرف للمحور الرئيسي أو الثانوي. ويتغير طول المستقيم على كل جهة من جهتي M لكي تساوي المحور الرئيسي، أو الثانوي سينشأ عنه عدة تركيبات مثيرة للاهتمام من منحنيات محارة الأذن للقطع الناقص.

طريقة Method III

يمكن أن نولد القلب أيضاً كمحل هندسي لنقطة P ، على محيط دائرة متدرجة، والتي تتدرج دون أن تنزلق على دائرة ثابتة بقطر مساوي.



شكل (5)

البهران Proof

لتكن الدائرة الثابتة C_1 ، بنصف قطر a متمركزة على قطر نظام إحداثيات قطبية. دع النقطة O تكون نقطة تقاطع الدائرة C_1 مع المستقيم الأولي. الدائرة C_2 ، والتي كان موضعها الأولي مماساً

تطبيقات العدد المركب (العقدي)

Complex-Number Applications

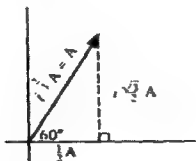
بينما تشير قمة السهم إلى اتجاهه. (للتمييز بين المتجه والكميات غير المتجهة، تكمن في وضع خط فوق الرمز للإشارة إلى الكمية المتجهة، \vec{A} ، بينما يؤثر الرمز بلا خط إلى كمية غير متجهة، A). والآن، إذا أُجريت \vec{A} بواسطة 1- (ضربت بواسطة 1-). سيكون لدينا $-\vec{A}$ الذي سيكون تمثيله الرسومي ←. إذن، الإجراء على المتجه \vec{A} بواسطة 1- سيقوم بتدويره بمقدار 180° بالاتجاه الموجب. والآن، بما أن $i^2 = -1$ ، فإن i يجب أن تمثل دوران المتجه خلال زاوية مقداره 90° ، نظراً لأن إجرائين بـ 90° سوف ينشئ بينهما دوران بمقدار 180° . وعليه، فإن الإجراء على متجه بواسطة i^3 سيدير المتجه خلال 270° ، وهكذا بنفس الطريقة، نستطيع أن نأخذ بعين الاعتبار استخدام إجراء مثل الجذور العليا للكمية (1-)، والتي ستدير المتجه بزاوية أصغر.

لذا فإن $i^{2/3} = (i^2)^{1/3} = \sqrt[3]{-1}$ سوف يدير المتجه بزاوية مقداره 60° نظراً لأن ثلاثة تطبيقات لهذا الإجراء تكافئ الإجراء بواسطة 1-، نستطيع أن نعرض هذا في مخطط متجه. لدينا متجه \vec{A} ، مقداره A ، ونقوم بإجراء عليه مقداره $i^{2/3}$. يعني تدوير المتجه بمقدار 60° .

إن هذا الأمر، بالطبع، لن يغير مقداره، A . وعليه فإن المركبة الحقيقية هي:

$$A \cos 60^\circ = \frac{1}{2} A$$

$$\text{وأن المركبة الخيالية هي: } A \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} A$$



(شكل 1)

إن نظام الأعداد الذي نستخدمه بالوقت الحالي قد استغرق زمناً طويلاً لكي يتطور فيصبح كما هو الآن بين أيدينا. وبالنسبة للإنسان في العصور المبكرة، كانت أرقام العد كافية لتلبية احتياجاته. فالكسور البسيطة مثل وحدات الكسور قد وظفها الفراعنة في معاملاتهم. بينما لم يدرك اليونان الأوائل الأعداد غير النسبية، وأن العوز إليها بالمائل الهندسية كان سبباً للقبول بها والموافقة عليها.

والأرقام السالبة استخدمت كذلك عندما أوضحت استخداماتها الفيزيائية ضرورة ملحة، مثل استخداماتها في وصف درجة الحرارة. ولكن الأعداد المركبة قد بوشر بدراستها لعدم اكتمال نظام الأعداد الحقيقية بمنظور جبري دونها. أن تطبيقاتهم في العالم الفيزيائي لم تستكشف كثير من جوانبه بواسطة معظم طلبة الرياضيات. من أجل هذا ستعمل هذه الوحدة على تقديم أبسط التطبيقات الفيزيائية للأعداد المركبة.

أهداف الأداء Performance Objectives

سيكون الطلبة قادرين على حل بعض المسائل الفيزيائية، والتي تتضمن أعداداً مركبة وكميات متجهة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بعمليات الأعداد المركبة وتحليل المتجه. وينصح كذلك بمعرفة جيدة بمبادئ الفيزياء.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

يعرف المستوى المركب، في الجبر، على أنه عبارة عن محوري إحداثيات مستطيلة والتي ترسم فيها الأجزاء الحقيقية للأعداد المركبة على طول المحور الأفقي، بينما ترسم الأجزاء الخيالية على طول المحور العمودي. يمكن أن يطور هذا المستوى المركب إذا تبيننا أسلوباً بحيث تعامل i كـ "علامة على التعماد". وبوصفها إجراء يعمل على تدوير متجه خلال زاوية مقداره 90° . ولتطوير هذه الفكرة، نبتدئ بأي كمية متجهة، A ، والتي مثلت بواسطة متجه \rightarrow والذي يؤثر طوله إلى مقداره،

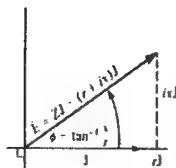
لدينا متجه التيار $\vec{J} = j_1 + ij_2$. ويمكن تمثيل الجهد لهذا التردد بواسطة $E = E_1 + iE_2$. إن معاوقة الدائرة Impedance (المقاومة الفعالة للتيار)، ليست متجهها، ويمكن تمثيلها بواسطة $Z = r + ix$ حيث r هي المقاومة الأومية Ohmic Resistance وأن x هي الفاعلة Reactance. إن الزاوية بين \vec{E} و \vec{J} هي زاوية الطور Phase Angle (الزاوية التي يتأخر بها التيار وراء القوة الكهرومغناطيسية emf (Electromagnetic force).

وتمثل بواسطة الصيغة $\phi = \arctan \frac{r}{x}$.

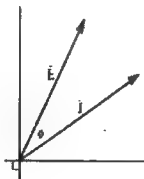
نستطيع الحصول رياضياً على ناتج معاوقتين اثنتين إلا أنه ليس لها ثمة معنى فيزيائي. وأن حاصل ضرب الجهد والتيار، ورغم عدم وجود معنى فيزيائي له يشار إليه بالقدرة الظاهرية Apparent Power. ولكن، إذا أخذنا حاصل ضرب التيار والمعاوقة:

$$Z\vec{J} = (r+ix)(j_1+ij_2) = (rj_1+xj_2) + i(rj_2+xj_1)$$

سيكون لدينا الجهد لنفس تردد التيار، الجهد الحقيقي Actual Voltage، يعني $Z\vec{J} = \vec{E}$. وهذا هو قانون أوم Ohm's Law في صيغته المركبة (حاول استدعاء أن قانون أوم ينص على أنه بالنسبة للتيارات المستمرة Direct Currents فإن الجهد يساوي حاصل ضرب المقاومة مع التيار). وعليه، في التيار المستمر يتعامل المرء مع كميات غير متجهة Scalar Value بينما في دوائر التيار المتناوب تكون الكميات عبارة عن متجهات توصف كأعداد مركبة، وينطبق عليها قوانين جبر المتجهات. وفي الأشكال التخطيطية الآتية لقانون أوم، يحتوي المخطط (4) على \vec{J} على المحور الحقيقي، أما المخطط (5) فلا يحتوي ذلك. والآن دعنا نحاول العمل على بضعة مسائل.



شكل (4)



شكل (5)

مثال Example 1

دع $r = 5$ أوم، $x = 4$ أوم، وأن التيار J يساوي 20 أمبيراً. خذ \vec{J} على المحور الحقيقي.

وعليه فإن:

$$\sqrt{-1} \vec{A} = i^{2/3} \vec{A} = A \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$$

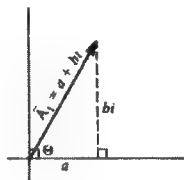
والذي يشير إلى موقع المتجه. بهذه الطريقة

$$\sqrt{-1} \vec{A} = i^{2/3} \vec{A} = A \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$$

لكي نعم الحالة، لتدوير متجه A خلال زاوية θ نستخدم الإجراء $\cos \theta + i \sin \theta$.

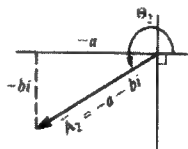
والآن، إذا كان لدينا متجه $\vec{A}_1 = a + bi$ ، نستطيع رسمه على المستوى المركب، ويكون موقع المتجه محددًا بواسطة

$$A_1 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta_1 = \arctan \frac{b}{a}$$



شكل (2)

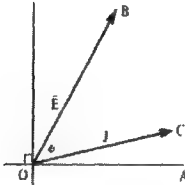
ويظهر المتجه \vec{A}_1 في شكل 2. بنفس الطريقة، المتجه $\vec{A}_2 = -a - bi$ ومقداره $A_2 = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2}$ مساوياً لقيمة المتجه \vec{A}_1 . ويتحدد موقعه بواسطة $\theta_2 = \arctan \frac{-b}{-a}$ ويقع في الربع الثالث كما يظهر في شكل 3. والآن، نستطيع استكشاف التفسير الفيزيائي لهذه الإجراءات. ففي كتب الفيزياء تمثل $\sqrt{-1}$ بواسطة الحرف j ، والتيار الكهربائي بالحرف I .



شكل (3)

بما أن هذه الوحدة قد أعدت خصيصاً لطلبة الرياضيات، فسوف تستخدم i لكي تمثل $\sqrt{-1}$ ، ومن أجل الوضوح سوف نستخدم الحرف J لوصف التيار الكهربائي. في دراسة التيار المتناوب Alternating Current، يكون

إن مخطط المتجه لهذه المسألة سيكون:



شكل (7)

ينبغي أن يكون الطلبة الآن قادرين على حل مسائل فزيائية مشابهة تتضمن أعداداً مركبة.

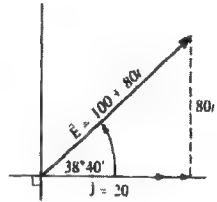
التقييم اللاحق Postassessment

1. لتكن $z = 3 + 4i$ أوم، $x = 4$ أوم. خذ \bar{J} على المحور الحقيقي، $J = 3$. جد المعاوقة Z ، الصيغة المعقدة لـ \bar{E} ومقدار E . ما هي الزاوية التي تصنعها \bar{E} مع المحور الحقيقي؟ ما هي θ ، زاوية الطور؟ ارمس مخطط المتجه لهذه المسألة.
2. استخدم البيانات الواردة في المسألة السابقة، ودمج \bar{J} تصنع زاوية مقدارها 20° مع المحور الحقيقي. اعد حساب جميع الكميات، لكل من الصيغ المركبة والمقادير، ثم ارمس مخطط المتجه.
3. لتكن $\bar{E} = 4 + 14i$ وأن $\bar{J} = 2 + 3i$. جد الصيغة المركبة لـ Z ومقدارها. ما هي زاوية الطور؟ ارمس مخطط المتجه.

مرجع Reference

Suydam, Vernon, A., Electricity and Electromagnetism, New York: D Van Norstrand Company, 1940.

بإعطائنا هذه المعلومات، سيكون لدينا المعاوقة $Z = 5 + 4i$. إن الدائرة المحثة Inductive هي $\bar{E} = \bar{J}Z = 20(5 + 4i)$. $\bar{E} = 100 + 80i$ وعليه فإن: $E = \sqrt{100^2 + 80^2} = 128$ فولت. إن الزاوية التي تصنعها \bar{E} مع المحور الحقيقي هي $\theta = \arctan \frac{80}{100} = 38^\circ 40'$ ، وهو نفس الشيء الذي سيحصل مع زاوية الطور لهذه المسألة. إن مخطط المتجه قد عرض في شكل 6.



شكل (6)

مثال 2 Example

دعنا نقوم بتعديل المثال السابق قليلاً وذلك بجعل الزاوية التي يصنعها متجه التيار \bar{J} مع المحور الحقيقي 30° ، وسوف ندع بقية البيانات كما هي في المثال السابق.

سيبقى لدينا $Z = 5 + 4i$ ، وسيكون لدينا الآن

$$\bar{J} = 20(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 20(0.866 + 0.5i) = 17.32 + 10i$$

$$\bar{E} = \bar{J}Z = (17.32 + 10i)(5 + 4i) = 46.6 + 119.28i$$

السابق فإن الزاوية التي تصنعها E مع المحور الحقيقي هي $\theta = \arctan \frac{119.28}{46.6} = 68^\circ 40'$ وستبقى زاوية الطور ϕ كما هي. $\theta = \arctan \frac{4}{5} = 38^\circ 40'$

الحساب الهندي

Hindu Arithmetic

عندما نقارنه بنظام الزمر كالذي استخدمه المصريون القدماء. وعليه، سيمثل العدد 5639 بالنظام الهندي بطريقة مشابهة لنظامنا الحالي.

عند هذه النقطة تستطيع مناقشة أهمية رمز الصفر في النظام الهندي. إن المقارنة التي ستقيمها للنظام الهندي مع نظام العددي المصري سوف يكون مصدراً مثقفاً (انظر وحدة 14 حول حساب المصريين القدماء). ويمكن التحري عن الأهمية التاريخية للصفر، لأن الأعداد بدون صفر كانت تورث الإرباك، وأن الحسابات المعقدة كانت بالغة الصعوبة. وفي النظام الهندي فإن الاحتفاظ بالسجلات والحسابات الأخرى التي تمت ضرورة للاقتصاد، والحسابات الفلكية، والجداول الرياضية قد تم وضعها بالمقدمة، لأنه مع وجود أعداد بمواقع محددة تكون عملية كتابتها وقراءتها أكثر سهولة، ويمكن معالجتها ببراعة وسهولة. كتبت الحسابات الهندية، بصورة عامة، على سطوح حيث يمكن إجراء التعديلات والإلغاءات بسهولة. وبالنسبة لأهدافنا، بدلاً من إلغاء الأعداد سوف نقوم بشطبها بحيث أن الطرق التي نوقشت ستسهل عملية متابعتها.

إن الجمع الهندي أقيم بصورة عمودية كما في الطريقة الشائعة لدينا الآن، ويجري من اليسار إلى اليمين. تأمل المسألة: $6537+886$. يبدأ الجمع على اليمين مع 8 التي أضيفت إلى 7، إن العدد 13 أضيف إلى العدد على اليسار، 6، فغيره إلى 7، وأن 5 تحولت الآن إلى 3. وتستمر العملية، من اليسار إلى اليمين. إذن، الحل سيبدو مثل الآتي:

$$\begin{array}{r} 7 \ 4 \ 2 \\ 7 \ X \ X \ 3 \\ \hline 8 \ 8 \ 6 \end{array} \quad (\text{النتيجة هي } 7423)$$

وتجري عملية الطرح، أيضاً، من اليسار إلى اليمين، حيث يوضع العدد الأكبر فوق الأصغر. لطرح 886 من 6537، سوف

يمكن إثراء المنهج الدراسي لمادة الرياضيات، بالنسبة للطلبة بمستويات عدة، عن طريق دراسة نظام أعداد وحسابه. إن إجراء تحري في ميكانيكية النظام، ودوره في نظامنا الخاص، ونقاط التماس الأخرى المناسبة والتي يمكن للطلبة الولوج فيها عند المستويات الثانوية. وبالنسبة لطلبة أخرى، ستسهم هذه العملية بوصفها تمريناً على المهارات الأساسية بالأعداد الصحيحة، لأن الطلبة سوف يتفحصون الإجابات التي توصلوا إليها عند العمل على المسائل. من أجل هذا تقدم هذه الوحدة الطلبة إلى رموز النظام العددي الهندي ونظم الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة السائدة فيه (Circa 900, India).

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء مسألة جمع، سيقوم الطلبة بإيجاد الإجابة باستخدام الطريقة الهندية.
2. بإعطاء مسألة طرح، سيقوم الطلبة بإيجاد الإجابة باستخدام الطريقة الهندية.
3. بإعطاء مسألة ضرب، سيقوم الطلبة بإيجاد الإجابة باستخدام الطريقة الهندية.
4. بإعطاء مسألة قسمة، سيقوم الطلبة بإيجاد الإجابة باستخدام الطريقة الهندية.

التقييم السابق Preassessment

يحتاج الطلبة، فقط، إلى معرفة كافية بالعمليات الأساسية للأعداد الصحيحة، يعني، الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن رموز الأعداد التسعة التي تستخدم بالحساب الهندي Hindu Reckoning وفق الترتيب التصاعدي هي:

٠, ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩

إن هذا النظام يتضمن رمزاً للصفر، 0، وهو نظام وصفي الرموز Positional System، كما هو الحال بنظامنا الحالي،

نبدأ بطرح 8 من 5. ونظرا لاستحالة هذا الأمر، سوف نقوم بطرح 8 من 65، تاركين 57. نضع 5 في موضع 6، و 7، في موضع 5. ونستمر بهذه العملية بطرح 8 من 3 مستخدمين الطريقة التي تم وضعها. وسيبدو حل المسألة التامة كما يأتي:

$$\begin{array}{r} 6 \\ 5 \ 7 \ 5 \ 1 \\ \times \quad \times \quad \times \quad \times \\ \hline \end{array} \quad (الناتجة هي 5651)$$

لكني نقوم بالضرب كما فعل الهندوس، نبدأ بوضع أرقام الوحدات للضارب تحت أكبر موضع لموقع المضروب Multiplicand. فلضرب 537 بـ 24 نبدأ بهذه الطريقة:

$$\begin{array}{r} 5 \ 3 \ 7 \\ \times \quad 2 \ 4 \\ \hline \end{array}$$

سنضرب 2 بـ 5 ونضع الناتج 0 فوق 2، وال 1 على اليسار. والآن نضرب 4 بـ 5، ونضع الناتج 0 في موضع 5 وفوق 4، ونضيف 2 إلى 0، والآن لدينا 2 في الموضع التالي:

$$\begin{array}{r} 2 \ 0 \\ 1 \ 8 \ 3 \ 7 \\ \times \quad 2 \ 4 \\ \hline \end{array}$$

والآن وقد انتهينا من 5، ستقوم بنقل الضارب مرتبة واحدة إلى اليمين، فاصبحت 4 الآن أسفل 3، موضحة أن 3 هو العدد الذي نهمت به الآن.

$$\begin{array}{r} 2 \ 0 \\ 1 \ 8 \ 3 \ 7 \\ \times \quad 2 \ 4 \\ \hline \end{array}$$

نبدأ بالضرب، كالمسابق. أولاً 2 بـ 3، بعدئذ 4، وعندما تنتهي ننتقل ثانية إلى اليمين. وعندما نكون قد أنجزنا المسألة بكاملها سوف تبدو مثل هذا النسق:

$$\begin{array}{r} \text{III} \\ 1 \ 8 \ 3 \ 7 \\ \times \quad 2 \ 4 \\ \hline 2 \ 0 \\ 1 \ 8 \ 3 \ 7 \\ \times \quad 2 \ 4 \\ \hline \end{array}$$

يمكن ملاحظة بأن الشطب، بدلا من الإلغاء، يتطلب فراغا. ولما كانت عملية القسمة تعد الأكثر تعقيدا بين العمليات الأساسية، سيتم حل المسألة خطوة بخطوة، بدلا من الشطب، ويتموضع النتائج الجديدة بالنسبة للأعداد القديمة.

لكي نقسم، نضع المقسوم عليه Divisor تحت المقسوم، راصفين إياهم على اليسار. إذن، بدأنا المسألة 5832÷253 كما

5832
253. ولما كانت 253 أسفل 583، سوف نبحت عن عدد لنضرب 253 به بحيث أن حاصل الضرب يكون مقارباً إلى 583 قدر الإمكان، ودون أن يزيد عليه. إن الرقم الذي نقش عنه في هذا المقام هو 2، وعليه سيتم وضعه:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 5 \ 8 \ 3 \ 2 \\ \times \quad 2 \ 5 \ 3 \\ \hline \end{array}$$

والآن سنقوم بضرب 253 بـ 2 (كما فعل الهندوس) ونطرح النتيجة من 583 (كما فعل الهندوس أيضاً). إن هذا سيعطينا 77، والذي سنضعه في موضع 583. والآن سيكون لدينا:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 7 \ 7 \ 2 \\ \times \quad 2 \ 5 \ 3 \\ \hline \end{array}$$

سيتم نقل المقسوم عليه إلى اليمين لنحصل على:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 7 \ 7 \ 2 \\ \times \quad 2 \ 5 \ 3 \\ \hline \end{array}$$

تستمر العملية كما فعلنا أعلاه، لحين وصولنا إلى النتائج.

$$\begin{array}{r} 23 \\ 13 \\ \times \quad 253 \\ \hline \end{array}$$

والتي تعرض بأن خارج القسمة سيكون 23 وأن المتبقي 13.

ابحث هذه العمليات مع طلبتك إلى الحد الذي تراه ضروريا ومناسبا. سوف تجد بوضوح وجود شبه كبير لهذه الخوارزميات مع تلك التي نستخدمها بوقتنا الراهن.

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقيم الطلبة بكتابة الأعداد الآتية باستخدام نظام العدد الهندي:

$$230796 \quad (\text{ب}) \quad 5342 \quad (\text{أ})$$

2. ليقيم الطلبة بحل المسائل الآتية باستخدام الطرق الهندية.

$$8734 - 6849 \quad (\text{ب}) \quad 3567 + 984 \quad (\text{أ})$$

$$65478 \div 283 \quad (\text{د}) \quad 596 \times 37 \quad (\text{ج})$$

مراجع مقترحة Suggested References

Waerden, B. L., Van der, Science Awakening, New York: John Wiley & Sons, 1963.

Eves, Howard, An Introduction to The History of Mathematics, 4th ed., New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976.

برهنة أن الأعداد غير نسبية

Proving Numbers Irrational

118

والآن سنقوم بضرب (I) بواسطة q^n للحصول على

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلة كالآتي:

$$a_n p^n = -a_{n-1} p^{n-1} q - \dots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n$$

أو

$$a_n p^n = q(-a_{n-1} p^{n-1} q - \dots - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1})$$

إن هذا الأمر يعرض بأن q هي قاسم $a_n p^n$. ولكن إذا كانت p/q في حدودها الدنيا، بعدد سيكون كل من p و q أعداداً أولية نسبياً، وعليه ستكون q قاسماً لـ a_n . وب نفس الأسلوب، إذا عاودنا كتابة معادلة (I) كالآتي:

$$a_0 q^n = p(-a_1 q^{n-1} - \dots - a_{n-1} p^{n-2} q - a_n p^{n-1})$$

سنلاحظ بأن p هي قاسم $a_0 q^n$. مرة ثانية، لأن كل من p و q أعداد أولية نسبياً، وسيكون لدينا بأن p هي قاسم a_0 . وهنا سيتم برهان هذه النظرية.

مثال 1 Example

برهن بأن أن $\sqrt{5}$ غير نسبية.

إن $\sqrt{5}$ هي جذر للمعادلة $x^2 - 5 = 0$. بعدد وبناء على الرموز المستخدمة في النظرية، $a_2 = 1$ ، $a_0 = -5$. والآن، فإن أي جذر غير نسبي، p/q ، بهذه المعادلة سيكون بحيث أن p ينبغي أن تقسم -5 ، وأن q سوف تقسم 1. ويعود هذا إلى ما ورد في النظرية السابقة.

ولكن القاسم الوحيد للعدد 1 هو 1 و -1. إذن يجب أن تكون q إما 1 أو -1، وينبغي أن يكون الجذر النسبي للمعادلة عدداً صحيحاً. إن هذا العدد الصحيح، p ، في ضوء ما ورد بالنظرية يجب أن يقسم -5 ، والقواسم الوحيدة لـ -5 هي: 1، -1، 5، -5. ولكن أياً من هذه الأعداد لا يعد جذراً من جذور المعادلة $x^2 - 5 = 0$ ، يعني أن:

$$(-5)^2 - 5 = 0 \neq 0, (5)^2 - 5 = 0 \neq 0, (-1)^2 - 5 = 0 \neq 0, (1)^2 - 5 = 0 \neq 0$$

جميعاً False. إذن، $x^2 - 5 = 0$ لا تمتلك جذراً نسبياً، وأن $\sqrt{5}$ عدد غير نسبي.

عندما تعرض الأعداد غير النسبية على طلبة المدارس الثانوية، يطلب منهم عادة قبول حقيقة أن بعض هذه الأعداد مثل $\sqrt{2}$ ، $\sin 10^\circ$ ، وما يشابهها لا تعد غير نسبية. ولكن كثيراً من الطلبة يتساءلون عن كيفية البرهنة على كون عدد ما ليس نسبياً. تعرض هذه الوحدة طريقة للبرهنة على اللانسيبية التي يمتاز بها بعض الأعداد الجبرية.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء بعض الأعداد الجبرية المعلومة سيكون الطلبة قادرين على برهنة لانسبيتها.
2. سيجد الطلبة بعض الأنماط المحددة والتي سوف تحدد مقدماً فيما إذا كان عدد جبري ما غير نسبي.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بمبادئ الأعداد غير النسبية. والأعداد الجبرية. كذلك يجب أن تتوفر لديهم خلفية عامة بالمعادلات الجبرية، والجذور، والمثلثات، واللوغاريتمات.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ الدرس بسؤال الطلبة إعطاء أمثلة عن أعداد غير نسبية. وأسألهم عن كيفية تأكدكم من أن هذه الأعداد غير نسبية. بعدد دعهم يعرفون الأعداد غير النسبية. سيكون الطلبة جادين بصورة كافية عند هذه النقطة للرغبة في سير النظرية الآتية:

نظرية Theorem

تأمل أي معادلة متعددة الحدود وبمعاملات أعداد صحيحة $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$. إذا احتوت هذه المعادلة على جذر كسري p/q ، حيث يعد p/q أصغر حد فيها، بعدد ستكون p قاسم a_0 و q قاسم a_n .

البرهان Proof

لتكن p/q جذراً للمعادلة المعلومة، بعدد ستحقق المعادلة ويكون لدينا:

$$a_n (p/q)^n + a_{n-1} (p/q)^{n-1} + \dots + a_1 (p/q) + a_0 = 0 \quad \dots (I)$$

مثال 2 Example:

برهن أن $\sqrt[3]{2}$ غير نسبي.

$\sqrt[3]{2}$ هو جذر للمعادلة $x^3 - 2 = 0$. بعدئذ p يجب أن تقسم -2 ، و q يجب أن تقسم 1 . إذن، إذا كانت هذه المعادلة تمتلك جذراً نسبياً، فإن هذا الجذر ينبغي أن يكون عدداً صحيحاً وقاسماً لـ -2 .

والآن فإن القواسم الوحيدة لـ -2 هي: 2 ، -2 ، 1 ، -1 . ولكن أيها من هذه الأعداد لا يعد جذراً من جذور المعادلة $x^3 - 2 = 0$ ، لأن $(2)^3 - 2 = 0$ ، $(-2)^3 - 2 = 0$ ، $(1)^3 - 2 = 0$ ، $(-1)^3 - 2 = 0$ جميعها باطلة. إذن $\sqrt[3]{2}$ غير نسبي.

مثال 3 Example:

برهن أن $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ غير نسبي.

إذا كتبنا $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ، سيكون لدينا $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$. والآن اعمد إلى تربيع طرفي المعادلة واحصل على $x^2 - 1 = 2x\sqrt{2}$. بالتربيع ثانية سنحصل على $x^4 - 10x^2 + 1 = 8x^2$ أو $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

إن هذه المعادلة قد أعيدت صياغتها بحيث أن $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ سيكون جذراً. ولكن الجذور النسبية الوحيدة لهذه المعادلة هي الأعداد الصحيحة التي تعد قواسماً لـ 1 ، وهي 1 ، -1 . ولكن أيها من هذين العددين لا يعد جذراً للمعادلة، لأن

$(1)^4 - 10(1)^2 + 1 = 0$ وكذلك $(-1)^4 - 10(-1)^2 + 1 = 0$ باطلتان قطعاً. إذن لا تحوي هذه المعادلة على جذر كسري، وتبعاً لذلك فإن $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ غير نسبيين.

مثال 4 Example:

برهن أن $\sin 10^\circ$ غير نسبي.

لدينا المطابقة $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$. والآن إذا استبدلنا θ بـ 10° وانتبهنا إلى أن $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ سنحصل على:

$$\frac{1}{2} = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$$

والآن إذا جعلنا $x = \sin 10^\circ$ ، نحصل على $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$ أو $8x^3 - 6x + 1 = 0$

وبناءً على ما ورد في النظرية، p يجب أن تكون قاسماً لـ 1 وأن q يجب أن تكون قاسماً لـ 8 ، وعليه فإن الجذور النسبية الوحيدة هي $\frac{1}{8}$ ، $\pm \frac{1}{4}$ ، $\pm \frac{1}{2}$ ، و ± 1 . ولكن أيها من هذه الاحتمالات الثمانية لا تعد جذراً للمعادلة، كما يمكن ملاحظته عند تمويض قيمها في المعادلة التي تم الحصول عليها. وعليه فإن هذه المعادلة لا تحوي على جذور نسبية، وبما أن $\sin 10^\circ$ هو جذر للمعادلة، فيجب أن يكون غير نسبي.

والآن يجب أن يكون الطلبة قادرين على برهنة لا نسبوية الأعداد التي غالباً ما يكثر مرورها في الكتب المنهجية بالمدارس الثانوية، والتي يظن الطلبة بأنها غير نسبية. إن من الضروري جعل الطلبة يفهمون سبب كون مفهوم رياضي ما صحيحاً بعد أن يكونوا قد أتوا العمل عليه بصورة مريحة.

وعالماً ما يتقبل الطلبة لا نسبوية العدد دون مزيد من المسألة والاستفهام. لقد وفرت هذه الوحدة طريقة يجب أن توفر فهمًا صادقاً للطلبة المتوسطين بمادة رياضيات المدارس الثانوية.

إضافة إلى المسألة التي طرحت في التقييم السابق، يجب تشجيع الطلبة على استخدام التقانة التي عرضت في هذه الوحدة عندما تبرز حاجة لاستخدامها.

التقييم اللاحق Postassessment:

إن الطلبة الذين أنقذوا التقانة التي عرضت خلال الأمثلة السابقة، يجب أن يكونوا قادرين على إكمال الأمثلة الآتية:

1. برهن أن $\sqrt{2}$ غير نسبي.
2. برهن أن $\sqrt[3]{6}$ غير نسبي.
3. برهن أن $\sqrt{3} + \sqrt{11}$ غير نسبي.
4. برهن أن $\cos 20^\circ$ غير نسبي.
5. برهن أن العدد بصيغة $\sqrt[m]{n}$ ، حيث n و m أعداد طبيعية، إما أن يكون غير نسبي أو عدد صحيح.

كيفية استخدام الصحائف الممتدة بالحاسوب

في توليد حلول لمسائل رياضية محددة

How to Use a Computer Spreadsheet to Generate Solutions to Certain Mathematics Problems

119

Deviation، ... الخ، لمجموعة من الأعداد الدرجة في صحيفة ممتدة.

ووضح بأنه يمكن العثور على الكثير من التطبيقات الرياضية للصحائف الممتدة، بالإضافة إلى تلك التي تم بناؤها في البرنامج. إن إحدى التطبيقات الممتدة هي توليد تتابع فايبوناتشي بالإضافة إلى تتابع لنسب من أزواج الأعداد المتوالية. امنح اهتماماً خاصاً للصيغة المستخدمة في توليد تتابع فايبوناتشي كما أدرجت في الوحدة الإثرائية 85:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

إن إحدى الطرق التي يتم بها ترجمة هذه الصيغة إلى "لغة" الصحائف الممتدة هي، "بالنسبة لصف معلوم، فإن العدد في العمود الثواني Columnth يساوي مجموع الأعداد في العمودين السابقين".

بمشاركة الطلبة، استخدام "مرجعية نسبية Relative Referencing" لإعداد صيغة بحيث أن محتوى خلية معلومة ينبغي أن يساوي مجموع مدخلات العمودين اللذين يقعان على يسارها في نفس الصف. إذن، إذا ادخل العددين الأوليان 1، 1 في الخليتين A_1 ، B_1 ، بعدد ستحتوي الخلية C_1 على الصيغة:

$$= \text{SUM}(A_1, B_1)$$

أو

$$= A_1 + B_1$$

إن هذه التقنية، وبالتواصل مع خصائص الصحائف الممتدة لنسخ وتحديث صيغة ما (انظر Fillhandle في اكسل) يمكن أن تستخدم كتابة المزيد من الحدود بحيث يستوعبها صف واحد. بعدد اضغط المؤشرة واسحبها للاستمرار بالصيغة على الصف الثاني.

يمكن أن يولد تتابع ثان من نسب أزواج الحدود المتتابة، كما أشهر إليه في الوحدة الإثرائية، بالطريقة الآتية. إذا ادخل العددين الأوليان 1، 1 في الخليتين A_1 ، B_1 ، بعدد ستحتوي الخلية B_2 الصيغة:

$$= C_1 / B_1$$

تنهى هذه الوحدة بعض الأمثلة البسيطة على كيفية استخدام الصحائف الممتدة مثل مايكروسوفت اكسل Microsoft Excel، وكلاريس ورك Claris Work، أو لوتس Lotus، في توليد حلول لمسائل رياضية محددة. ينبغي توفر حاسوب مع برنامج صحائف ممتدة - مناسب، وأن يكون الطلبة على معرفة كافية بعملياتهم.

إن طلبة المدارس الثانوية وجميع مراحلها سوف يجدون في هذا الأمر نوعاً من التحدي والمتعة أيضاً.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتوليد تتابع فايبوناتشي على صحيفة ممتدة.
2. سيصنع الطلبة مثلث باسكال على صحيفة ممتدة.
3. سيعد الطلبة قائمة بمسائل رياضية أخرى يناسب حلها على الصحائف الممتدة.

التقييم السابق Preassessment

يحتاج الطلبة إلى مراجعة الوحدة الإثرائية 85 (تتابع فايبوناتشي) و (هرم باسكال - القسم الأول بالخصوص، والذي يناقش مثلث باسكال). كذلك ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالعمليات الأساسية على الحاسوب المايكرو Microcomputer والصحائف الممتدة الإلكترونية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن الصحيفة الإلكترونية الممتدة هي عبارة عن مصفوفة Array يظهر على شاشة الحاسوب المايكرو. وتحتوي غالب الصحائف الممتدة على دوال رياضيات مبنية Built-in بحيث يمكن إدخال أي عنصر في الصف i والعمود j لأي قيمة لكل من i و j بسهولة. فعلى سبيل المثال، اعرض للطلبة كيفية استخدام الدوال التي تساعد على حساب أكبر قيمة Maximum Value، والقيمة المتوسطة Average Value، والوسيط Median، والنوال Mode، والانحراف المعياري Standard

التقييم اللاحق Postassessment

أسأل طلبة الصف أعداد قائمة بالموضوعات الرياضية التي قد تكون مناسبة للإعداد خلال صحيفة ممتدة، ويأمر إلى حل بعضها. ويمكن أن تقترح موضوعات قد قمت بانتقائها من الوحدات الإثرائية في هذا الكتاب.

إن الموضوعات الآتية قد تبرز على كونها موضوع جدير بالتحدي:

المربعات السحرية.

الأعداد Palindromic.

شبكة ايراتوستينيس.

حل معادلة تربيعية.

ثلاثيات فيثاغورية.

الكسور المستمرة.

إن المثال الآتي قد تم صنعه على حاسوب متوافق مع IBM وباستخدام برنامج مايكروسوفت اكسل.

والآن اقترح تطبيقاً ثانياً والذي قد يثير اهتماماً كافياً: يقترح مثلث باسكال، بعد إجراء مناقشة للوحدة الإثرائية 99، وبالخصوص قاعدة توليد المثلث، إن المثلث يجب أن يكتب كما يأتي:

1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				

أسأل التلاميذ اقتراح صيغة صحيفة ممتدة مناسبة والتي تقوم بتوليد هذا المثلث. وحاول أن تبين بأن الإدخال الأول والأخير لكل صف هو 1 وأن بقية الإدخالات هي عبارة عن مجموع العدد في الصف أعلاه، والعدد الموجود في نفس الصف ولكن على بعد عمود واحد على يساره.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1	1	2	3	5	8	13	21	34
2		2.000	1.500	1.667	1.600	1.625	1.615	1.619	
3									

عوالم الهندسة الثلاثة

The Three World of Geometry

120

تكم أهمية هذا النص في كونه قد أبرز قدرة العقل البشري على الوصول إلى استنتاجات غير عادية بتوظيف طاقة التفكير العقلاني بعفوها — تلك القدرة التي لا يمتلكها مخلوق آخر سواهم. وفي العناصر، ابتكر اقليدس الهندسة كنظام مسلمات يركز إلى مسلمات خمسة هي:

1. يمكن رسم خط مستقيم من أية نقطة إلى نقطة أخرى.
2. يمكن أن تمد قطعة مستقيمة بأي طول على خط مستقيم.
3. يمكن رسم دائرة من أي مركز وبأي مسافة من المركز.
4. جميع الزوايا القائمة متطابقة مع بعضها.
5. إذا قطع خط مستقيم مستقيمين آخرين، وجعل مجموع

إنها الرغبة باكتناه المجهول، السمة التي تلتصق بجلدة الكائن البشري فتدفع به نحو سبر الطبقات الجيولوجية للموثر على المزيد من الأسئلة التي تثير متاعبه! ترمض هذه الوحدة النتائج المروعة التي تم تحقيقها بعد عشرين قرناً من التقييد في مسائل تبدو بأنها غير هامة، وثانوية.

إن كثيراً من الناس قد ساهموا خلال حقبة تاريخية متعددة بصياغة مفردات الهندسة التي تمرقها في هذه الأيام، ولكن هناك ثمة رجل يشخص في موقع يعلو عليهم جميعاً. إن هذا الرجل هو اقليدس Euclid، الرياضي اليوناني الموهوب الذي ابتكر وكتب أول نص هندسي بالتاريخ، "العناصر Elements (300 ق.م.).

الألماني برنارد ريمان (1826-1866): الختان المستقيم يقطع أحدهما الآخر على الدوام (شكل 2).

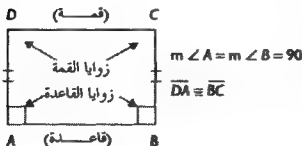
مسلمة بوليائي ولوباتشيفسكي Bolyai & Labachevsky's Postulate: إنطلاقاً للرياضي الهنغاري يانوس بوليائي (1802-1860) والرياضي الروسي ينقولاي لوباتشيفسكي (1773-1856): خلال نقطة لا تقع على مستقيم معلوم، يمكن رسم أكثر من مستقيم لا يقطع المستقيم معلوم.

العوالم الثلاثة The Three Worlds: إن الوحدة التعليمية التي ستقوم بعرضها على طلبتك سوف تتضمن بعض الخلفية التاريخية حول مسلمة اقليدس الخامسة.



موازي واحد (إقليدي) لا توجد متوازيات (ريمان) عدة متوازيات (بوليائي-لوباتشيفسكي)

ابتكر جيرولامو ساشيري Giralamo Saccheri (1667-1733) الراهب-الرياضي الإيطالي هذا الشكل رباعي الأضلاع لمساعدته في محاولته للبرهنة على أن مسلمة اقليدس الخامسة كانت بالواقع نظرية استندت إلى المسلمات الأربعة الأخرى، وبالتالي ليست مستقلة عنهم. لقد مني ساشيري بالفشل، ولكن خلال استمراره بجهوده المبذولة في هذا الصغار، ابتكر أنظمة مسلمات متعاضدة تماماً، ودون أي يشعر بذلك، أنواع أخرى من الهندسات - والتي تعد توطئة لما نطلق عليه في أيامنا هذه "الهندسة اللا اقليدية".



والآن دع الطلبة يستخدمون الخط العام التالي لإكمال البرهان

زواياها الداخلية على نفس الجهة أقل من زاويتين قائمتين، فإذا تم مد الخط المستقيم بصورة غير متناهية، سوف يتلاقيان على جهة زاويتيها التي يقل مجموعهما عن زاويتين قائمتين.

إن طول المسلمة الخامسة والتعقيد النسبي الذي تتسم به كان سبباً مؤدياً إلى مزهد من التحريات المكثفة والتحليل بواسطة المعلمين على مر العصور. إن بعض ثمار هذه التحريات قد تم عرضها خلال هذه الوحدة.

أهداف الأداء Performance Objectives

- 1 سيقوم الطلبة بتعريف شكل ساشيري رباعي الأضلاع Saccheri Quadrilateral واستخدامه في برهانه الصوري.
- 2 سيقوم الطلبة بمقارنة وتحديد مواطن التباين القائمة حول المستقيمتين المتوازيين في نماذج اقليدس، وريمان Riemann، وبوليائي - لوباتشيفسكي Bolyai - Labachevsky.
- 3 سيتعلم الطلبة كيفية البرهنة على أن مجموع قياسات زوايا المثلث قد يكون أكثر من، أو أقل من، أو يساوي 180°.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالساق الدراسي للهندسة بالمدارس الثانوية والتقليدية، وبالأخص النظريات ذات الصلة بالمستقيمتين المتوازيين والمتعامدة، والزوايا الخارجية بالمثلث، والتباينات الهندسية، والبراهين المباشرة وغير المباشرة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

في بدايات القرن التاسع عشر برزت مسلمة بلاي فير في Playfair's Postulate لكونها سهلة وتكافئ منطقياً المسلمة الخامسة لاقليدس: خلال نقطة لا تقع على مستقيم معلوم، يمكن رسم مستقيم واحد فقط موازياً لمستقيم معلوم. (عندما نتكلم عن المتوازيات في هذه الوحدة، فإننا نستخدم تعريف اقليدس: المستقيمتين المتوازيين هي خطوط مستقيمة، والتي توجد في نفس المستوى وقد مرت بصورة غير متناهية في الاتجاهين، ولا يمكن أن يلتقيان بأي اتجاه.

إن التحليل الدقيق لمسلمة اقليدس الخامسة ينتج عنه ثلاثة تعديلات ممكنة، نطلق عليهم "عوالم Worlds" وسنمقد الآن مقارنة بينهم:

مسلمة اقليدس Euclid's Postulate خلال نقطة لا تقع على مستقيم معلوم، يمكن رسم مستقيم واحد فقط موازياً لمستقيم معلوم (شكل 1).

مسلمة ريمان Riemann's Postulate (تخليداً للرياضي

3 $m \angle 1 > m \angle 2$ (استدع نظرية حول الزاوية الخارجية للمثلث).

4. إذن $\angle 1$ زاوية منفرجة.

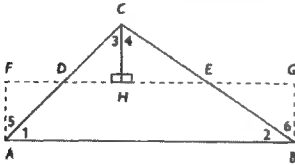
5. ولكن، $\angle 1 \cong \angle D$.

6. إذن كل من $\angle 1$ و $\angle D$ هما زاويتان منفرجتان.

عند هذه النقطة من الصعوبة أن يبرز أي نوع من الشك حول قياس زوايا الشكل رباعي الأضلاع لساثيري في عالم بولاي - لوباتشيفسكي. فمن الواضح أنها يجب أن تكون حادة.

بعد ذلك، اعرض للطلبة كيفية أعداد برهان حول مجموع قياسات زوايا المثلث كما لخصت في هذا الجدول:

مجموع قياسات زوايا المثلث	نوع العالم
أكثر من 180°	ريمان (لا توجد موازيات)
تساوي 180°	اقليدس (موازي واحد)
أقل من 180°	بولاي - لوباتشيفسكي (عدة موازيات)



لديك: المثلث $\triangle ABC$.

1. لتكن D نقطة منتصف \overline{AC} ، ودع E نقطة منتصف \overline{BC} .

2. ارسم \overline{DE} .

3. ارسم $\overline{DE} \perp \overline{CH}$.

4. حدد $\overline{HE} \cong \overline{EG}$ و $\overline{DH} \cong \overline{DF}$.

5. ارسم \overline{FA} و \overline{BG} .

6. $\triangle CHE \cong \triangle BGE$ وأن $\triangle FDA \cong \triangle CDH$.

7. بين أن FGBA هو شكل ساثيري - رباعي الأضلاع وقاعدته \overline{FG} .

8. إن $\angle 5 \cong \angle 3$ وأن $\angle 6 \cong \angle 4$.

مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC$

$$m \angle 1 + m \angle 2 + (m \angle 3 + m \angle 4) = 9$$

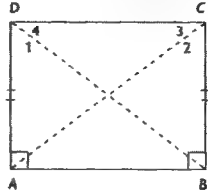
$$m \angle 1 + m \angle 2 + (m \angle 5 + m \angle 6) = 10$$

$$m \angle 1 + m \angle 5 + (m \angle 2 + m \angle 6) = 11$$

$$m \angle FAB + m \angle GBA = 12$$

$$13 = \text{مجموع قياسات زوايا الرأس بشكل ساثيري}$$

الذي ينص على أن زوايا الرؤوس Summit Angles بالشكل الرباعي لساثيري تكون متطابقة.



لديك: شكل ساثيري رباعي الأضلاع ABCD.

برهن أن: $\angle D \cong \angle C$.

1. ارسم \overline{AC} و \overline{BD} .

2. برهن $\triangle ABD \cong \triangle ABC$.

3. إذن: $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

4. والآن برهن $\triangle DCA \cong \triangle DCB$.

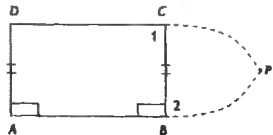
5. إذن $\angle 4 \cong \angle 3$.

6. إذن $\angle D \cong \angle C$.

بعدئذ دع الطلبة يعرضون استخدام المبررات التي يعرفونها بصورة جيدة من هندسة المدارس الثانوية، والتي تعد في عالم اقليدس، زوايا الرؤوس بالشكل الرباعي لساثيري زوايا قائمة. ولكن، يستطيعون، أيضاً، أن يعرضوا الآن أن زوايا الرؤوس بالشكل الرباعي لساثيري هي زوايا منفرجة في عالم ريمان (حيث تتلقي جميع الخطوط) - والاستمرار باستخدام نفس الهندسة التي ألفوا استخدامها سابقاً:

المعطى: شكل ساثيري رباعي الأضلاع ABCD.

برهن: الزاويتان $\angle 1$ و $\angle D$ منفرجتان.



1. مد \overline{AB} و \overline{CD} حتى يلتقيان عند النقطة P (لأننا يتم إجراء ذلك؟ تذكر بأن هذا العالم حيث تتلقي جميع المستقيمت).

$$2. m \angle 2 = 90^\circ$$

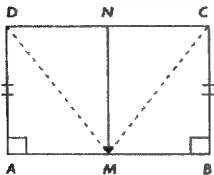
برهن:

$$\overline{MN} \perp \overline{AB}, \overline{DC}.$$

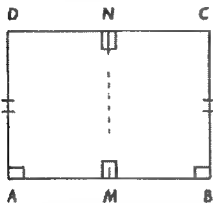
1. ارسم \overline{MC} و \overline{DM} .

2. برهن $\triangle AMD \equiv \triangle BMC$ وأن $\triangle ADN \equiv \triangle CNM$.

3. يجب أن يتمها الطلبة.



4. سيتمكن فقط سكان عالم ريمان (حيث تكون زوايا رؤوس شكل ساشيري رباعي الأضلاع منفرجة) من البرهنة على هذه القضية: قياس رأس شكل ساشيري - رباعي الأضلاع يقل عن قياس قاعدته. إن الخطوط العامة للبرهنة ستعطي:



عالم ريمان World of Riemann

معطى: شكل ساشيري رباعي الأضلاع ABCD.

برهن: $DC < AB$.

(1) ارسم المستقيم المتوسط \overline{MN} .

(2) $m \angle BMN = m \angle MNC = 90^\circ$

(3) $\angle C$ زاوية منفرجة (لماذا؟).

(4) في الشكل الرباعي MNCB (قاعدته \overline{MN} ,

$m \angle C > m \angle B$ (لماذا؟).

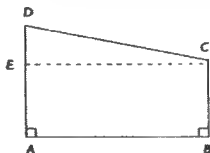
(5) إذن $NC < MB$ (لماذا؟).

(6) إذن $DC < AB$ (لماذا؟).

والآن سوف يدرك الطلبة إدراكاً كاملاً لماذا أحص ساشيري بالفشل إزاء ما خطط لفعله. ولكنه، رغم ذلك، برهن نظريات والتي بدت أنها وصلت إلى استنتاجات متناقضة. وبدلاً من ذلك فقد تحول إلى أحد أبطال الرياضيات الذين لا نتغنى بذكرهم!

التقييم اللاحق Postassessment

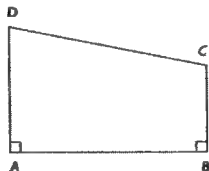
بين كيف أن المقيمين بالموالم الثلاثة يستطيعون إكمال البراهين الآتية:



1. لديك: $DA > CB$, $\overline{AB} \perp \overline{CB}$, $\overline{AB} \perp \overline{DA}$.

برهن: $m \angle BCD > m \angle D$.

2. إن معكوس (1) يمكن أيضاً أن يبرهن عليه بواسطة المقيمين في الموالم الثلاثة. ثم اعرض كيف يمكن أن يجري ذلك بواسطة إكمال البرهان المحدد.



معطى: $m \angle C > m \angle D$, $\overline{AB} \perp \overline{CB}$, $\overline{AB} \perp \overline{DA}$.

برهن: $BDA > CB$.

تلميح: استخدم reductio ad absurdum.

3. إكمال برهان أن المستقيم الذي يصل بين نقاط منتصف القاعدة والرأس في شكل ساشيري رباعي الأضلاع (المستقيم المتوسط) يكون عمودياً على كل منهما.

المعطى: شكل ساشيري رباعي الأضلاع ABCD؛ والنقطتان M و N هي نقاط منتصف (MN هو مستقيم متوسط).

بشكل ساشيري قائمة) يستطيعون البرهنة بأن قياس الرأس بشكل ساشيري تساوي قياس القاعدة.

مرجع reference

Harold E. Wolfe, Introduction to Non-Euclidean Geometry, New York: Dryden Press, 1945.

5. اعرض كيف أن سكان عالم بولياي - لوباتشيفسكي (حيث زوايا الرؤوس بشكل ساشيري تكون حادة) يستطيعون البرهنة بأن قياس الرأس بشكل ساشيري تساوي قياس القاعدة.

6. اعرض كيف أن سكان عالم أقليدس (حيث زوايا الرؤوس

خط π

121

pie Mix

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

اتخذ أولر خطوة جزئية عندما امتحن فرضية أن x يجب أن يكون حقيقياً، لأننا إذا قمنا بتمويض قيمة x بالعدد الخيالي $i\theta$ ، حيث θ عدد حقيقي وأن $i = \sqrt{-1}$ ستحصل أمور تستحق اعتمادنا:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots$$

باستدراك أن $i^2 = -1$ ، $i^3 = -i$ ، $i^4 = 1$ ، نستطيع وبسهولة حدود السلسلة حتى نحصل على:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{(\theta)^2}{2!} + \frac{(\theta)^3}{3!} + \frac{(\theta)^4}{4!} + \frac{(\theta)^5}{5!} - \dots$$

$$= [1 + \frac{(\theta)^2}{2!} + \frac{(\theta)^4}{4!} + \frac{(\theta)^6}{6!} + \dots] + i[\theta - \frac{(\theta)^3}{3!} + \frac{(\theta)^5}{5!} - \dots]$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta$$

وإذا قمنا ثانية باستدراك $\cos 2\pi = 1$ ، $\sin 2\pi = 0$ ، نستطيع استنتاج أن $e^{2\pi} = 1$.

إنها الصيغة التي سببت الدهشة المروعة !. والآن سنعود إلى نتيجة غير مسبوقة.

أصيب ليونارد أولر (1707-1783) الرياضي السويسري العالم الرياضي بدهشة كبيرة عندما اكتشف عبارة تركب في صيغة واحدة، والتي تبدو حتى ذلك الحين، أعداداً لا توجد علاقة بينها مثل π ، e ، i ، 1 . تعرض هذه الوحدة تلك الصيغة وتبين كيف قد ابتكرت.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيتعلم الطلبة بأن e^x ، $\sin x$ و $\cos x$ يمكن عرضها بواسطة سلسلة أسية.
2. سيرى الطلبة نتائج وعواقب السبر في المسار غير المخطط للرياضيات.
3. سيستخدم الطلبة صيغة أولر لاشتقاق تطابقين مثلثين.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على تقييم أسس الأعداد الخيالية i ، وأن يكونوا على معرفة كافية برموز المضروبيات لعاملية. كما يجب على الطلبة، أيضاً، أن تكون لديهم معرفة مقبولة باللوغاريتم الطبيعي Natural Logarithm بالأساس e ، والمتطابقات المثلثية والخاصة بجيب وجيب تمام مجموع زاويتين.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

اخبر الطلبة انه بالنسبة لأي عدد حقيقي، x ، يمكن البرهنة في حساب التفاضل والتكامل بأنه يمكن تمثيل دالات محددة، تحت ظروف معلومة، كسلسلة أسية غير متناهية. على سبيل المثال:

التقييم اللاحق Postassessment

1. استخدام أسلوب سلسلة مكالورين في اشتقاق صيغ لكل من:
 $\sin(x-y)$ و $\cos(x-y)$.
2. بين أن $e^m + 1 = 0$.
3. بين كيف أن e^m قد تمثل إجراء (operator) يدير عدداً مركباً باتجاه عقارب الساعة خلال زاوية مقدارها θ على طول وحدة دائرة.
4. بين الارتباط القائم بين صيغة أويلر ونظرية "دي موير" DeMoivre لإيجاد أسس وجذور عدد مركب.

إن افترض $y + x = \theta$ سوف يعطينا

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y) \quad (1)$$

ولكن، كذلك:

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= e^{ix} e^{iy} \\ &= (\cos x + i \sin x) (\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) \\ &\quad + i (\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned} \quad (2)$$

وبمساواة الأجزاء الحقيقية والخيالية للمعادلتين (1) و(2)، نحصل على:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

يمكن بسهولة إدراك هاتين المعادلتين بوصفهما صيغاً مثلثية.

التكرار الرسومي

122

Graphical Iteration

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ، وبمعدن رباعية معلومة $f(x) = ax$ ،
 (1-x) موضحاً كيف أن المستقيم العاكس، يمكن أن يحول
 هندسياً مدخلاً x_i ، مخرجه $f(x_i)$ إلى مدخل جديد x_{i+1} .
 ولاستخدام قيم مختلفة للمعامل a ، لاحظ كيف أن المعادلة
 التربيعية تقطع الوتر، والمستقيم العاكس، $f(x) = x$ ، في مواقع
 مختلفة عندما يزداد معامل a من 1 إلى 4.

وعندما يستكشف المرء خصائص التكرارات المختلفة ستبدو له
 الخصائص المختلفة جلية لا لبس فيها. ليقم الطلبة باستكشاف
 والوصول إلى أن قيمة البداية للتكرار الأولي لا تمتلك تأثيراً على
 السلوك طويل الأمد للتكرار، رغم أن القيم المبكرة سوف تعاني من
 تغيرات. وتبسيط الأمر، فإن جميع الرسوميات التوضيحية
 المعروضة هنا تبدأ بتكرار ابتدائي مقدارها 0.2.

إن مختصراً لسلوكيات التكرارات الموضحة تم إدراجها في هذا
 المقام.

بالنسبة $a=2$ ، تصعد التكرارات إلى نقطة التقاطع $x = 0.5$.
 بالنسبة $a=2.8$ ، تلف التكرارات في النهاية إلى النقطة
 الثابتة $x = 0.643$.

بالنسبة $a=3.4$ ، يظهر سلوك بفترة مقدارها 2 بين
 $x=0.452$ و $x=0.842$.

تركز هذه الوحدة على نظرية الفوضى (التشوش) Chaos Theory وإرتباطها بالمنهج الدراسي للمدارس الثانوية، وتوفر فرصة للطلبة باستكشاف مساحة الاهتمام الحالية بالرياضيات خلال الطاقات التي تتيحها الحاسبة اليدوية - الرسومية والحاسوب.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بتوفير حاسبة يدوية - رسومية، أو حاسوب، سوف يستعرض الطلبة التكرار الرسومي تحت التربيعة.
2. سيقوم الطلبة ببحث خاصية التكرار تحت القطع المكافئ $f(x) = ax(1-x)$ لقيم مختلفة لـ a من 1 إلى 4 مع قيم أولية مختلفة تتكرر في الفترة من 5 نحو الواحد.

التقييم السابق Preassessment

يجب على الطلبة أن يكونوا معتادين مع دور المعامل a الذي يلعبه $f(x) = ax(1-x)$ وأن يكون لديهم فهم الجزء السيني المقطوع للدالة وكذلك ينبغي أن يكون لديهم فهم أولي بطبيعة التكرار، حيث يصبح المخرج $f(x_0)$ ، للتكرار الأولي، x_0 ، التكرار التالي x_1 .

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

أبداً بمناقشة خصائص القطع المكافئ المعروف:

إشارة من الفوضى؟ يمكن أن تجد بعض التيارات باتجاه إجابة هذه الأسئلة في تخطيط فيغنباوم Feigenbaum Plot والذي سنلقي عليه مزيداً من الضوء في الوحدة القادمة. إن هدف هذا النشاط هو إحدى المحفزات التي ستحدو بالطلبة إلى استثمار التقنية لاستكشاف سلوك التكرار. وسيأتي التحليل الرياضي الأساسي في مرحلة تالية، بالتوازي مع المزيد من التحريات لموضوعات ذات صلة به، مثل سلوك التكرار عندما تكون $a > 4$.

التقييم اللاحق Postassessment

- بالاستفادة من الآلات الحاسبة - الرسومية أو الحواسيب سيكون الطلبة قادرين على إجراء هذه المهامات:
1. ميز مختلف سلوكيات التكرار التي تبرز بالنسبة لقيم مختلفة لـ a بفترات من 1 إلى 4 بالنسبة للدالة: $f(x) = ax(1-x)$.
 2. جد القيم المحددة بالنسبة لنقطة ثابتة، وسلوك تكراري بفترات منتظمة.

مرجع Reference

Peitgen, H., H. Jurgens, D. Saupe, E. Maletsky, T. Perciante, and L. Yunker, *Fractals for the Classroom: Strategic Activities, Volume Two*, New York: Springer - Verlage, 1992.

شكراً للدكتور "يغان مالتسكي"

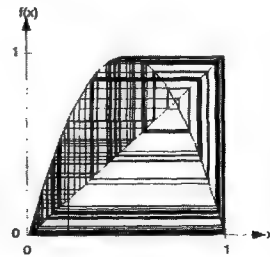
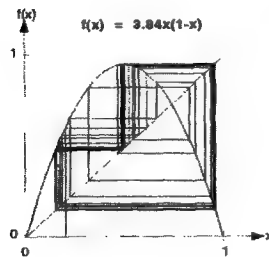
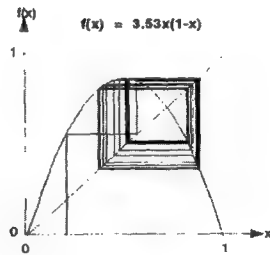
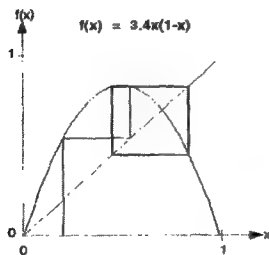
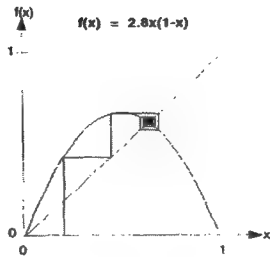
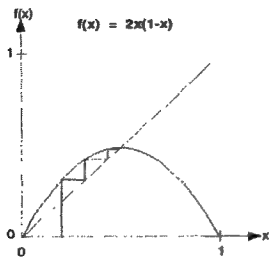
بالنسبة $a = 3.53$ يبدأ سلوك بفترة مقدارها 4 بالتكون، ومتحركاً في آخر الأمر خلال $x = 0.369, 0.822, 0.517, 0.881$ بالنسبة $a = 3.84$ ، يظهر سلوك مدهش بفترة مقدارها 3 ويثبت حول $x = 0.149, 0.488, 0.959$. بالنسبة $a = 4$ يظهر سلوك فوضوي صرف.

هناك عدة مستويات لتوضيح، وتفسير تصاحب ما أطلقنا عليه السلوك الفوضوي أو المشوش. وبصورة عامة يوصف هذا السلوك بثلاثة أفكار متفرقة لكنها مترابطة فيما بينها الخليط Mixing، والحساسية Sensitivity، والدورية Periodicity. بالنسبة "للخليط"، في كل فترة، مهما كانت صغيرة، توجد ثمة نقطة، والتي عبر التكرار سوف تصل وتختلط خلال جميع الفترات بين 0 و 1.

أما بالنسبة "للحساسية"، فإن الفروق الصغيرة جداً في التكرارات قد تؤدي إلى سلوكيات مختلفة بعد عدد صغير من التكرارات المتتالية فحسب.

وبالنسبة "للدورية"، فإنها تتخفي خلال السلوك الفوضوي البين، فلا تختلط بعض النقاط ولكنها تزود، بصورة دورية، عدداً قليلاً من المواقع.

ينبغي أن يشجع الطلبة على استكشاف هذه الخصائص لأن مستوى اهتمامهم الشخصي سوف يكون حافزاً قوياً لهم. ماذا يسيطر على هذا السلوك التكرار، الغريب، والمتغاير باستمرار ضمن هذه المعادلة التربيعية البسيطة؟ وأين تحصل الانتقالات من نقطة ثابتة إلى فترة - 2، فترة - 4، وسلوك فوضوي؟ وهل هناك ثمة موارد للدهشة فيما بينها، مثل سلوك فترة - 3 والذي يتكرر ظهوره في أية لحظة بعد أن تبرز أية



The Feigenbaum Plot

حيث تتضاعف الفترة من 1 إلى 2، ومن 2 إلى 4، ومن 4 إلى 8، وهكذا. ينبغي على الطلبة استكشاف هذه المناطق ثانية باستخدام نشاط 1، ولكن ينبغي أن لا يثبطوا في حالة عدم عثورهم على نقاط تقريظ دقيقة. وتذكر، بأن الوسيط a هو عدد حقيقي، وغير محدد بالحساب المتناهي للآلة الحاسبة الرسومية أو الحاسوب. سيكتشف الطلبة بسرعة أين تظهر نافذة الفترة 3 باختصار، في إحدى الفجوات المظورة في محيط السلوك الفوضوي. إن قيم جاذب الفترة -3، 0.959، 0.488، 0.149، x ، والتي تم دعمها هنا بالنسبة لـ $a = 3.84$. يرتبط اسم هذا التخطيط باسم الفيزيائي الأمريكي ميتشل فيغنبيوم Mitchell Feigenbaum، والذي قام بتطويره عند عمله في مختبر لوس ألاموس Los Alamos Laboratory في عقد السبعينات من القرن العشرين. إن الجزء الأساسي من اكتشافه يؤكد أن نسب المسافات بين نقاط التشعبات الثنائية المتتالية تتقارب، بصورة مدهشة، إلى قيمة ثابتة بات تحمل اسمه في هذه الأيام. إن ثابت فيغنبيوم الكوني هو: $\delta = 4.669202 \dots$ ويظهر في كثير من حالات التكرار المختلفة في الرياضيات والعلوم.

التقييم اللاحق Postassessment

- ينبغي أن يكون الطلبة على أهبة الاستعداد لتوضيح ما يأتي:
1. أزواج فترة التشعب كما نلاحظها في تخطيط فيغنبيوم.
 2. الصلة بين تخطيط فيغنبيوم وسلوك التكرار بالنسبة للمعادلة التريميةية $f(x) = ax(1-x)$.

مراجع References

- Gleick, J., Chaos: Making a New Science, New York: Penguin Books, 1987.
- Peitgen, H., H. Jurgens, D. Saupe, E. Maletsky, T. Perciante, and L. Yunker, Fractals for the Classroom: Strategic Activities, Volume Two, New York: Springer – Verlag, 1992.

شكراً للدكتور "إيفان مالتسكي"

تنتهي هذه الوحدة كيف أن تخطيط فيغنبيوم يفصل النقاط ثنائية الشعب Bifurcation في سلوك التكرار للتغير تحت المعادلة التريميةية: $f(x) = ax(1-x)$. وقد رسمت قيم محددة لمعامل a إزاء جاذبات النقاط الثابتة والدورية. إن مناطق السلوك الفوضوي ستكون مرئية بسهولة وبسر.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بقراءة قيم الجاذب في الفترة من 0 إلى 1 بالنسبة لـ x ولقيم مختلفة للمعامل من 1 إلى 4.
2. يستطيع الطلبة ملائمة المعلومات في هذا النشاط إزاء البيانات التي جمعت في نشاط 1، ومعاودة اكتشاف التكرارات، في هذا الوقت، باعتقاد نظرة أكثر عمقا إلى بنية السلوكيات المختلفة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالسلوك العام للتكرار للمعادلة التريميةية $f(x) = ax(1-x)$ عند انتقالها من سلوك النقطة الثابتة الذي يمكن توقعه كليا عند $a = 1$ ، إلى السلوك الفوضوي الذي لا يمكن توقعه كليا عند $a = 4$ بالنسبة لتكرار بين $x = 0, 1$.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

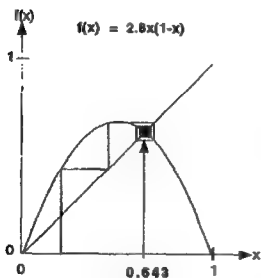
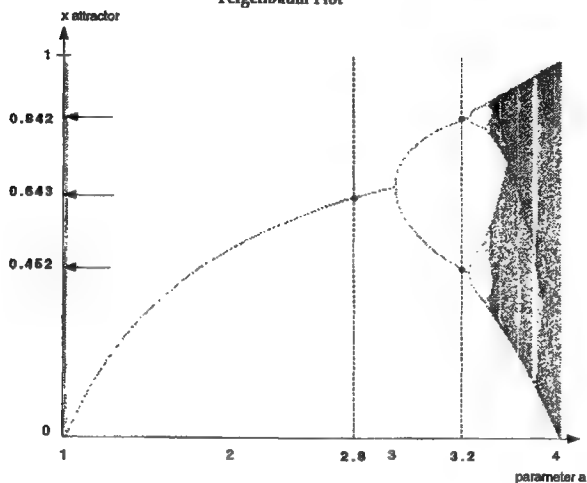
يتوقع الطلبة إيجاد التغير x على المحور الأفقي لوجوده في النشاط الأخير على التكرار الرسومي. إذن، سيؤدي اتجاه تخطيط فيغنبيوم إلى اهتمام أولي ببعض الشيء.

يظهر المحور الأفقي الوسيط A Parameter والذي يتراوح من 1 إلى 4، مع قيم x المناظرة للجاذب على المحور العمودي والذي يتراوح بين 0 إلى 1.

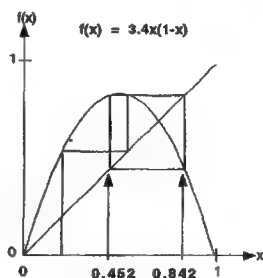
ويتحرك الحزلون داخليا إلى جاذب النقطة الثابتة $x = 0.643$ عندما تكون $a = 2-8$. إن هذه القيمة لـ x يمكن الآن قراءتها مباشرة من تخطيط فيغنبيوم، كما تظهر بالشكل. وينفس الطريقة، تستطيع قراءة الفترة -2 جاذب $X = 0.542$ و 0.842 . وعندما تكون $a = 3.4$.

يظهر تخطيط فيغنبيوم، بوضوح، النقاط ذات التشعب الثنائي

Feigenbaum Plot



Fixed point attractor at $x = 0.643$ when $a = 2.8$.



Period-2 attractors at $x = 0.452$ and $x = 0.842$ when $a = 3.4$.

124

مثلث سيربنسكي

The Sierpinski Triangle

مثلثات الزوايا الثلاثة، وارفع المثلث الوسيط فكر بما فعلته بوصفه المرحلة 1.

طبق نفس الخوارزمية للمرة الثانية على كل من المثلثات الثلاثة - الجديدة، والصغيرة، لتحصل على المرحلة 2. بعدئذ طبق الخوارزمية ثانية على المثلثات المتبقية التسعة - الأصغر للحصول على المرحلة 3. تخيل استمرار عملية التكرار لغاية 4 مراحل.

تحتوي كل مرحلة على ثلاثة أضعاف عدد المثلثات لتلك الموجودة في المرحلة التي تسبقها. إذن فإن من الجلي، من هذا المنهج، بأن كل مرحلة تالية تتطلب ثلاثة أضعاف لتطبيقات الخوارزمية. وهناك دائماً المزيد، والمزيد من التطبيقات على الأجزاء الأصغر فأصغر. وكلما استمرت عملية القص بتقدمها، فإن قطع المثلثات لا تلبث أن تصبح أصغر في حجمها و أكبر بعددها. هل هناك ثمة منظور للعملية حيث تبقى قاعدة التكرار كما هي بالضبط طيلة فترة العملية، وتطبق باستمرار مرة واحدة بالضبط عند التوجه من مرحلة إلى التي تليها؟ وسيكون الجواب بنعم.

ليفكر طلبتك بصورة شاملة بالبنية الكلية عند كل مرحلة، دون العدد المتزايد - إلى مالا نهاية - من الأقسام الأصغر فأصغر. وهذا هو أحد السيناريوات المحتملة:

- خذ أية مرحلة من الشكل إلى جهاز الاستنساخ.
- ثبت الجهاز على نسبة 50٪ مصغراً الأبعاد الخطية للنصف.
- اصنع ثلاثة نسخ من النسخة المصغرة للنصف.
- استخدمهم لبناء المرحلة التالية للهيكل.

دع هذه العمليات تكون خوارزمية التكرار. ثم دع طلبتك يبتون على ارض الواقع الخطوات الأولى المختلفة بهذه الطريقة، مكررين نفس العملية بالضبط المرة تلو الأخرى. بعدئذ دعهم يتخيلون استمرار التكرار، ودعهم يتصورون كيفية تمايز الشكل، فيصبح أكثر دقة ورفافة بازدياد تعقيدها عند كل مرحلة تالية:

والآن بعد أن أضحي عصر التقنية يرتكز إلينا، فإن التكرار قد اضطلع بمستوى جديد من الأهمية في ميدان الفكر الرياضي المعاصر. يعكس هذا النشاط عن كيفية توجيه الاهتمام نحو المنهج الدراسي بالمدارس من خلال الهندسة. إن عملية هندسية يتم تكرارها مرة بعد أخرى، تستطيع تحويل منطقة مثلث منبسط إلى هيكل "فراكتل" مجرد أنيق، هو عبارة عن مثلث سيربنسكي.

أهداف الأداء Performance Objectives

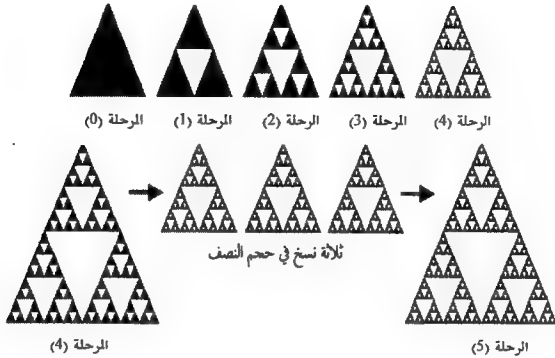
1. سيقوم الطلبة بالتمرن على التكرار الهندسي، بالنظر أولاً ثم تخيل التغييرات الهندسية في المراحل المتتالية للهيكل، ثم سيكونوا بعدئذ قادرين على التعبير عن هذه التغييرات بكل من الصيغتين الجبرية والعديدية.
2. سيكون الطلبة قادرين على تعريف وتوضيح التشابه الذاتي.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون لدى الطلبة خبرة جيدة بقياس الرسم، والتشابه، وتمييز الأنماط بصيغ وأشكال متعددة، كما يجب أن تكون لديهم معرفة كافية بالأفكار الرئيسة للتكرار والتفكير السائد بميدانه.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

في نهاية القرن التاسع عشر وبدايات القرن العشرين، نشد الرياضيون إبداع أنواع جديدة من البنى الهندسية والتي تمتاز بخصائص فريدة. ولقد تم تمييزها وتصنيفها هذه الأيام كمنحنيات فراكتال Fractal. إن إحدى مميزات تلك الفترة كان مثلث سيربنسكي، الذي جاءت تسميته تيمناً باسم الرياضي البولوني واكلاو سيربنسكي Wacław Sierpinski. ليبدأ كل طالب قطعة ورقية على شكل مثلث، ثم ليعصوا بين نقاط منتصف أضلاع المثلث لتكوين أربعة مثلثات متشابهة بنصف الحجم الخطي. قم بقص كل منهم بمفرده، ثم ابق



الرياضية، ويظهر في الجدول الآتي كيف أن عملية البناء هذه ترتبط بأنماط أعداد، ووسيط، ومساحة، وأسس، وسلاسل هندسية، ونهايات، لتسمية بعضها. بالواقع، فإن كل من منحنيات فراكتال ومثلث سيربنسكي بالخصوص، يبدآن أكثر الأمثلة كفاءة لأنواع الارتباطات الرياضية، والتي يشار إليها في "معايير مناهج وتقويم رياضيات المدرسة" للمجلس الوطني لمعلمي الرياضيات.

يعرف المحيط والمساحة عند المرحلة - O بأنه عبارة عن 1 وحدة و 1 وحدة مربعة على التوالي. إن هذا الأمر سيأتيح للطلبة فرصة التركيز على معامل الضرب الثابت Constant Multiplier في كل من المتتابعين، ولكي يقام ارتباط مباشر بالمتابعات الهندسية.

ويمكن أن يسأل الطلبة، عند مستويات مختلفة حساب المحيط المتغير والمساحة، مبتدئين بالمثلث متساوي الأضلاع بقياس 4 بوصة لكل ضلع من أضلاعه.

بالنظر إلى عملية البناء من خلال هذه القواعد فإن فكرة التشابه -الذاتي تصبح جلية لا غبار عليها. وأن البنى المتتابة تحتوي المزيد والمزيد من نسخ بنية المرحلة الأصلية - O ويقاسات مختلفة. ولكن النظرة الفاحصة تظهر بأن الشكل المحدد هو الوحيد الذي يبدي بصدق تشابهاً - ذاتياً. إن المراحل المحدودة تحتوي نسخاً "أساسية" تشبه الكل. ولكن حدود الشكل فقط تحتوي نسخاً "مطابقة" من الكل في كل المقاييس!

إن مثلث سيربنسكي هو الشكل المحدد الذي ذكرناه قبل قليل. فهو عبارة عن تجريد Abstract لهيكل منحنى فراكتال بتعميق غير متناهي، حيث تم تصغير جميع مناطق المثلثات الصغيرة ذاتها فأضحت نقاطاً. إن الطلبة بحاجة إلى معرفة أن هذه المثلثات المتناهية بالصغر لا يمكن رؤيتها إلا في الذهن فقط، ويبقى ما تراه العين، بأفضل حالاتها، هي بضعة حالات لمرآحل متناهية عند تطوير مثلث سيربنسكي.

ولكن تكمن في عملية التكرار الهندسي جملة من الارتباطات

المرحلة	0	1	2	3	4	n
عدد المثلثات	1	3	9	27	81	3^n
المساحة	1	$3/4$	$9/16$	$27/64$	$81/256$	$(3/4)^n$
المحيط	1	$3/2$	$9/4$	$27/8$	$81/16$	$(3/2)^n$

1. خوارزمية بناء، والتي، عندما تكرر، ينشأ عنها مثلث سيربنسكي.
2. طبيعة التشابه - الذاتي كما نجدها في مثلث سيربنسكي.
3. كيفية تغاير المحيط والمساحة عندما تتولد مراحل متتابعة.

مرجع Reference

Peitgen, H., H. Jurgens, D. Saupe, E. Maletsky, T. Perciante, and L. Yunker, *Fractals for the Classroom: Strategic Activities, Volume One*, New York: Springer - Verlag, 1991.

لوحظ بأن المساحات في الجدول تشير إلى المناطق المثلثية - المظلة والتي تبقت عند وفي كل مرحلة. ينبغي أن يرى الطالب هذه الأرقام بأنها تتقارب نحو 0، فتكون المساحة المحددة لمثلث سيربنسكي من خلال هذا المفهوم هي 0! من جانب آخر، فإن المحيطات بالجدول تشير إلى المسافات حول وعند كل قطعة مثلثية في كل مرحلة. وهنا، يجب على الطالب أن يراها بصيغة تباعد. وبذلك المنظور، فإن المحيط المحدد هو غير متناهي! ضع هذين السلوكين لكل من المساحة والمحيط، ولنفس الشكل سوية لتحصل على نظرة خاطفة جديدة لتفرد هذه البنية.

التقييم اللاحق Postassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على تفسير:

الفراكتال

125

Fractals

لمثلث سيربنسكي ضمن العائلة الكلية لبنى الفراكتال.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتوليد مراحل متتابعة من الفراكتال المختلفة بالاستناد إلى تكيف شهقات البناء لمثلث سيربنسكي.
2. سيميز الطلبة التشابه - الذاتي في الفراكتال من هذا النوع، والحصول من خلالها على طبيعة شيفرة بنائهما.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن تكون لدى الطلبة خبرة جيدة بالمقاييس، والتشابه، والتشابه - الذاتي، والتحويلات الهندسية للتدويرات والانعكاسات.

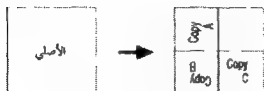
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

تأمل تحويل كتل بناء مثلث سيربنسكي بحيث تتركز حول المربعات بدلاً من المثلثات. وتمد هذه الخطوة التي سيشارونها الأكثر صعوبة بين غيرها. كيف يمكن لمثلث سيربنسكي أن يبرز من عملية تتضمن المربعات فقط؟

منذ 25 عاماً مضت، فقط، عمد بنويوت مانديلبروت Benoit Mandelbrot إلى ابتكار كلمة فراكتال Fractal. وكان من الصعب جداً، في ذلك الوقت، الاعتقاد بأن هذا الموضوع سوف ينتشر انتشاراً سريعاً فيغزو كل هذه القطاعات بهذا الوقت القصير، كما أننا لا نكاد نمتر على أن هناك من تنبأ بأن هذا الموضوع سوف يثير اهتماماً، وينشئ ارتباطات، ثم يقمق المنهج الدراسي لرياضيات المدرسة بهذه السرعة الكبيرة. ولكن التقنية، مضافاً إليها رغبتنا الدائمة في إثراء تعليمنا بالأفكار الجديدة، جعل هذا الأمر في حكم الممكن.

تتوفر، في هذه الأيام، الكثير من الحزم البرمجية الجاهزة بالسوق، والتي تستطيع أن تزج ديناميكية وجمالية الفراكتال وتضجها جاهزة بين يدي تطبيقك. إنها مسألة أخرى، لحد بعيد، بالنسبة للطلبة لرؤية أي نوع من الرياضيات يشكل البنية التحتية لهذه البنى الساحرة. ويمكن أن ينجز جزء لا بأس به في داخل الصف بوضع اليد على أنشطة وخبرات تم الاعتناء باختيارها وتنسيقها بصورة محكمة. تسهم هذه الوحدة بتمديد وتوسيع التوليد الهندسي التكراري

ومع هذه الشيفرة، فإن الخلية A قد تم تدويرها بمقدار 270° ، وتدوير الخلية B بمقدار 180° ، كل منهما باتجاه عقرب الساعة. وسهري الطلبة بأن بنية مختلفة سوف تبدأ بالظهور بسرعة.



شفرة البناء

تقليص الحجم إلى النصف
اصنع 3 نسخ
أعد البناء وتدوير كل من
B و A

وحدات إرائية



المرحلة (0) المرحلة (1) المرحلة (2)



المرحلة (3) المرحلة (4) المرحلة (5)

شجع الطلبة على صناعة شيفراتهم الخاصة، وإنشاء بعض الراحل الأولى للفراكتال المناظر. ويمكن استخدام أوراق الرسومات التي أحكمت بصورة مرهفة، أو يمكنك تجهيز الطلبة بهذا النوع من شبك القضبان المتصالبة Grids لكي يستخدمونها في النشاط.

تحتوي حزم البرمجيات مثل كلايس وركس Claris Works على برمجيات للرسم يمكن استخدامها بصورة كفوءة جداً في إنشاء هذه الهياكل وبواسطة هذه العملية. إن ميزة انطباقها على شبك القضبان المتصالبة سيمكن المستخدم من أعداد إنشاءات دقيقة.

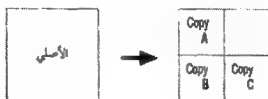


المرحلة (0) المرحلة (1) المرحلة (2)



المرحلة (3) المرحلة (4) المرحلة (5)

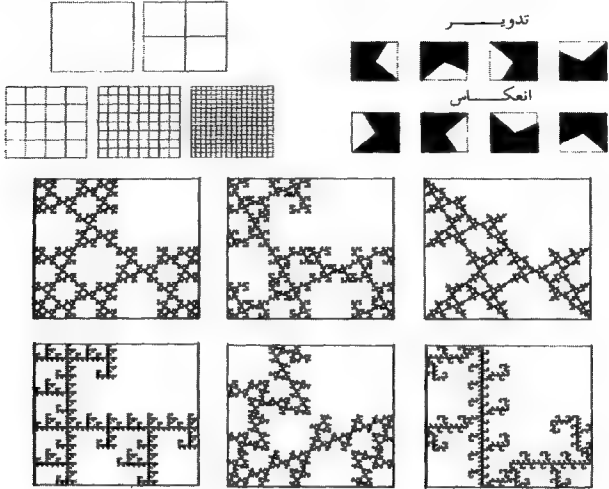
إن كل مرحلة منتهية للفراكتال الذي سنباشر صناعته، تتألف من مجموعة من المناطق المربعة الصغيرة. وكلما ارتقت المرحلة: كلما ازدادت المربعات صفراً. ولكن في ضوء المحدد، فإن كلا من هذه المربعات الصغيرة سوف تقارب نقطة ما، وهو أمر يصح بالنسبة للمثلثات والمربعات جميعاً. وتنص الحقيقة على أن الشكل المحدد الذي ينشأ عن المربعات أو المثلثات، هو نفس هيكل الفراكتال، والذي يمثل مثلث سيرينيسكي. ورغم تباين تتابعي الشكلين، على الدوام، فإنهما يقاربان نفس الجاذب. ويظهر أدناه أنموذج لشيفرة البناء، تم تكرارها مرة بعد أخرى وذلك بنزع مثلث سيرينيسكي منها.



شفرة البناء

تقليص الحجم إلى النصف
اصنع 3 نسخ
أعد البناء

ومتى أرسيت هذه الفكرة على أرض صلبة، اعد إلى دمج تحويلات المربع في العملية، حيث سيمكن إنشاء العائلة الكلية للفراكتال التي تشابه سيرينيسكي. وستكون النتيجة بأن كل طالب من طلبتك يمكن أن يستكشف الفراكتال الشخصي الذي يعود له / أو لها.



مشاهدتها. واحتفظ بالانكسارات لمراحل لاحقة، عندما يكون قد اكتسب طلابك خبرة واسعة ومران جيد. وحاول أن تحدد فيما إذا كان باستطاعة طلبتك كتابة شفرات البناء المستخدمة في إنشاء الفراكتال، علماً بأن التدوير، فقط، قد اعتمد في عمليات إنشائها.

التقييم اللاحق Postassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على:

- 1- مقايمة خوارزمية بناء، معلومة عبر مجموعة مراحل متتابعة من التكوين والتطوير.
- 2- استخدام التشابه - الذاتي لتمييز شفرة البناء من فراكتال أنشئ من هذا النوع.

مرجع Reference

Peitgen, H., H. Jurgens, D. Saupe, E. Maletsky, T. Perciante, and L. Yunker, *Fractals for the Classroom: Strategic Activities, Volume Three*, New York: Springer-Verlag, 1997.

ولدينا كلمة تحذير واحدة لا نزيد عليها، فساء كانت عملية الرسم قد بوشرت باليد، أو باستخدام حاسوب لإنشاء الرسومات، تذكر دائماً بأن الشكل الكلي عند كل مرحلة، هو الذي يتم تصغيره، وتكراره، ثم إعادة بناءه خلال التحويلات الهندسية. إن الطلبة الذين يطبقون العملية بصورة خاطئة، سينعكس عملهم على الأجزاء الصغيرة فالأصغر بالمراحل المتتالية، مما يجعل إمكانية إنشائها للشكل الصحيح أمراً مستحيلاً. وأصنع عند وفي كل مرحلة، ثلاثة نسخ مصغرة فقط لكل قبل أن تباشر إعادة بنائها.

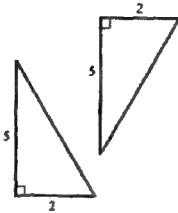
سيتضمن الجزء الثاني من هذا النشاط جعل الطلبة يعاينون المراحل التفصيلية للغير، ويحاولون تحديد قدرتهم الشخصية على اكتشاف شفرات البناء المستخدمة. وستكون هذه العملية ذات تأثير بالغ وتحمل معها تحديات إزاء الخبرة المرئية التي يتصف بها البعض. حاول استذكر، بأن هناك ثماني تحويلات للمربع.

ابداً أولاً بالهياكل والبنى التي تتضمن التدوير فقط، والتي تعد بالنسبة لكثير من الطلبة من أبسط الهياكل التي يمكن

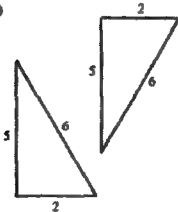
الملحق A

Additional Exercise تمارين إضافية

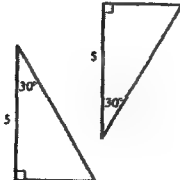
(1)



(2)



(3)



1. اختر أحد الموضوعات من خطة الوحدة حول "الجذور Radicals" المذكورة في الكتاب واكتب خطة درس لها. ما هو نوع خطة الدرس التي قمت بكتابتها؟ ولماذا اخترت هذا الموضوع المحدد لخطة الدرس؟

2. أ. ما هي الخصائص الأساسية التي نحتاجها في معظم الدروس.
ب. ما هي أنواع الدروس التي تؤدي بذاتها إلى تقانة الاستكشاف؟
ج. صح أم خطأ: كل درس يمكن أن يكون ريادياً. ناقش ذلك.

3. اختر موضوعاً من جبر السنة الأولى واعد درساً عنه لمجموعة صغيرة.

4. أ. جد قسماً في الكتاب المنهجي لجبر السنة الأولى بالعلماء الثانوية لفرض تعليمه كدرس للرياضيات - من خلال- القراءة Mathematics -though- Reading. واكتب قائمة بعشرة أسئلة تخطط بطرحها على الصف بعد انتهائهم من قراءة هذا القسم.

ب. افعل نفس الشيء في مادة الهندسة.
ج. افعل نفس الشيء بمادة الجبر للسنة الثانية.
د. افعل نفس الشيء مع مادة الرياضيات للمرحلة الثامنة.

5. اكتب خطة درس لليوم الذي يسبق رحلة استجمام طويلة الأمد، يبرز أفاض الرياضيات وألمابها.

6. اكتب خطة درس لليوم الأول لأي صف بمادة الرياضيات.

7. اختر موضوعاً من مقرّر الرياضيات المتقدمة واعد درساً حوله.

8. اكتب خطة درس تدريبي Drill lesson لكل مما يأتي:
أ. الأسس الكسرية والسالبة.

ب. حساب المثلثات البسيطة (جيب، وجيب تمام، وظل).

ج. صيغة المسافة ونقطة المنتصف في هندسة الإحداثيات.

د. موضوعي LCM و GCD في المرحلة الثامنة.

9. اعد سلسلة من دروس المراجعة حول موضوع "التمسب Percent" في مقرّر دراسي أساسي.

10. ما هي نقاط القوة والضعف في درس المراجعة الآتي حول تطابق المثلثات؟

أ. التباينات.

ب. تاريخ الرياضيات.

ج. الأنماط في الرياضيات.

د. الرياضيات الترفيهية.

13. كيف تميز بين خطة درس رسمية قد تناقشها في مساق على مستوى الكلية في طرائق التدريس، ومخطط تقوم بكتابته لصف بالمدرسة الثانوية تقوم بتعليمه؟

14. افترض انه قد طلب منك تطوير وحدة طويلة المدى حول جداول الصدق Truth Tables للسنة الثامنة بمادة رياضيات المدارس المتوسطة. فينبغي أن يتضمن مفاهيم مثل: النفي Negative، والوصل Conjunction، والفصل Disjunction، وقيم الصدق. بين كل ما يأتي:

أ. ما هي الخطوات التي ستقوم باتخاذها لإعداد مثل هذه الوحدة.

ب. الموضوعات التي تريد تضمينها بالوحدة.

ج. عدد الدروس التي تتطلبها هذه الوحدة.

15. اختر موضوعاً من وحدة جدول الصدق، والتي قيمت بإعدادها لتمرين 14 واكتب درس مراجعة لها.

16. قم بإعداد درس للسنة السابعة لصف الرياضيات والذي يعالج موضوع: المتوسط والوسيط والنوال بوقت واحد، وقم بتوفير وقت كاف لتمرين التدريس.

17. جد أربعة معلمين لمادة الرياضيات والذين يمتلكون رغبة بالتعاون معك بإعداد تقرير بحث صغير. وينبغي أن يكون اثنان منهما من ذوي الخبرة العميقة، أما الآخرين فيمكن أن تكون خبرتهما محدودة نسبياً. اطلب من كل واحد منهم كتابة خطة درس حول موضوع في رياضيات المدرسة الثانوية. وحاول أن تجعلهم يعملون جميعاً على نفس الدرس، إذا أتاحت لك فرصة مناسبة، وبعدها راقب كلا منهم وهو يقوم بمهام تعليم الدرس المعد، شريطة أن تكون خطة الدرس بين يديك. اكتب نقداً حول الدرس وخطة بناء على المعلومات التي استقتها من هذا الفصل. (شريطة أن تطلع وعداً بعدم مشاركة النقد الذي أعدته مع أي شخص، وإتاك ستقوم بإتلافه بعد استخدامه في هذا المشروع).

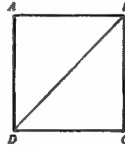
18. لكل من الموضوعات الآتية اكتب واجباً بيتياً محدداً لصف يتدرجات متوسطة. تستطيع استخدام أي كتاب

أنجز الآن Do-Now: اعرض مسلمة التطابق الموضحة:

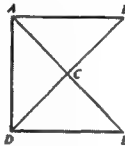
بعدئذ ناقش مع الصف مستخدماً (AAA) أو (SSA) (حاول توضيح طبيعة الغموض الذي يصاحب استخدام SSA). وبعدها: أنجز البراهين الآتية:



المعطى: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
 $\overline{DC} \cong \overline{AD}$
 برهن: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



المعطى:
 $\angle ADB \cong \angle CBD$
 $\angle ABD \cong \angle CBD$
 برهن:
 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



المعطى:
 $\overline{AD} \cong \overline{AB}$
 $\overline{CD} \cong \overline{BC}$
 برهن:

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$

11. اعد درساً عن الآلة الحاسبة اليدوية حول ما يأتي:

أ. الدرس الأول على نظم المعادلات للسنة الأولى بمادة الجبر.

ب. الدرس الأول حول المنحنيات المثلثية.

ج. الدرس الأول على قانون الجيوب Law of Sines.

د. الدرس الأول على جمع وطرح الأرقام ذات العلامات في الصف المتوسط بالمدرسة.

هـ. الدرس الأول على تغيير الكسور إلى أعشار في الصف الأساسي بالمدارس الثانوية.

12. طور سلسلة من عروض تستغرق 8-10 دقائق حول أي من الموضوعات الآتية، والتي يزعم إعدادها لصف يعمل على تقسيم العمل بالنسبة لجل الفترة الزمنية.

ج. "قمت بحل الواجب البيتي - الخطأ وقمت بزمجه بعيداً هذا الصباح عندما أخبرني أحد رفاق الصف بأنني قد قمت بحل الواجب الخطأ".
ط. "لقد سمعت أن لدي واجباً بيتياً يوم أمس".

21. اختر وحدة دراسة في المنهاج الدراسي بالمدرسة الثانوية واعد واجباً بيتياً للمراجعة.

22. اعد ثلاث واجبات كشف بتيقة محددة. تستطيع اختيار أية ثلاث موضوعات من المنهاج الدراسي لرياضيات المدرسة الثانوية.

23. بين الموضوعات التي ستكون مفيدة في المراجعة خلال "الوليمة" في الواجب البيتي - المحدد في كل من المساحات الآتية:

- الدرس الأول في التحليل العالمي لتعددات الحدود.
- درس حول مساحة شبه المنحرف.
- درس حول صيغ الاختصار (الزاوية العامة) في المثلثات.
- درس حول حل المعادلات بالدرجتين الثالثة والرابعة وتحتوي على جذور نسبية وغير نسبية.
- درس تقديمي على الأعداد غير النسبية في الجبر الأولي.

24. اعد مسألة إثرائية لفرض تضمينها في واجب بيتي محدد حول كل من الموضوعات الآتية:

- ضرب وقسمة أحاديّات الحدود في الجبر الأولي.
- العمليات مع الأعداد المركبة في جبر السنة الثانية.
- برهنة تطابق المثلثات في الهندسة المستوية.

25. اختر أي موضوع من رياضيات المدرسة الثانوية وبين كيف إن الواجب البيتي المحدد لفرض تهئية الصف لاختبار وحدة يختلف عن الواجب البيتي المحدد بمكان آخر في الوحدة.

26. استجب إلى شكاوي الطلبة الآتية:

- "لقد أعطيتنا الكثير من الواجب البيتي".
- "الواجب البيتي صعب جداً".
- "تقيّة المعلمين لا يعطوننا واجباً بيتياً في نهاية الأسبوع".
- "لقد قمت بجمع واجبي البيتي ثلاثة مرات هذا الأسبوع ولكنك لم تتم بتناول واجب؟؟ ولو لمرة واحدة!"

هـ. "قمت بحل واجبي البيتي في كراس بغلاف سميك وكان علي أن أفرقه من الكراس مما أفقدني جميع محتويات الكراس".

منهجي مناسب بمادة الرياضيات لكي يمينك في عملك. وحاول أن تعد تدبيرات احتياطية لكل من نهايتي طيف القابليات في هذا الصف.

أ. الدرس الأول حول الصيغة التربيعية.

ب. الدرس الأخير قبل اختبار حول متوازيات أضلاع خاصة.

ج. الدرس الأول حول ضرب الأعداد ذات العلامات.

د. الدرس الأول حول قانون الجيب.

هـ. درس حول العامل المشترك الأعظم للسنة الثامنة.

و. الدرس الأول حول نظرية فيثاغورث (هندسة المدارس الثانوية).

ز. الدرس الأول حول القياسات المترية (السنة السابعة).

19. افترض أنك تقوم بتعلم مادة الرياضيات لصف بمدرسة عالية. وقد طلب المدير من هيئة التعليم تحديد مشروع -

قصير الأمد لكل صف. صف المشروع الذي سيقوم طلبك بإجرائه في كل من المقررات الآتية. وتناقش بمدئذ كيفية معالجتك لهذا المشروع مع طلبة الصف.

حاول أن تضمن في مناقشتك مقدار الوقت الذي تخصصه له، من وقت الدرس، وتوزيع العلامات، والعقاب الذي يوازي الفصل في إجراء المهمة الجديرة بالإكبار، أو الفضل تماماً في إنجازها، والاستخدامات لأي طالب بحث ينبغي وضعها (أنشطة متابع).

- الجبر الأولي.
- جبر السنة الثانية.
- حساب مثلثات.
- الهندسة.

20. استجب لبررات الطالب الآتية في عدم إنجاز الواجب البيتي:

- "لم يكن لدي وقت كاف الليلة الماضية، وذلك لوجود واجبات بيتية كثيرة في موضوعات أخرى".
- "عملت خارج وقت المدرسة ولم يتوفر لدي وقت كاف لإنجاز الواجب البيتي".
- "كان علي إجراء المزيد من العمل البيتي - اليومي، مع رعاية اخوتي واخواتي الصغار بعد انتهاء المدرسة، ولم يتوفر لدي وقت كاف لإنجاز واجبي البيتي".
- "لم أفهم الواجب البيتي".

هـ. "نسيت استمساخ واجبي البيتي - المحدد يوم أمس".

و. "فقدت (1) دفتر الواجبات، (2) كتاب المنهج، (3) الواجب البيتي الكامل".

ز. "لم اعمل على واجبي البيتي".

يردن الانتقال من صفك بسبب وجود الكثير من الضوضاء بالترفة وأنهن لا يستطعن التركيز على الدرس. ما هي طبيعة رد فعلك؟

31. وردتك ملاحظة من مساعدة المدير تدعوك بالحضور إلى مكتبها لتوضيح سبب التأخير الدائم في تقديم سجلات الحضور، ولماذا يتجول طلبتك باستمرار من غرفة البيت Homeroom ويلاحظون في مررات الرواق. ما هي بعض التوضيحات التي تستطيع الدفاع عنها؟

32. قام المشرف بتحذير معلم بسبب تأخير المستمر بالقدوم للصف. كانت استجابة المعلم:

إن كلاً من الواجب البيتي - المحدد، وأنجز - الآن موجودة على النوام على اللوحة (من الدروس المبكرة) قبل ابتداء فترة الدرس، ويعرف الطلبة تماماً أين يضعون الواجب البيتي وراء السبورة، ولدي طالب مراقب ممتاز يقوم بأخذ الحضور، لذا ليس ثمة فارق بين حضوري مبكراً أو تأخيري لفترة دقيقة أو دقيقتين.

33. سألك أحد طلبتك بالسماح له في مفادرة الصف، ولسبب من الأسباب، سارعت برفض طلبه. وقد أصر على "ضرورة المفادرة"، وبعد حصول مشادة كلامية بينكما، نهض واقفاً وغادر الصف. كيف ستعامل مع هذا الموقف عند عودته؟

34. يلاحظ بضعة معلمين، بين الحين والآخر، تكرار أحد طلبتهم القيام بالعمل على درس آخر خلال درس الرياضيات، رغم تحذيره بعدم القيام بذلك.

تظهر أدناه الطرق المقترحة لمعالجة المعلمين لهذه الحالة. ما هي ردود أفعالك تجاه كل حل من هذه "الحلول"؟
أ. تم مصادرة المادة وإتلافها.
ب. نوقشت الحالة مع معلم تلك المادة.
ج. تم إعلام والد الطالب.
د. تم إعلام المدير.
هـ. طرد الطالب خارج الصف.

35. لدى معلم فترة تحضير تلي مباشرة السنتين السابقتين لصفوف السنة الأولى بمادة الجبر. ومن أجل هذا فإنه يلجأ إلى إعداد واستنساخ الاختبارات والامتحانات السريعة لهذه الصفوف خلال هذه الفترة. ويشعر المعلم بأن هذا العمل يزيد من أمن هذه الامتحانات. ما هي بعض النقاشات التي تتفق مع هذه الطريقة أو تختلف معها؟

و. لم تمر بالمائل في الصف بحيث لم استطع فهمها.

ز. لم تطالع الواجب البيتي الذي سلمته لك، وكان كل ما فعلته هو وضع إشارة عليه فقط.

27. أعد استفتاء يديره اثنتا عشر معلماً لمادة الرياضيات، كحد أدنى، والذي ستطرح خلاله الأسئلة الآتية:

أ. ما مقدار حاجة الطلبة إلى تكرار الواجبات اليومية؟
ب. ما هو نوع الواجبات المحددة المطلوبة؟ وما هي طبيعة الأسئلة المطروحة؟ وكما تستغرق هذه الواجبات؟

ج. هل يتم إعداد الواجبات المحددة على أساس يومي، أو أسبوعي، أو شهري؟

د. هل يتم تدقيق الواجبات المحددة بواسطة المعلم أو بواسطة طلبة آخرين؟

هـ. كيف تتم مراجعة الواجبات المحددة لتحديد تمامها وتنوعيتها؟

و. ما هي الصيغة المطلوبة لهذه الواجبات المحددة؟

ز. هل يقوم المجيب Respondent بتحديد مشاريع بحث أو مقالات الفصل الدراسي في درس الرياضيات؟

بعد أن تقوم بجمع الاستفتاءات، بعد اكتمال العمل عليها، ابدأ بتحليل الإجابات للوقوف على إمكانية وجود اتفاق بين المجيبين حول أي من الأسئلة المطروحة، أو وجود عدم اتفاق بصدد أمر محدد أثير ضمن الاستفتاء. ماذا تستطيع استنتاجه من هذا التحليل؟

28. علق على الملاحظة الآتية الصادرة عن معلم إلى همد الانضباط:

وجدت فرانك Frank يفش في الاختبار، لذا فقد قمت بتعزيز رفته. وقد قام بشتمني وتوعدني بشدة، بعدئذ خرج مسرعاً من الصف في منتصف الفترة. اعتقد بضرورة فصله من المدرسة.

29. استلم الطالب بطاقة تقريره والتي تؤثر على وجود غياب لديه بمادة الرياضيات لفترة 23 يوماً، فنجم عن ذلك حصوله على درجة رسوب بالمادة، نظراً لأن القانون بالمدرسة يأمر برسوب الطلبة الذين تزيد غياباتهم على إحدى وعشرين يوماً. يلجأ الطالب إلى إنكار غيابه بشدة لهذه الأيام، كما وأن بقية المعلمين لم يثبتوا مثل هذه الغيابات. كيف ستعالج هذه الحالة؟

30. أخبرك مستشار إرشاد المدرسة بأن هناك ثلاثة طالبات

لا تعمل بصورة فعالة، لذا قد قرر تغيير صيغ المجموعة عند نهاية الوحدة. ما هي الإجراءات التي يستطيع استخدامها لإعادة تشكيل المجموع بأفضل طريقة ممكنة؟

45. صف ثلاثة خصائص للطلبة ينبغي على المعلم اعتبارها عند إعداد مجموعة هجينة.

46. ما هي مهارات إدارة الخلافات التي يفتقر إليها أعضاء مجموعة تعلم تعاوني - مؤثر؟

47. قدمت طالبة تقريراً بأن مجموعتها تعمل بصورة جيدة جداً، ولا توجد خلافات أو نقاط عدم اتفاق. كيف ستعالج هذه الحالة؟

48. صف بعض الطرق والتي يستطيع بواسطتها المعلم مراقبة تقدم مجاميع التعلم التعاوني.

49. قم بتصميم درس سيمكن أعضاء فرق التعلم التعاوني على اكتشاف أن مجموع جذور معادلة بصيغة:

$0 = bx^2 + bx + c$ هو $-b/a$ وأن حاصل ضرب هذه الجذور هو c/a . افترض إن الطلبة يستطيعون حل مثل هذه المعادلة التربيعية بأسلوب التحليل العنبري أو بواسطة صيغة.

50. يظهر أدناه وصف هزيل لهدف الأداء:
يجب أن يكون الطالب قادراً على فهم قانون جيبس التمام.
بين فيما إذا كانت أسئلة الاختبار الآتية مناسبة لاختبار مدى تحقيق الهدف من عدمه:

أ. اشتق صيغة لقانون الجيبس، للمثلث حاد أو منفرج.
ب. لديك المثلث ABC وقياس a , b والزوايا C . قم بحل المسألة بدلالة c مقرباً إلى اقرب مرتبة عشرية.

51. افترض قدوم المستشارة إلى الصف الذي تقوم بتعليمه، وزغبتها بالاطلاع على أهداف الأداء التي يتوقع بلوغ الطلبة لها خلال الأسبوع الماضي. بعد ذلك قامت باختيار عشوائي لمجموعة من التلاميذ لاختبارهم في ضوء الأهداف.

أ. هل أن هذا الأسلوب يعد منتصفاً في تقييم الفاعلية؟
ب. هل ستقوم باختيار أهداف - بمستويات متدنية- من الآن فصاعداً لضمان فرصة أفضل لعرض نجاح طلبتك؟

ج. هل تعتقد بأن معرفتك في قيام مستشارك بتكرار هذا

36. علق على المعالجة الآتية لمسألة الانضباط: إذا أصرت طالبة على إثارة الشغب بصفك، فأبمدتها خارج الصف وال صف بمادة الرياضيات يؤدي بمستوى أداء أقل بكثير (وبترخيص من معلمين آخرين).

37. افترض أن طالباً في المرحلة التاسعة بمادة الرياضيات يعد باستمرار وبإصرار إلى إزعاج الطلبة المحيطين به. وتنهب الطلبات المستمرة للتوقف عن هذا النشاط المزعج سدى ودون اهتمام. بين بعض الخطوات التي ستقوم باتخاذها لإيجاد سبل لمعالجة هذه الحالة. وبرز استجاباتك.

38. اسأل مستشار قسم الرياضيات مناقشة إدارة الصف خلال جزء من لقاء القسم والذي ستشارك به بصفة مسجل. وبعد هذا اللقاء، اكتب تقريراً لتلخيص أهم موضوعاته، مؤشراً نحو الأساليب الخاصة بإدارة الصف كما تحدث عنها المعلمون خلال اللقاء.

39. قم بتهيئة شريط فيديو لمادة الرياضيات التي ستقوم بتعليمها. وادع بضعة معلمين، من ذوي الخبرة أو من يفتقرون إليها لمعاينة شريط الفيديو وإبداء ملاحظاتهم إزاء تقانات إدارتك للصف. قم بتلخيص الملاحظات المطروحة خلال معاينة شريط الفيديو.

40. لاحظت مدرسة بأنه في بعض مجاميع التعلم التعاوني بصفا هناك طالب لامع يقوم بإنجاز جميع العمل. ما هي بعض التقانات التي يمكن أن تستخدمها لمنع حصول هذا الأمر؟

41. تلقيت مكالمة هاتفية من أب غاضب لأحد طلبتك اللامعين. وكانت شكوى الأب تدور حول تراجع ولده بسبب اضطراره إلى مساعدة الطلبة الضعفاء بمجموعته. كيف ستستجيب لهذا الأب؟

42. لاحظت المدرسة بأن أحد الطلبة محدودي القابلية لا يشارك في مجموعته. كيف ينبغي على المدرسة معالجة هذه الحالة؟

43. قم بتصميم تعليم تعاوني لدرس استكشافي والذي سيمكن الطلبة من صنع تخمين يخص العلاقة القائمة بين زوايا المثلث الثلاثة.

44. أدرك مدرس بأن مجموعة من المجاميع التعاونية في صفه

أن كل هدف من الأهداف قد تمت صياغته بصورة جيدة:

أ. سيقوم التلاميذ ببيان حقل Domain ومدى دالة معلومة تصف شكل الدالة.

ب. سيفهم الطلبة كيفية حل المعادلة التربيعية بأسلوب "إكمال المربع Completing the square".

ج. سيقوم الطالب بتعريف متوازي الأضلاع، والمستطيل، والمربع، والمعين.

د. سيدرك الطالب إدراكاً كاملاً موضوع "الاستدلال غير المباشر" في الهندسة.

الأمر دورياً سوف يحدو بك أن تكون معلماً أكثر تأثيراً^٢ برز إجابتك !

52 اكتب قائمة باثنتي عشر فعلاً Verbs والتي تمتاز بكونها غامضة جداً وغير واضحة عند استخدامها في عبارة أهداف الأداء. ثم اكتب اثنتي عشر فعلاً آخر والتي لا تعاني من الغموض واللبس، والتي يمكن استخدامها في بيان أهداف الأداء بوضوح.

53 تظهر أدناه أربعة أهداف للأداء (ليس من الضروري أن تكون جيدة). اكتب سؤالين تختبر من خلالهما كل هدف لتحديد مدى تحقيقه من عدمه. كذلك وضح هل

المحق B Appendix

تقصيص (اعطاء) الواجب البيتي

Assigning Homework

بما أن اغلب دروس الرياضيات تتطلب متابعة مستمرة من الطلاب لتحسين وصل مهاراتهم المكتنية حديثاً، ينصح بان يكون التخطيط لإعطاء الواجب البيتي دقيقاً وحذراً، وان يكون متضمناً في خطة الدرس، والسبب الثاني لإعطاء الواجب البيتي هو لتحسين الاعتماد الذاتي ولتطوير مهارات التأمل والتفكير الخلاق. ولغرض تحقيق هذه الغايات فان كل واجب ينجزه الطلاب يأمل أن يكون مرتباً ومنظماً ودقيقاً وعلى اكمل وجه ممكن.

ويجب أن تتم مناقشة كل واجب بيبي في الصف في اليوم التالي وراجع كجزء من فعالية مجموعة كبيرة أو صغيرة. وحتى يمكن أن يجمع من وقت لآخر كي يقرأه ويحلله المعلم. تكون تحليلات المجموعة الصغيرة أو الصف كله ملائمة لمختلف أنواع الواجبات ويجب على المعلم أن يتخذ هذا القرار، فليست هناك صيغة لطريقة (استراتيجية) أفضل. وقد كرس بقية هذا المبحث لطبيعة أو ماهية إعطاء الواجب البيتي. ويتضمن الواجب البيتي الأسبوعي أو طويل المدى عادة خطط (مشاريع) تتطلب تراكيباً خاصة يحددها المعلم. وتتطلب أوراق الواجبات اليومية التي توزع قبل بداية الدرس تخطيطاً كثيراً ويحتمل احتياجها إلى بعض التعديلات خلال مسيرة الفصل الدراسي.

لا يتطلب الأداء التعليمي الفاعل والمخطط له بشكل جيد عادة الأخذ بعين الاعتبار مسألة التأديب (الإطاعة). وعلى أية حال فإن التعليم الضعيف الذي غالب ما يزيد المشاكل التأديبية يتحطم أكثر بتخصص واجب بيئي عقابي يعطي لحل تلك المشاكل التأديبية.

إن إعطاء الواجب البيئي يعد جزءاً تكاملياً من العملية التعليمية كلها ويجب أن يمالج بالتالي بصورة صحيحة. وما تبقى من هذا البحث قد رتب لإعطاء فرصة للمعلم للتركيز على النواحي المفتاحية عند إعطاء الواجبات البيئية، ومن ثم تكوين خطة شخصية.

ما الذي يجب أن يتضمن في إعداد تخصيص الواجب البيئي؟

What Should Be Involved In Preparing The Homework Assignment?

من المفيد لكل من المعلم والطلاب توقع أو تخمين الواجب البيئي. ويجب على المعلم كجزء من التحضير للدرس والواجب البيئي أن يقوم محل التمارين المعطاة كواجب للطلاب. ولن يكون هذا نافعاً أكثر في تحديد الوقت المطلوب بدقة من الطلاب للحل حسب، ولكنه سيساعد كذلك في تمكين المعلم من تنبيه الطلاب حول مكان المشاكل المتوقعة في الواجب البيئي قبل أن يواجهوها في البيت. وهكذا، وبأخبار الطلاب سلفاً ما سيكون منهم بالنسبة للواجب البيئي، يجعل المعلم الواجب جزءاً أكثر معنى في العملية التعليمية برمتها.

كيف يجب أن تكون طبيعة (ماهية) إعطاء الواجب البيئي؟

What Should Be The Nature Of The Homework Assignment ?

هناك العديد من أنواع إعطاء الواجبات البيئية الممكنة لدروس الرياضيات. وليست الواحدة أفضل من الأخرى بالضرورة، كما يجب أن يحدد محتوى الدرس وطبيعة نوع الواجب البيئي. وربما يكون المفهوم المفتاحي الذي يجب أن نضعه في أذهاننا عند التحضير لإعطاء الواجب البيئي هو (التنوع Variety). ومن المحتمل أن تكون الرتابة هي العامل الرئيس الذي يؤدي بالطلاب إلى ترك الواجب البيئي والتخلي عنه. يجب على المعلمين المحاولة لإعطاء مختلف أنواع التمارين. فمثلاً، يجب أن تتضمن بعض أنواع التمارين التي سيتم اختيارها تمارين معارسة، ومسائل شقوية، وبراهين، وتمرين تركيبي (بنائية)،

لماذا إعطاء الواجب البيئي؟

Why Assigning Homework?

توجد عدة أسباب لإعطاء الواجب البيئي بصورة منتظمة لدرس الرياضيات. وربما يكون السبب الأكثر أهمية هو إعطاء كل الطلاب دوراً فاعلاً في العملية التعليمية. ويعتقد بعض المثقفين أنه بالرغم من أن الصف قد يعطي مناخاً تعليمياً فاعلاً، فإن (التعلم الفعلي) يحدث عندما يعمل الطالب وحده بسرعه الخاصة خارج الصف. ولا يعني ذلك التقليل من أهمية العملية التعليمية الصفية. وإنما التأكيد على أهمية إعطاء الواجب البيئي. وفي الصف يعطي المعلم معلوماته بصورة عامة على وفق مستوى الطالب المتوسط مع بعض التكيفات للطلاب الأضعف والأقوى، وقد يبقى هناك العديد من الطلاب الذين لا تناسبهم خطوات تقديم المعلومات بصورة دقيقة جداً. وقد يخدم التعليم الصفي هؤلاء الطلاب كونه صيغة (تركيبية) لتعرضهم لمادة جديدة، في حين يوفر الوقت الذي انفق على الواجب البيئي التجربة (الخبرة) التعليمية الأصولة.

وتمنح الواجبات البيئية الطلاب فرصة للحصول على فهم أوسع للموضوعات والمفاهيم التي درست في الصف، وتمنحهم كذلك شكلاً لتحليل أعمق للموضوع ذات الصلة. وهذا مما تندر إمكانية حصوله في الصف، حيث يكون المعلم سائراً بخطوات محددة سلفاً. ويعطي الواجب البيئي الوقت للطلاب للتفكير في الواجب بسرعتهم الخاصة لكي يمكن للمعلم الخلاق أن يتولد من خلال المشاريع الخاصة والدراسة المستقلة.

السبب الآخر المهم لإعطاء الواجب البيئي هو تحفيز الطلاب للتعلم أكثر. وأن السماح بالتوسع لما قد تم تعلمه في الصف قد يمنح الطلاب رغبة بزيادة معرفتهم. ويمكن للمعلم بين فترة وأخرى أن يلجس لدرس اليوم التالي. ويجعل الطلاب يعملون على مثل هذا النوع من الواجبات المدة بعناية في البيت حيث يمكنهم العمل بمفردهم على تطوير الرغبة الحقيقية للمضي قدماً في مجال الدرس

إن أحد الأسباب الأكثر شيوعاً لإعطاء الواجب البيئي ربما يكون توفير التمرين للمهارة المطورة حديثاً. وإذا ما خطط له بصورة صحيحة، فإن مثل هذه الأمثلة للمهارات الضرورية يمكن أن تكون فاعلة جداً. ول سوء الطالع، فإن مثل هذا النوع من الواجب يساء استخدامه في الغالب. فعندما يستخدم كعقاب لسبب تأديبي فإن إعطاء مثل هذا الواجب البيئي لا يصبح بلا فاعلية فحسب وإنما قد يصبح ذو نتائج معاكسة.

المقدمة.

مثال:

يمكن أن يتضمن الواجب البيتي لما قيل إعطاء التماثل الفياثاغوري لدرس تشابه أوجه المثلثات على ما يأتي:

- استخدم حاسبة علمية لإكمال الجدول التالي.
- استخدم العلاقات التربيعية حيثما أمكن.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\sin^2\theta$	$\cos^2\theta$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta$
30					
45					
60					
50					

ما هي القواعد العامة التي يمكن أن تصح عن $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ ؟

ورغم أن إكمال الجدول يجب أن يكون بسيطاً نسبياً للطلاب فإنه يجب أن يتقدموا لاكتشاف علاقة ذات أهمية.

ومن أحد الأنماط الأكثر شيوعاً لتخصيص الواجب البيتي هو ما يسمى غالباً بالواجب (المحلزون Spiraled) لأنه يعود بشكل حلزوني على المادة التي تم تعلمها سابقاً. ولربما تعود شعبية هذا النوع إلى قدرته على تلبية وظائف إعطاء واجبين بيتيين. فضلاً عن تمكينه الطلاب من تعزيز تعليم الصف الحالي فإنه يوفر مراجعة للموضوعات التي تمت دراستها سابقاً. فعلى سبيل المثال، افترض أنك تخصص واجباً بيتياً بعد درس عن (قياس الزاوية بالدرجة) في مدرسة هندسة ثانوية.

وكجزء من هذا الواجب يمكن أن تضمن تمريناً يراجع التشابهات، وآخر يبرهن أن متوازي الأضلاع، وآخر تركيباً أو بناءً. وبصرف النظر عن الموضوعات السابقة التي ستنتخب لكي تدرج في التمرين البيتي، ويجب أن يكون الاختيار بأسلوب منظم ومرتب.

ومن إحدى الطرائق الممتعة لحلزونة إعطاء الواجب البيتي هي برسم توليف الواجب في الهامش المجاور للتمرين في نسخة الكتاب المنهجي للمعلم. وهذا سيساعد في الحفاظ على سجل لكل مادة تم إعطاؤها كواجب بيتي من عدمه. وتعتمد درجة ومدى الحلزونة على الحاجات الخاصة لكل صف. وتبرز هذه الإضافة فكرة أن خطط الدرس (بضمنها إعطاء الواجب البيتي) يجب أن لا تستخدم من سنة لأخرى بدون إجراء تعديلات ملموسة لكل درس.

وأسئلة فكرية، وتطبيقات على مفاهيم ومبادئ تم أخذها حديثاً، ثم قراءة الواجبات. ويحتاج الواجب المقروء وخصوصاً في درس الرياضيات تحفيزاً كبيراً للطلاب لأن الواجب الشقوي يحتمل أن يحذف، أو أن يكون في حكم غير الضروري عند الطلاب.

وفضلاً عن تنوع أنماط التمارين المقدمة، فيمكن أن تتنوع التمارين في طبيعتها كذلك. فعلى سبيل المثال يمكن أن يكون القصد من أحد التمارين بشكل كلي المراجعة للمادة التي تم دراستها سابقاً، في حين يمكن أن يشتمل آخر على أسئلة استكشافية "Discovery questions". وقد تشمل مختلف أنواع التمارين في واجب المراجعة. ويمكن أن يقدم الواجب ببساطة التمارين التي تراجع عمل الدروس السابقة، أو قد توفر التمارين التي ستساعد الطلاب على المراجعة لاختبار حول كامل الوحدة (الفصل Unit).

وقد يتضمن نوع آخر من إعطاء الواجبات البيئية مدخلاً استكشافياً (Discovery Approach). وهنا يعطى الطالب سلسلة من التمارين التي تلقى الضوء على الدرس القادم، أو اللاحق. وترتب الأسئلة عادة بنظام يتيح للطلاب أن يكتشف فكرة جديدة بعد إكمال سلسلة التمارين. وفيما يأتي أمثلة على هذا النوع من التمارين.

مثال:

قد يشمل الواجب البيتي السابق تماماً النقاش حول علاقة المنحنى بين خطين متوازيين وخطين متعامدين على ما يأتي:

1. استخدم شكل تقاطع المنحنى لمعادلة الخط المستقيم لتحديد منحني كل خط، بعدها استخدم آلة حاسبة رسومية لرسم كل زوج من هذه الدوال:

$$y = -\frac{1}{2}x + 3, \quad y = 2x + 1 \quad (a)$$

$$y = -\frac{3}{5}x - 2, \quad y = \frac{3}{5}x + 2 \quad (b)$$

$$y = -\frac{3}{5}x + 1, \quad y = -\frac{3}{5}x + 2 \quad (c)$$

$$5x + 3y = 15, \quad 5x + 3y = 5 \quad (d)$$

2. أي خطين يبدوان متعامدين؟ وما العلاقة بين منحنياتها؟
3. أي الخطوط تبدو متوازية؟ وما العلاقة بين منحنياتها؟
4. ضع جملة عامة تخص منحنيات الخطوط المتوازية والمتعامدة (على أساس التمرين الجاري).

تعطي مجموعة التمرين هذه مراجعة للمهارة المتعلمة سلفاً، وبعدها تتطلب من الطالب إعطاء تعميمات بسيطة من التفاصيل

ومن الطبيعي أن يؤدي هذا الأمر إلى إهدار وقت الطلاب من غير أو القليل من الإنجاز في التعليم. ولهذا يجب أن يكون التخصيص للواجب البيتي موجزاً ومنظماً بصورة صحيحة للمحتويات المطلوبة بأقل وقت ممكن.

من الصعب تحديد سقف زمني للواجب الرياضيات البيتي. ومن الواضح أن معلم الرياضيات سيقضل إعطاء الصف واجباً بيتياً أطول ليتأكد فقط من أن كل شيء قد تم تغطيته بالكامل. ولكن عليه أن يتذكر إن الرياضيات إنما هي مادة واحدة فقط من بين عدة دروس ينبغي على الطالب دراستها. ولذلك يجب أن يكون الوقت المخصص لواجب الرياضيات البيتي عموماً بمعدل نصف ساعة للواجب الواحد (وهذا مجرد خط عام يمكن تغييره تبعاً لكل ظرف معين أو خاص).

هل يجب إعطاء جميع الطلاب العمل نفسه؟

Should All Students Be Assigned The Same Work ?

مرة أخرى (وبمجازفة التكرار) يعتمد جواب هذا السؤال على نوع المعلم الذي يقصد إليه إعطاء الواجب البيتي. فإذا كان الصف متجانساً طبقاً لقابليات وإنجازات الطلاب الرياضية، فنحنها ربما يكون الواجب البيتي الموحد بجميع الصف مناسباً. وفي واقع الأمر ليس بجميع الصفوف عموماً هذا النوع من التركيب الموحد. ولذلك قد يكون من الأفضل البحث عن بديل للواجب الواحد.

إن التعليم والإرشاد الأفضل ينصح به حسب الحاجات الفردية لكل طالب. ولأسوء الطالب، ليس من الأمر العملي في شيء تلبية مثل هذا الهدف المرجو في صفوف المدارس الثانوية النظامية (الاعتيادية). وربما تكون إحدى الطرق المتعددة للوصول إلى مثل هذا الهدف من خلال إعطاء الواجب البيتي. ويوفر إعطاء الواجب البيتي وسيلة مفيدة لتعديل وتنظيم تعلم الصف لتلبية الاحتياجات الفردية للطلاب.

ويمكن إعطاء واجبات تميزية خاصة للطلاب الأكثر إمكانية والذين يمكن عندها إعفاؤهم من بعض الأمثلة أو تمارين المراجعة. ومن جهة أخرى، يمكن إعطاء الطلاب الذين يحتاجون أمثلة ومراجعة أكثر لمهارات ضرورية معينة تماريناً مخصصة لهذا الغرض. ولا يجب أن يهمل معلم الرياضيات هذه الفرصة الدقيقة لجعل جزء على الأقل من العملية التعليمية فريداً.

كم مرة يجب أن يتكرر إعطاء الواجب البيتي؟

How Frequently Should Homework Be Assigned ?

بما أن إحدى الوظائف الأساسية لإعطاء الواجب البيتي هي

ويمكن استخدام عدة أنواع أخرى من تخصيصات الواجب البيتي لدرس الرياضيات. ويمكن أن تشمل هذه التجارب البيئية لبعض المبادئ الرياضية (مثلاً، إلقاء العملة المعدنية لحساب الاحتمالات عالياً). والمقالات القصيرة عن أشهر الرياضيين، أو بعض الجوانب الوصفية لتاريخ الرياضيات (مثلاً، كيف قاس ارستوثن محيط الأرض)، والواجبات المكتتية (مثلاً إيجاد اصل الرمز $\sqrt{\quad}$ أو الاستخدام الأول للحرف π ليمثل معدل أو نسبة المحيط الدائري إلى قطره).

وأياً كان الواجب الذي يختاره المعلم لاستخدامه في موقف معين فإن مفتاح النجاح هو التنوع Variety. ولا يجب أن يكون التنوع في أنواع التمارين فحسب، وإنما يجب أن يعلي الموضوع نوع الواجب وإن يغير لذلك كلما دعت الحاجة. وبالرغم من أن بعض المعلمين يخصصون الواجب البيتي الذي يتكون من خليط من أنواع الواجبات البيئية. إن مثل هذه الواجبات لمثل هؤلاء المعلمين تقرراً ببساطة مثل (حل ص 353 المثال 1-29 الأرقام الفردية فقط). ولن يمر وقت طويل على الطلاب ليتصرفوا بالمثل (أو يردوا بالمثل) على هذا النوع من التخصيص في الواجبات البيئية. والنتيجة هي فوات الفرصة لتحقيق التعليم المعنوي (المفيد Meaningful leaving) في الرياضيات خارج الصف. تذكر بأن احتياجات الصف تحدد نوع التمرين، أو الواجب البيتي الذي يجب أن يعطى للطلاب.

كم من العمل يجب أن يتطلبه كل واجب؟

How Much Work Should Each Assignment Require?

إن الجواب على هذا السؤال يجب أن يختلف تبعاً لكل جمهور معين. ونستطيع الإجابة على هذا السؤال فقط بتوفير الخطوط العامة لوضع وترتيب طول الواجب المناسب لصف معين. وسيكون لكل واجب بيتي أهدافاً معينة مبنية على حاجات الدرس. والبراعة في إعداد الواجب المناسب هي تحقيق الأهداف بأقل كم من وقت العمل للطلاب. ويجب أن لا يكون هناك تكرار غير ضروري أو يقلل على أقل تقدير. ويجب أن يتم انتخاب التمارين بعناية بحيث يكون محل واحد ذو فاعلية كبيرة في تلبية تحقيق الأهداف لواجب بيتي معين.

إن الطلاب حاذقين في إدراك متى يكون الواجب ذو وقت كاف. ومتى يكون محلاً بمادة زائدة. وإذا ما كان الواجب أو التمرين مكرراً دائماً فيمكن أن يشعر الطلاب بالملل بسرعة ولا يتحفزون لحله. ونتيجة لذلك فربما يقومون بحله (كثير لا بد منه) أو ربما يستسرخونه من أحد الزملاء في الصف ثم يسلمونه.

تعزيز تعليم الصف، فإن إعطائه يجب أن يتبع كل درس صفّي. ومن الطبيعي أن لا تتطلب بعض الدروس واجباً تبعياً. عندها يمكن عدم إعطاء واجب بيتي أو حتى واجب مراجعة.

يعتقد بعض المعلمين أنه ليس من الضروري إعطاء واجب بيتي عند عطلات نهاية الأسبوع. ويقول البعض الآخر إن الواجب البيتي يجب أن يعطى أربعة أيام من كل خمسة أيام على أن يتنوع اليوم الذي ليس فيه أي واجب على وفق الاحتياجات التعليمية للصف. إن كلا من هاتين الخطتين العقلانيتين لا تخلو من الفخاخ. ومن المستحسن في الغالب ابتداء المنهج الدراسي بوجهة نظر صارمة اخذين بالحسبان تكرار الواجب البيتي وبعدها إجراء بعض التعديلات حيثما يكون ذلك مناسباً، خير من البدء بـ(وعود) بعدم إعطاء واجب بيتي وبعدها تخلف هذه الوعود عندما تتطلب الاعتبارات التعليمية تغييراً باتجاه تكرار الواجب البيتي أكثر فاكثراً. ويرحب الطلاب دائماً بالتغيير نحو مسيرة أكثر تساهلاً من فعل العكس.

ويمكن أن يشير السؤال عن تكرار إعطاء الواجبات البيتية إلى عدد التكرارات التي يقدم بها الواجبات إلى الصف. فهل يجب أن تعطى إلى الصف على أساس يومي، أو أسبوعي، أو نصف شهري، أم شهري؟ ومرة أخرى يجب أن يحدد المعلم أية استراتيجية (أو خليط من الاستراتيجيات) هي الأفضل تلاماً لدروسه أو أسلوب تعليمه للطلاب. وربما يكون هناك عدد متساوي الجودة من النقاشات للعديد من الخطط.

وربما سيذهب أولئك الذين يفضلون تخصيص الواجب البيتي على أساس يومي في النقاش إلى أن هذه هي الطريقة الوحيدة التي يمكن بها، وبانتظام، تكيف الواجب البيتي للمتطلبات التعليمية. وفي كل يوم يخطط لدرس جديد (مبني على الخبرة من الدرس السابق) يحضر واجب جديد لإعطائه بناءً على المتطلبات الآتية للطلاب. وتكون مثل هذه التخصيصات التصريفية الملائمة بالتحديد أصعب بكثير لإنجازها (إذا لم يكن مستحيلاً) عندما تعطى الواجبات بأسبوع كل مرة. وقد يجد المعلمون الذين خططوا لواجبات أسبوعية وأعطوها للطلاب بأن تبديلها غير متعم، ولذلك قد لا يكونون معتمدين من إجراء التغييرات المبنية على المتطلبات التعليمية فحسب وإنما قد لا يحاولون المسير في دروسهم (لدرجة معينة) لهذه الخطة المسبقة. خذ مثلاً الحالة التي يجد فيها المعلم (منتصف الطريق في واجب الأسبوع) الصف بحاجة لبعض التصريفات التطبيقية على مهارة معينة. ويمكن أن يمتنع الصف من زيادة الواجب البيتي الذي يعطى في اللحظة الأخيرة. وقد تؤثر وجهة النظر السلبية هذه من الطلاب على

الفوائد التعليمية المقصودة من هذا العمل الإضافي. وحتى لو تم حذف أو إسقاط بعض من الواجب البيتي السابق للتكيف مع وضع الواجب الإضافي الجديد فقد يبقى الواجب الناتج دون مستوى الفاعلية التي لو كان قد خطط له بالطريقة اليومية لتلبية الحاجات المستمرة والمتواصلة للدرس. وهكذا يكون للواجب المخطط له يوماً كفادته الأساسية - القدرة على تلبية متطلبات الطلاب المقيمة بانتظام والمبنية على الخبرات الصفية وأداء الواجبات الصفية السابقة.

وعلى ما يبدو، تدعم النقاشات المقتنة بصورة متعادلة تخصيص الواجبات البيتية المخطط لها أسبوعياً. وهنا سيجادل المعلمون أنه يتخصص الواجب أسبوعياً (أو أكثر مرة واحدة، فإمكانهم التخطيط بصورة أفضل وكذلك حلزونة واجباتهم البيتية. وسوف يقولون أن بإعطائهم الطلاب واجباً واحداً كل عدة أيام سوفرون وقت الصف على خلاف إعطاء الواجبات الجديدة. أضف إلى ذلك، سيوضح مناصرو إعطاء الواجب أسبوعياً أنهم بذلك يوفرون فرصة للطلاب الذين يتقيدون عن المدرسة لمتابعة زملائهم الباقين بشكل انسيابي.

وكذلك يمكن الواجب الأسبوعي الطلاب من السبق في واجبه البيتية بتقديمه سلفاً أمام صفه (إذا استطاع ذلك). وهذه العملية لها فائدتين وستبتين. فمثلاً إذا وجد الطالب أنه «ونقل» في يوم الأربعاء لن يكون له وقت لأداء الواجب البيتي، فربما سيمكّل واجبه (إذا استطاع) يوم الثلاثاء. ورغم أن هذه ليس بالممارسة المثالية، فهي أفضل من معيجه يوم الخميس إلى الصف بلا تحضير. إن سبئة معرفة الواجب القادم (المستقبلي) هي فقدان عامل المفاجئة. فهناك فائدة تحضيرية لجعل الطلاب يكتشفون المفاهيم الجديدة. وبمعرفة خطط الواجبات المستقبلية سيعرف الطلاب كذلك أي المواضيع التي ستم دراستها أو متى وقد تكون إزالة هذا العامل الاستكشافي نقطة ضعف للحظة التعليمية.

إن السؤال حول تكرار الواجب البيتي -مثل البقية في هذا الفصل- لا يمكن إجابته إلا من قبل المعلم شخصياً. ونقدم النقاشات الرئيسية لاختلاف المواقف وندرك الاختيار للقارئ. ومهما كان الاختيار فيجب أن تكون المبررات ثابتة تبعاً لشخصية المعلم وأسلوب التعليم وفلسفة وطبيعة الدرس.

متى يجب إعطاء الواجب البيتي؟ When Should Homework Be Assigned?

لربما يكون الوقت المثالي لإعطاء الواجب البيتي هو في تلك النقطة من الدرس حيث تقود طبيعياً إلى العمل الذي سيكون

كيف يجب أن يعد الواجب البيتي؟

How Should The Assignment Be Made ؟

إن إعداد الواجب البيتي يعتمد على الطريقة التي صم بها الواجب. فإذا كان الواجب البيتي قد صم على أساس أسبوعي عندها يجب أن يكون الواجب مكتوباً ومستنسخاً وموزعاً على الصف. ويمكن أن تحتوي ورقة الواجب النموذجية على رقم الواجب، وموضوع الدرس، والتاريخ، والواجب الفعلي، وبعض من نقاط الدرس المهمة التي يجب دراستها. وهناك ترتيب واحد ممكن مبين نمونج ورقة (الواجب البيتي الأسبوعي).

وفيما يخص الطلاب، فإن مثل ورقة تخصيص الواجب البيتي هذه يمكن كذلك أن تخدم في توظيف تعزيز الأهداف الصغية. فضلاً عن أن هذه الورقة يمكن أن تفيد كنموذج مستمر للتخاطب (التواصل) مع الآباء. وستجعلهم مدركين لاتجاه المنهج وأين يمكنهم تقديم المساعدة لأولادهم. وسوف يصبح كذلك اتجاه المنهج مركزاً بوضوح أكثر للطلاب كنتيجة لاستخدام أوراق الواجبات البيتية هذه.

ومن إحدى فوائد استخدام أوراق الواجب البيتي الصغيرة (وربما الكبيرة) هي تجنب إمكانية كتابة الطلاب للواجب الخطأ عرضاً. ومثل هذا قد يحدث إذا كان عليهم نسخة من السورة أو غير إملاءه من المعلم.

ويمكن كذلك استخدام أوراق الواجبات البيتية من قبل المعلم على أساس يومي. وفي هذه الحالة يمكن أن تنقسم الأوراق إلى تمارين فردية أو تكتب (تملأ) يومياً. ومن صعوبات استخدام أية ورقة واجب يومي هي أن أية تعديلات في الواجب يجب أن يشارك الصف في إجراء التغيير. وقد يكون لهذا الإجراء مردود سلبي بين الطلاب رغم أن عمل ذلك بصورة صحيحة قد يقلل أو ربما ينهي التأثير السلبي هذا.

ومن الطرق الشائعة في إعطاء الواجبات البيتية لمادة الرياضيات هي عبر السورة. إن المعلمين محظوظون جداً إذا جعلوا صفهم يكتب الواجب لجميع صفوفهم الباقية على السورة، أي أنه عندما يدخل كل صف القاعة فإن الطلاب سيستمخون (ينقلون) الواجب ببساطة في دفتر ملاحظاتهم. وفي هذه الحالة يفضل استخدام السورة الجانبية (إذا توفرت) وليس الأمامية التي يمكن أن تدخر لاستخدامها في الدرس الاعتيادي.

ويمكن للمعلم الذي يخصص واجباً بيتياً في نهاية الدرس أن يستخدم السورة لهذا الغرض. وفي هذه الحالة يفضل السورة الأمامية أكثر بما أنها لن تكون ضرورية بعد ذلك للاستخدام الصفي. ويمكن أن يرى الواجب البيتي في السورة الأمامية أفضل

واجباً. فضلاً يمكن أن يقول المعلم (والآن بما أنكم تعرفون كيف تحلون معادلة ثنائية، جربوا ما يأتي كواجب بيتي). وعلى أية حال يمكن أن يقول البعض أن هذه الطريقة تقطع تواصل الدرس ومن أجل ذلك يجب تجنبها.

ومرة ثانية، وفيما يخص المعلم الذي يختار تخصيص الواجب يومياً. فليس هناك (وقتاً دقيقاً) معيناً لتخصيص الواجب البيتي. أما أولئك الذين يقولون بتخصيص الواجب البيتي في بداية الدرس فهم يعتقدون إن الطلب من الطلاب كتابة واجبه عند دخول القاعة يضمن انهم سيندمجون حالاً يدخلون ولن ينسوا كتابة واجبه.

وقد يقول البعض أن بتخصيص الواجب البيتي في بداية الدرس قد يقصص المعلم عن موضوع الدرس التالي وبذلك يقتل تأثير أو صدمة طريقة الاستكشاف. ومن الممكن كذلك أنه عندما يعطى واجب في بداية الدرس فقد يبدأ بعض الطلاب بحله (خلال) الدرس (للتخلص منه مبكراً) وحسب، وكنتيجة لذلك يفوتهم العمل الجديد المقدم خلال الدرس. ويجب أن لا يشجع الطلبة على ذلك أبداً.

ويمكن أن يرد المعارضون لإن المعلم يمكن أن يصبح مندمجاً جداً بالدرس بحيث أنه / أنها ينسى أن يخصص واجباً بيتياً أو لربما يعطيه للطلاب وجرس نهاية الدرس يصد والطلاب في عملية مفادرة الصف. ويمكن لهذا أن لا يعطي فرصة للمعلم لتوضيح الواجب البيتي للصف، فضلاً عن أن بعض الطلاب قد يفوتهم استلام الواجب لخروجهم بسرعة كبيرة جداً. وعلى أية صورة فإن الواجب المستعمل غير مرغوب به.

وجواباً على ذلك، فإن المناصرين لواجب نهاية الدرس يمكن أن يناقشوا ويقولهم أن بتخصيص الواجب البيتي في نهاية الدرس سيكون المعلم قادراً على عمل التعديلات في الواجب المخطط له أصلاً بناءً على أداء الصف خلال الدرس من غير أن يعلم الطلاب ذلك. وبهذه الطريقة لن يكون هناك شعور غير مرض ناتج من جهة الصف.

هناك العديد من النقاشات التي يمكن أن تقدم في سبيل (أفضل وقت Best Time) لتخصيص الواجب البيتي. وقد قدمنا وببساطة عينة من الخيارات المتاحة لكي يستطيع القارئ أن يتخذ القرار. ومهما يكن الوقت الذي يجده مناسباً أكثر له ولصفه يجب عليه مراجعة الواجب بعناية مع الصف. ويجب توضيح الأجزاء الغامضة ونقاط الصعوبة المحتملة. كما أن ذلك يجب أن يجعل الطلاب واعين ومدركين الغرض من تخصيص واجب بيتي معين.

صحيفة الوظيفة المنزلية الأسبوعية

Weekly Homework Assignment Sheet

(Class) الصف

الوظيفة رقم (Assignment No.) الكتاب / الصفحة ، التمرين Book / Page / Exercises " " " " " " " " " " " " المفاهيم والعلاقات المطلوب تذكرها Concepts and Relationships to Remember	الموضوع (Topic) التاريخ (Date)
الوظيفة رقم (Assignment No.) الكتاب / الصفحة ، التمرين Book / Page / Exercises " " " " " " " " " " " " المفاهيم والعلاقات المطلوب تذكرها Concepts and Relationships to Remember	الموضوع (Topic) التاريخ (Date)
الوظيفة رقم (Assignment No.) الكتاب / الصفحة ، التمرين Book / Page / Exercises " " " " " " " " " " " " المفاهيم والعلاقات المطلوب تذكرها Concepts and Relationships to Remember	الموضوع (Topic) التاريخ (Date)
الوظيفة رقم (Assignment No.) الكتاب / الصفحة ، التمرين Book / Page / Exercises " " " " " " " " " " " " المفاهيم والعلاقات المطلوب تذكرها Concepts and Relationships to Remember	الموضوع (Topic) التاريخ (Date)
الوظيفة رقم (Assignment No.) الكتاب / الصفحة ، التمرين Book / Page / Exercises " " " " " " " " " " " " المفاهيم والعلاقات المطلوب تذكرها Concepts and Relationships to Remember	الموضوع (Topic) التاريخ (Date)

- المصادر المتوفرة (مثلاً المدرسة، أو القسم، أو المكتبة العامة، أو الحاسوب).
- جدول المواعيد للواجب.

بعد فترة معقولة من الزمن، يجب على المعلم أن يراقب تقدم سير الطلاب. كذلك يجب مساعدة الطلاب الذين يتعثرون كما يجب تشجيعهم، وتقييم الاتجاه الخاطئ للثلاثين بالعمل. وفي هذا الوقت يستطيع المعلم أن يناقش مع الصف بعض الصعوبات التي ربما واجهها بعض الطلبة في عمل الواجب، وربما مساعدة الآخرين في مواجهة نفس المشاكل.

وفي منتصف الطريق، أثناء المشروع، يجب أن تراجع صيغة الواجب مع الصف. ويجب يذكر الطلاب بالصادر المتوفرة (مثلاً: مكتبة قسم الرياضيات أو مكتبة المدرسة).

ولأجل أن يكون الواجب طويل المدى مفيداً إلى أقصى حد يجب أن يجنول الطلاب على اللقاءات الفردية مع المعلم للحصول على المساعدة المستمرة. ولا يوفر ذلك مدخلاً ضرورياً للتوصية حسب وإنما كذلك تحفيزاً مطلوباً أكثر في الغالب لمزيد من العمل.

وعلى خلاف الواجب البيتي المعتاد، يتطلب الواجب طويل المدى مراقبة وإرشاداً ومساعدة وتقيماً مستمراً. ومن المحتمل أن يكون مثل هذا الواجب غير فاعل إلا إذا كانت هناك عناية خاصة لتحفيز ومساعدة الطلاب في هذه المساعي.

صيغة الواجب البيتي

Format of the homework assignment

من المحير جداً بالنسبة للمعلم المبتدئ أن يبحث الطلاب عن توجيه المعلم في ناحية من نواحي العمل المدرسي تقريباً. وهذا يشمل بالتأكيد التوجيه فيما يخص صيغة إعطاء الواجب البيتي. ويميز هنا سؤالان أساسيان في هذا النحى: كيف يجب أن يرتب؟ وأين يجب أن يكتب؟ ورغم إن الإجابة عن هذين السؤالين مترابطتان جداً فسناًقشها كل على حدة.

أسئلة حول تنظيم الواجب البيتي

Questions About Arrangement Of Homework

إن صيغة الواجب البيتي — إذا كانت موحدة بين الطلاب — ستكون مفيدة للمعلم عند قراءة الواجبات الفردية. وهناك مالا نهاية من الخيارات لانتخاب صيغة يتبعها الطلاب عند كتابة واجبه البيتي. وسنشير لبعض الأفكار الأخرى المفيدة للقارئ على أمل أن هذا النقاش سبول نقاشاً آخر. وعندما تحدد صيغة لكي يتبعها طلابك يجب أن تأخذ بالاعتبار (عصك) على هذه

ولذلك تقل احتمالية تجاوزه من الطلاب. وكذلك قد تعطى الواجبات شوقياً ولكن هذه الطريقة ليست هي الأكثر فاعلية في الغالب فقد لا يسمع الطالب قسماً من الواجب أو ربما يسمع جزءاً غير صحيح من الواجب. وقد تكون النتيجة تأثيرات سلبية على عملية التحليل. ويمكن أن يتطلب إعطاء الواجب البيتي الشفوي اعدادات عدة مما يسبب التشوش. وعندما تماء إدارة إعطاء الواجب الشفوي فانه يترك الطلاب على انطباع إن الواجب أما اختياري أو غير مهم جداً.

وبغض النظر عن الطريقة التي تم بها إعطاء الواجب، على المعلم أن يبذل قصارى جهده للتأكد من عدم وجود أي غموض. فمثلاً، إذا كانت هناك تمارين مرقمة بشكل مشابه في أعلى وأسفل صفحة ما من الكتاب المنهجي فإن الموقع الأعلى والأسفل يجب أن تحدد في الواجب. ويجب أن يحدد كل واجب بصورة صحيحة بنوعه وتاريخه وموضوعه أو أية معلومات ذات صلة. وفوق كل اعتبار، فإن الأسلوب الذي يقدم به الواجب البيتي يجب أن يكون ثابتاً مع الأسلوب التعليمي للمعلم وملائم لنوع الدرس. ويعتقد بعض المعلمين أن صف الرياضيات الأضعف يميل أكثر لاختيار الواجب البيتي المقدم على أوراق لأنهم قد ينسخون واجبه بصورة غير صحيحة أو ربما ببساطة ينسون نسخه. وهكذا، فإن نوع الصف قد يكون مهماً جداً لأخذه بالاعتبار في اختيار أفضل صيغة لتقديم الواجب البيتي من خلالها.

كيف يجب أن يخصص الواجب طويل المدى؟

How Should Long-Term Assignment Be Given ?

بين الفينة والأخرى قد يكون الواجب طويل المدى مناسباً لصف الرياضيات. وربما يستطيع المعلم أن يقرر إعطاء واجب بكتابة تقرير عن رياضي مشهور، أو يكلف الطلاب بمشروع تركيب (بناء هندسي أو تجربة إحصائية). ومن المهم جداً الطريقة التي يقدم بها الواجب لأي من هذه الواجبات طويلة المدى.

إن إمكانية إعطاء الواجب طويل المدى يجب أن تملأ إلى الصف في بداية الدوام. وعندما يكون المعلم جاهزاً لإعطاء هذا المشروع رسمياً للصف، عليه أن يتأكد من ضمان الأمور الآتية:

- مدى العمل المطلوب (يجب إدراج مواضيع معينة).
- الخطوط الأساسية المحددة لاختيار الموضوع (إذا ما تطلب اختياراً).
- مدى وحدود للمشروع.
- صيغة تقديم العمل.

ويصر المعلمون غالباً على صيغة للعمل على أنواع معينة من المسائل. فمثلاً ولحل المعادلات من المفضل جعل الطلاب يخطون الرموز (الأعلامات) المتساوية عمودياً. وقد يبسط الطلاب الجذور بالعمل أفضلاً. ويمكن إعطاء تعليمات وتوجيهات خاصة عندما يتضمن الواجب البيتي رسم دوال أو إثبات نظريات هندسية. وبما أن كلا النوعين الآخرين من التعاريف تحتاج بصورة متساوية لاستخدام صفحة كاملة لكل مسألة. ستضمن صيغة أكثر كفاءة طي قطعة ورقية من قياس 11×8.5 إلى نصفين لتكون (كراسا) 5.5×8.5 من أربع صفحات تكفي الواحدة منها مسألة فقط (انظر الشكل في أعلى الصفحة). وتتبع هذه الصيغة للطلاب أن يصنع أربع مسائل أطول بدلاً من اثنين (مثل برهان هندسي أو رسم دالة) على ورقة. إن معالجة المعلم للأوراق يجب أن تكون كذلك اسهل. وبغض النظر عن الصيغة التي سيختارها المعلم للاستخدام، تخدم التوحيد بين الطلاب في وظيفتين مفيدتين: تعطي الطلاب التوجيه المرغوب وتجعل من مهمة المعلم في القراءة ايسر بكثير.

أين يجب أن يكتب الواجب؟

Where Should The Homework Be Written?

يجب أن يعد تنظيم وترتيب موحد للصف اعتماداً على نوع الصف المشترك وموضوع الدرس. فمثلاً قد يطلب المعلم في موضوع الهندسة للمدرسة الثانوية (الإعدادية) أوراقاً منفصلة الترتيب أو دفتر حلزوني (سبايرول) 11×8.5 بماسكة أو ظرف كبير مربوط إلى الغلاف الداخلي الخلفي. وهذا يمكن الطلاب من الحفاظ على ملاحظاتهم وواجبهم البيتي سوية في كراسات مطوية. وبدلاً من ذلك يمكن للمعلمين الطلب من طلابهم الحفاظ على السطر غير واضح بالاستنساخ.

لكي، ويعد أن يجمع بواسطة المعلمين، أن يمداد في دفتر الملاحظات أو يوضع في محفظة الطالب.

هناك العديد من الطرق الناقمة لجعل الطلاب يحافظون على واجبهم البيتي. ويجب أن يحدد الأسلوب تماماً من قبل المعلم وقد يختلف مع اختلاف كل صف اخذين بالاعتبار أشياء مثل الموضوع، ودرجة إطاعة الصف، وعادات الطلاب الكتابية.

الواجبات البيتية وكذلك استخدام الطلاب النهائي لها.

وجهي الورقة؟ ربما يمكنك البدء بسؤال نفسك حول ما إذا كان من الرضي جعل طلابك يستخدمون وجهاً واحداً للورقة عند كتابة الواجب أم استخدام كلا الوجهين. ويستثناه بعض المواقف (مثلاً برهان غير اعتيادي، مسألة، أو تقرير للتسليم) فإن جعل الطلاب يكتبون على وجه واحد من الورقة هو ربما أمر مكلف وتبذيري. مع ذلك قد يفضل بعض المعلمين فعل ذلك ويعطون تبريراتهم المقنعة.

تحديد المعلومات؟ على المعلم أن يحدد للمعلومات التي يجب أن تكتب على ورقة الواجب البيتي. فبالإضافة إلى اسم الطالب، هل يجب تضمين صف الموضوع ورقم الواجب البيتي وتاريخه ... الخ؟ هل يجب تزهم كل واجب بطريقة معينة؟ ومهما تكن المعلومات المطلوبة التي يختارها المعلم يجب أن تكون موحدة لكل الصف.

كتابة الأسئلة؟ القضية الأخرى التي يجب على المعلم تحديدها هي هل أن على الطلاب كتابة أسئلة الواجب البيتي قبل إجابتها؟

يعد العديد من المعلمين ذلك استخداماً ضعيفاً لوقت الطالب: في حين يعتقد آخرون أن وجود الأسئلة أمام الطالب تجعل من ورقة الواجب البيتي مصدراً جيداً للدراسة فيه.

الهوامش؟ إن المعلم الذي يستلم ورقة واجب بيته من طالب لم يترك هوامش على الصفحات سيقدر كثيراً جعل الطلاب يتركون هوامش كافية لتعليقات المعلم. وربما سيفضل الطلاب كذلك استخدام هذا المجال لعمل التصحيحات الضرورية بعد الاستماع إلى مراجعة الصف للواجب البيتي.

تأطير الأجوبة؟ يطلب بعض المعلمين من طلابهم تأطير أجوبتهم (بمربع) لسؤال ما لغرض فصله عن بقية العمل. وهذا يجعل عمل المعلم ايسر عندما يقرأ أوراقاً كثيرة. والفائدة الإضافية الأخرى المشتقة من هذه العملية هي أنها تتطلب من الطلاب تحديد الجواب لسؤال ما. وهي مهارة غالباً ما تكون مضمونة ولكنها أحياناً ليست بالنافعة جداً. وبعد حل أية مسألة يفقد بعض الطلاب التركيز على ما تم سؤاله بالضبط وبعد حل المسألة بصورة صحيحة قد لا يسلّمون الجواب الصحيح.

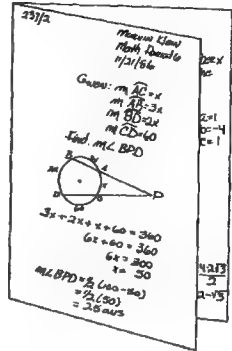
صيغة (شكل) الورقة؟ لأجل بعض المسائل القصيرة في الجبر أو الرياضيات قد يرغب المعلم أن يطوي طلابه الورقة بعدد معين من المربعات. وهذا قد لا يؤدي إلى ورقة مرتبة أنيقة فحسب وإنما يتيح كذلك للطلاب لأن يعمل أكثر على الورقة (في ترتيبها). ويمكن الحصول على تأثير مماثل من خلال تخطيط الورقة بخطوط بدلاً من طيها.

(الاستكشاف (Discovery type) فقد يكون مناسباً مناقشة الواجب البيتي تماماً قبل تقديم مفهوم أو علاقة قد تظهر في منتصف الدرس. وهنا سيكون الواجب البيتي نافعاً لاشتقاق أو استنتاج العلاقة الرياضية المرغوبة من الطلاب. وحين استخدامه بهذه الطريقة يمكن مراجعة أجزاء مختلفة من الواجب البيتي بصورة جيدة في أوقات مختلفة في وقت حصة الدرس. ورغم أن هذا التنوع لطيف فإن الهدف النهائي يجب أن يبنى على حاجات الدرس الخاصة به وملائمته.

كيف يجب مراجعة واجب الصف كله؟ تتطلب مختلف أنواع تمارين الواجب البيتي مختلف الطرق للمراجعة مع الصف. ويمكن مراجعة بعض تمارين الواجب البيتي شفويًا - مثل التمارين التي تتطلب في جوابها كلمة واحدة أو عبارة قصيرة.

إن استخدام السبورة هو إحدى أكثر الطرق شيوعاً لمراجعة الواجب البيتي لدرس الرياضيات، حيث يمكن استخدامها بعدد من الطرق المختلفة. فيمكن للمعلم أن يكتب الحلول الصحيحة على السبورة أو يكلف الطلاب بكتابة مسائل معينة من الواجب عليها. ومن إحدى الطرق الشائعة لمراجعة الواجب البيتي على السبورة تكليف الطلاب بكتابة حل مسألة معينة على السبورة الجانبية عند دخوله للصف. ومن الأفضل حل تمارين السبورة حال دخول الطلاب بدلاً من حلها بعد إعطاء الواجب البيتي كي لا يركز الطلاب - عند حلهم الواجب البيتي - على المسألة المطعنة على السبورة فقط وعلى حساب بقية التمارين. وفي الوقت المناسب من الدرس يجب أن يوضح هؤلاء الطلاب عملهم للبقية وكذلك يجيبون عن أية أسئلة قد تكون لدى زملائهم. وبين فترة وأخرى قد يكفي ببساطة أن يجعل المعلم الصف يقرأ العمل على السبورة وإن يسأل أسئلة الكاتب إذا كان هناك شيء غير واضح. وهذا يجب أن لا يتم على أساس منتظم إلا إذا شعر المعلم بتأكد من أن لهم وجود أحد من الطلاب يدع حل مسألة يمر بلا سؤال وهو غير واضح له. وخلال فترات معينة ستساعد بعض من أسئلة المعلم المتعلقة بتمارين الواجب البيتي على تحديد مدى فهم الطلاب للعمل. وفي ظروف معينة فقط مثل بقاء وقت قليل للدرس يجب على المعلم توضيح العمل الذي كتبه الطلاب على السبورة. وقد يمتنع في البداية على توضيح عملهم المكتوب على السبورة لبقية الصف، ولكنهم سيستمتعون بذلك لاحقاً بل وحتى يفخرون به. ويرتقي هذا النوع من الإجراءات كثيراً بالبيئة التعليمي الناشط للصف.

طريقة أخرى لمراجعة الواجب البيتي وتكون بجعل بعض الطلاب للفتحين سلفاً يحضرون حلولاً نموذجية. وقبل بعض الوقت من بداية درس الرياضيات يعمل هؤلاء الطلاب نسخاً كافية



مراجعة إعطاء الواجب البيتي

Reviewing The Homework Assignment

على المعلم أن يجيب على عدة أسئلة حول مراجعة الواجب البيتي فعلى المعلم أن يقرر متى وكيف يراجع الواجب البيتي، سواء مراجعته مع الصف أو ما سناقش منه. أي هل يجب مراجعة كل تمرين أمام كل الصف أم يقتصر على جزء عيني منه فقط؟ سناقش هذه الأسئلة في هذا الفصل.

أسئلة حول مراجعة الواجب البيتي

Questions About Reviewing Homework Assignment

متى يجب مراجعة الواجب البيتي؟ ربما ليس هناك (أفضل وقت) أثناء الدرس لمناقشة واجب الليلة السابقة. ويتصمم بعض المعلمين بوجوب أن يبدأ كل درس بمراجعة للواجب البيتي للدرس السابق. ويقولون بأن أي عمل جديد يجب أن لا يقدم حتى يتم إتقان الدرس السابق (على شكل واجب بيئي).

يراجع المعلمون الآخرون الواجب البيتي للدرس السابق في نهاية الدرس كي يتيح للدرس الجديد أن يبدأ بسهولة وبداية محفزة ويفضل هؤلاء المعلمين أن يبدأوا الدرس بنشاط محفز يؤدي إلى تطوره. وبعد أن يناقش الموضوع الجديد برمته عندما فقط يفضلون مراجعة الواجب البيتي للدرس السابق.

يستطيع المعلم بكل تأكيد تبني كلا النظامين وربما يدخل آخر يتطلب مراجعة للواجب البيتي السابق في نقطة ما من وقت الدرس والتي تكون مناسبة طبيعياً. وفي حالة الواجب البيتي نوع

الضعيف انعكاساً سلباً عنهم جميعاً. ومن محاسن هذه الطريقة هو الضغط من الزملاء لإتقان الموضوع بشكل جيد. فضلاً عن ذلك فإن توضيحات الزملاء في المجموعة الصغيرة يمكن أن تقدم رؤياً قد يكون المعلم تجاوزها في تقديمه الأصلي. ويمكن للمعلم توضيح ما هو غير واضح بعد التقرير الذي تقدمه المجموعة.

وتكون هذه الطريقة غير مستهكلة للوقت، متاحة الفرصة لتركيز مراجعة الواجب البيتي بأن يكون مسطراً على مسألة أو مسائل لطلاب معينين. وهكذا فإن بقية الصف لن يحملوا أو يملوا بتكرار المادة التي أنقنوها في الأساس.

وسيمت القضاء على مشكلة نسخ الواجب البيتي بسبب الخوف من أن (يمسك) الطالب بدونه لأن الواجب البيتي أصبح الآن مسؤولية المجموعة والأمر الآخر الذي سوف يقل هنا بصورة مهمة هو مسألة جمع وتصحيح عدد كبير من أوراق الواجبات البيتية الفردية. ورغم أن الأوراق لا تزال تجمع هنا، إلا أنها أصبحت مسؤولية (المجموعة) فيما يخص الدقة والاكتمال. وسيجد الطلاب الذي غابوا عن الدرس التوضيحات الموجهة من الزملاء في المجموعة الصغيرة قيمة. إن مراجعة المادة التي فاتت على الطلاب الغائبين أمام الصف كله غير عادل لأن هذه الإعادة هي تكرار واستهلاك غير جيد للوقت. ولذلك فإن واجبات المجموعة الصغيرة تعد مثالية.

كم يجب أن يراجع من الواجب البيتي؟

How Much Of The Homework Should Be Reviewed ?

ربما يكون قرار المعلم هو الطريقة الوحيدة لتحديد ما يجب أن يراجع من الواجب البيتي. ويجب على المعلم أن يراعي موضوع المادة ذات الصلة، ومستوى الصف وقدرته على تعلم موضوع معين، ونوع الطلاب، ثم مدى ما يحققونه. فإذا كان الصف ذا مستوى عالٍ في الرياضيات عندما تكون مراجعة نموذج واحد من الواجبات البيتية كافٍ تماماً. وإذا ضمن المعلم أنه لا توجد صعوبة لأي طالب في الواجب البيتي عندها تكون المراجعة غير ضرورية، وتكفي حينها مجرد وقفة فحص من المعلم من خلال بعض الأسئلة الموجهة للتأكد من إن الصف بأكمله، في حقيقة الأمر، ليس لديه أية صعوبة في الواجب البيتي.

ومن ناحية أخرى، قد يحتاج الصف الذي يكون مستواه هابطاً في الرياضيات إلى مراجعة كلية للواجب البيتي وربما بمجاميع صغيرة. وقد يكون هناك العديد من الطلاب الذين فاتهم بعض من أسئلة الواجب البيتي ويستفادون بشدة من المراجعة الشاملة للواجب.

لبقية الصف. بعدها توزع هذه الأوراق في وقت مناسب من الدرس. والفائدة الرئيسة لهذه العملية هي عدم إبقاء أي طالب خارج فترة الحل في بداية الدرس لكتابة الحلول للواجب البيتي السابق على السبورة. وستتم كل التصحيحات الضرورية على هذه الأوراق عند مراجعة الواجب مع الصف. وهذا الإجراء مكلف وغير عملي لأنه يتطلب وقتاً إضافياً كبيراً لعمل النسخ. ولكن وعلى أية حال فهي تتيح الفرصة للطلاب لمقارنة الصف مع نسخة صحيحة من الواجب البيتي والقليل من الكتابة عندما تتم مراجعة المسائل في الصف.

ومن الطرق التي يمكن بها تجنب مساوئ هذه الطريقة التي ذكرناها آنفاً والتي تقلل من فوائدها العديدة التي تقدمها تكمن بجعل الطلاب الذين تم اختيارهم تحديداً يكتبون الواجب على شفافيات عارض الإسقاط الضوئي. عندها وحينما يكون المعلم مستعداً لجعل الصف يراجع الواجب البيتي لليوم السابق سيعرض ببساطة هؤلاء الطلاب الواجب على الجهاز العارض. وبهذه الطريقة يجب أن يكون لكل طالب في الصف خزّين من الشفافيات الحامضية التي يمكن إعادة استعمالها كي يستطيع هؤلاء الطلاب عندما تعطى لهم مسائل معينة من الواجب لغرض مراجعتها في اليوم اللاحق مجرد نسخ الحلول للمسائل المختارة من الشفافيات بعد أن يكونوا قد اكملوا واجههم البيتي برمتها. وتتضمن هذه الطريقة عدة خصائص مفصلة من الطرق الأخرى التي وصفت سابقاً وبأسلوب كنه نوعاً ما. وتكمن الصعوبة الوحيدة لهذه الطريقة بالحاجة المستمرة للجهاز العارض والوقت القصير نسبياً المتاح للطلاب لرؤية الواجب المضاد على الشاشة.

وهناك بالتأكيد طرق أخرى لمراجعة الواجب البيتي لم تذكر هنا. وقد اخترنا مجرد مجموعة مجربة لإعطاء القارئ فكرة مقتضبة. وللمعلم ذو الخيلة الواسعة أن يطور ما يشاء من الطرق.

الواجب البيتي للمجموعة الصغيرة

Small Group Homework Assignment

على المعلم أن يحدد جزءاً من كل واجب بيتي لإعطاءه سواء لمجموعة صغيرة أو لكل الصف. ومن الأفضل أن تنجز واجبات المراجعة والأمثلة في مجاميع صغيرة، أما الواجبات التحضيرية للدروس التندمية فمن الأفضل أن تنجز في مجاميع كبيرة.

إن مراجعة الواجب البيتي في مجاميع صغيرة هي وسيلة فاعلة لتحقيق هدف تحديد المسؤولية لأداء الواجب البيتي. ويصبح ضمان إتقان الواجب البيتي من كل فرد من المجموعة مسؤولية تلك المجموعة بأكملها. ويعلم الطلاب جيداً أنه سيصادف أن أحداً منهم، والذي قد لا يكون متأكداً من مسألة ما، وإذا ما اختير لتعريف المجموعة أمام كل الصف فيكون أناؤه

فإنه يقضي 12.5 ساعة أسبوعياً لقراءة الواجبات البيتية. وهذا عمل مبالغ فيه وخصوصاً عندما يقترن بأعباء التخطيط للدرس، وتهئية الاختبارات، وكذلك العناية بشؤون المدرسة الأخرى. وما لم يكن المعلم راضياً بتكرير هذه الكميات الهائلة من الوقت لقراءة أوراق واجبات الطلاب، فمن الأفضل جمع القليل من الأوراق ولكن لتقرأ بعناية أكبر.

وإذا كان الواجب مهماً جداً كي يخصص للحل فذلك يعني أن تصحيحه أمر ضروري. ولهذا السبب يكون تصحيح الواجب مهماً بما أنه تم تخصيصه كواجب. وبما أن هناك عمل روتيني هائل في القراءة وإعطاء التعليقات على كل واجب للطلاب كل يوم، فإنه ينصح بجمع نسبة صغيرة فقط من واجبات الصف يوماً. وتدخل هذه في محفظات الطلاب كمصادر للمستقبل. وبقراءة نموذج مختلف من أوراق واجبات الطلاب كل يوم يمكن للمعلم أن يشعر عقلياً بتطور كل الطلاب في الصف.

ولا حاجة لجمع أوراق الواجب البيتي لمواضع معينة لبعض الصفوف. ويمكن للمعلم أن يتمشى في الصف خلال فترة الدرس حينما يكون الطلاب يعملون في حل مسائل صعبة ويخصص بسرعة بعض أوراق الواجب البيتي للطلاب. قد يكون هذا النوع من قراءة الواجب البيتي ممكناً عندما يكون الواجب شتملاً على رسم بعض الدوال والتي يمكن فحصها بسرعة بالتفتيش.

يجب أن يوجه النقد البناء وكذلك الملاحظات التكميلية على أوراق الطلاب التي تم فحصها. وتذكر بأن ذلك جزء من العملية التعليمية. وقد تبدو النقاشات التالية حول طرائق عقابية نوعاً ما ورغم ذلك يجب أن لا تنهت عن انتباه المعلم.

كيف يجب أن يجمع الواجب البيتي؟

How Should The Homework Assignment Be Collected ?

يجب أن لا يتمكن الطلاب من توقع وقت جمع أوراقهم من قبل المعلم. وبخلافه فانه قد يتجنبون أداء واجبيهم في الأيام التي يشعرون فيها بتأكد من أن أوراقهم لن تجمع. على المعلم أن يضع توقيتاً عشوائياً للاختبار واضعاً ملاحظة في سجله عن وقت قراءة واجب كل طالب. ويمكن للمعلم أن يجمع واجب أحد الصفوف من القاعة في أحد الأيام ثم يجمعه بشكل قطري (مائل) في يوم آخر ومن ثم ليعود من الطلاب في يوم آخر. إن مثل هذا النظام يتيح للمعلم جمع واجب أحد الطلاب والذي هو بحاجة إلى مساعدة إضافية ليومين أو ثلاثة على التوالي من دون التسبب بإحراجهم أمام بقية الصف. وهذا سوف يكون الطالب الذي يمكن وضعه في التقاطع الطولي والعرضي والتطري من

كم مرة أن يراجع الواجب البيتي؟

How Frequently Should The Homework Assignment Be Reviewed?

في معظم الحالات، تتم قراءة الواجب البيتي مع الصف أثناء الدرس الذي يلي الواجب. وهناك بالتأكيد استثناءات لهذا الأمر. فمثلاً لو كان الواجب البيتي ليس ذا صلة بالموضوع التالي وإنما بموضوع سيأتي بعد أيام في المستقبل فمن المستحسن تأجيل مناقشة الواجب البيتي حتى يحين موعد ذلك الدرس. إن مستوى القابلية (أو مستوى الإنجاز) للصف يمكن أن يكون عاملاً محدداً لدى تكرار مراجعة الواجب البيتي. وقد لا يحتاج الصف الجيد مراجعة يومية بل يمكن القيام بها فقط عند الطلب. ويجب أن يحذر المعلم من مراجعة الواجب يومياً. فقد يعطي الطلاب المعلم شعوراً كاذباً بالأمان بقولهم انهم لا يحتاجون مناقشة الواجب البيتي في حين تكون مثل هذه المراجعة في حقيقة الأمر مساعدة لهم.

وبصورة عامة يفضل مراجعة الواجب البيتي مباشرة بعد القيام به من قبل الطلاب لأن هذا يضمن انه لا يزال طازجاً في أذهانهم ويبقى جزءاً من العملية التعليمية بأكملها.

فحص الواجب البيتي

Checking Homework Assignment

عندما يعطى الواجب البيتي ومن ثم ينجز على وفق صفة محددة. يجب على المعلم أن يوجه بمراجعة هذا الواجب. وفي ذات الوقت يجب على المعلم أن يتمسك بمسألة جمع وفحص كل الواجبات الفردية. وهنا يبرز السؤال الآتي: هل يجب أن يجمع الواجب؟ ومن؟ وكما مرة؟ وهل يجب أن يصحح؟ وبغض النظر عن قراءة واجب الطالب البيتي، كيف للمعلم أن يحدد مستوى إتقان الطلاب للواجب البيتي؟ وهنا سوف نأخذ باعتبار هذه الأسئلة وأسئلة أخرى حول فحص الواجب البيتي.

أسئلة عن فحص الواجب البيتي

Questions On Checking Homework Assignment

هل يجب أن يجمع الواجب البيتي؟ على الرغم من أن بعض المعلمين يجمعون الواجب يومياً فانه عمل روتيني شاق للمعلم بأن يتحمل العبء التعليمي الكامل في قراءة عدد كبير من الأوراق. ولنفرض أن للمعلم خمسة صفوف يضم كل واحد منها ثلاثين طالباً. فإذا كان على المعلم أن يجمع أوراق الطلاب يومياً فعليه أن يقرأ 750 ورقة أسبوعياً ! وإذا ما استغرق في قراءة كل ورقة دقيقة واحدة فقط (وهو وقت قصير جداً لإعطاء تعليقات مفيدة)

يعطى من قبل خدمة الامتحانات التعليمية Educational Testing Service) وبصورة عامة لا يستطيع أي معلم على أية حال أن يفحص كل الواجب البيتي يومياً وبتفصيل دقيق لأن ذلك منمقة كبيرة للوقت.

تذكر أن القيمة الرئيسية للواجب البيتي هو عمل الطلاب عليه فيمكن أن يخدم فحص المعلم للواجب البيتي كحافز للطلاب للدرس القادم. ويجب أن يوضح هذا في الذهن عند تقديم التعليقات على ورق الطلاب.

كيف يجب أن يتعامل المعلم مع الطلاب الذين ينسخون الواجب البيتي من الآخرين؟

من المتعارف عليه تقليدياً إن الطالب الذي ينسخ (ينقل) واجباً بيتياً (إذا ما ثبت ذلك) من الآخرين يعاقب بطريقة معينة. فيمكن للطلاب إذا ما يش أن يحاول مرة أخرى في المستقبل مستغلاً الفرصة في نسخة من زميل بدلاً من أن يعاقب على عدم كتابته. ومن الطرق الفاعلة في معالجة مثل هذه المشكلة هي (بتجفيف النسخ) (dry up the source). سوف تجعل معاقبة الطالب الذي أعطى الواجب لزميله الآخر كي ينسخه المعطي (المانح) ممعش جداً لتكرار هذه الحادثة. وبهذا الأسلوب فإن مهاجمة المصدر قد تقضي على مشكلة الواجب البيتي المنسوخ.

طريقة أخرى فاعلة في معالجة هذه المشكلة هي بالتحدث لكل الطالبين المشتركين في الموضوع. واجههم (بالدليل) وتحدث معهم عن فضائل الصدق. وإذا ما تكرر النسخ منهما يجب إخطار والديهم بالأمر. أن تحذيراً للصف حول هذا الموضوع وإجراءاته في بداية السنة الدراسية كفيل بمنع هذه المشكلة تماماً.

هل يجب استخدام الامتحان السريع (Quiz) للتأكد من إتقان الواجب البيتي؟

طالما إن الامتحان السريع لا يعطى في الأساس لأسباب عقابية، فإنه يمكن استخدامه كإجراء احتياطي لتحديد مستوى الإتقان (Mastery) الحقيقي للصف حول واجب بيتي معين. يجب أن يكون الامتحان موجزاً وبحوي على المادة التي تمت تغطيتها في الواجب البيتي (إذا كانت هذه هي منطقة الاهتمام). ويجب أن تكون أسئلة الامتحان السريع مصاغة بوضوح وإيجاز وبلا تعقيدات لتجنب الإرباك. إن الدافع الجانبى القدام من توقعات الامتحان السريع قد يكون عاملاً نافعا في مجمل العملية التعليمية.

الصف. وفي هذه الحالة قد يميز الطالب هذا الجمع التكرار لواجبه إلى (سوء حظه) فقط في حين إن الأمر كان مخطط له بقصد. وهنا تكون للمعلم فرصة لمساعدة الطالب بشيء إضافي من خلال الواجب البيتي.

ماذا يجب أن يصنع بالواجب البيتي الذي تم جمعه؟

هناك مدى واسع للخيارات حول ما يجب عمله بالواجب البيتي الذي تم جمعه. أحدها أن لا يفعل المعلم شيئاً لهذه الأوراق. والآخر أن يصح المعلم الأوراق بدقة متناهية مسجلاً تعليقاته ومانحاً درجة. وهنا لا تتصح بهذين الطرفين في المعاملة مع الواجب. فعدم فعل شيء للواجب البيتي المجموع من الصف يعد قلة أمانة تجاه الطلاب. فحين يتم جمع الواجب البيتي يتوقع الطلاب أن يلقي المعلم ولو مجرد نظرة عليه وهذا هو الصواب.

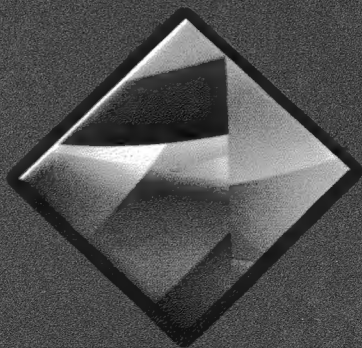
أما التطرف الثاني فلا ينصح به كذلك من وجهة نظر اعتبارات العبء الثقيل الذي نوقش سابقاً. فضلاً عن ذلك يقدم التطرف هذا كذلك مسألة إعطاء الدرجات للواجب البيتي. وهذه عموماً ممارسة سيئة لأن تتبع، لأنها تجلب ناحية عقابية محتملة للواجب البيتي. فإذا ما أعطى المعلم درجات على الواجب البيتي فمن المحتمل إن الطلاب سيشكون مختلف الطرائق للوصول للحل الصحيح. فقد يلجئون إلى زملائهم، أو آبائهم، أو أصدقائهم، أو حتى معلمين آخرين لينجزوا عنهم الواجب البيتي هذا. ورغم أن هذا قد يكون له فائدة تعليمية أحياناً (مثلاً عندما يرى الطالب الحل الصحيح الذي أعطاه إياه الغير فإنه يتعلم المادة فعلاً نتيجة لذلك)، فإن الاهتمام عادة ينصب على وضع الجواب الصحيح على الورقة مجرد لأن يراه المعلم وليس لغرض تعلم الحل الصحيح للسألة.

إن أوراق الواجب البيتي التي تم جمعها يجب أن تقرأ بدقة وبالكامل. وحيثما يكون مناسباً يجب أن تسجل التعليقات المفصلة وتقدم الملاحظات التفاضلية للتجميع. وبعد أن يقرأ المعلم بعضاً من نماذج الواجب البيتي يصبح مجهزاً أفضل بكثير لتعليم الصف لأنه سيصبح الآن أكثر معرفة بنقاط ضعف وقوة الطلاب أن مثل هذه المعلومات يمكن أن تحسن من العملية التعليمية بشكل جيد.

وربما تكون هناك مواقف يرغب فيها المعلم بفحص واجب الصف البيتي بالتفصيل. وربما يرغب بتحديد فيما إذا كانت النقاط الصعبة تحديداً قد تم إتقانها بصورة صحيحة أو إن الطلاب يعدون أنفسهم بشكل ملائم لامتحان قادم (مثل امتحان تحديد الموقع المتقدم Advanced Placement Exam الذي

Teaching Secondary Mathematics

Techniques and Enrichment Units



University Book House

Al Ain - United Arab Emirates

P.O.Box 16983 - Fax: 7542102

Tel: (971) (3) 7554845 - 7556911



دار الكتاب الجامعي

العين - الإمارات العربية المتحدة

ص.ب: ١٦٩٨٣ - فاكس: ٧٥٤٢١٠٢

هاتف: ٧٥٥٦٩١١ - ٧٥٥٦٩١١ (٣) (٩٧١)

E-mail: bookhous@emirates.net.ae